

## محتوای ویژه کتاب

- آموزش مفاهیم در قالب چکیده درس
- پاسخ همه تمرین های کتاب درسی
- ارزشیابی مستمر در پایان دروس با پاسخ و ریز بارم
- آزمون تلفیقی پایان هر فصل با پاسخ و ریز بارم
- موارد مهم و سؤالات امتحانی
- آزمون های پایانی با پاسخ و ریز بارم

# ریاضی

فصل ۱ مجموعه ها

درس ۱ معرفی مجموعه

چکیده درس:

نکته ۳: برای بیان عضویت یک شیء در یک مجموعه از علامت « $\in$ » و برای بیان عدم عضویت یک شیء در یک مجموعه از علامت « $\notin$ » استفاده می کنیم.

مثال: اگر  $A = \{1, 2\}$ ،  $2 \in A$  یعنی «عدد ۲ عضو مجموعه A است.» و  $3 \notin A$  یعنی «عدد ۳ عضو مجموعه A نیست.»

نکته ۴: برای نمایش مجموعه می توان از خطوط بسته نیز استفاده کرد. در این صورت می گوئیم مجموعه را با نمودار ون نشان داده ایم.

نمودار ون  $A = \{1, 2, 3\}$



نکته ۵: مجموعه ای را که هیچ عضوی ندارد، مجموعه تهی می نامند و با نماد  $\emptyset$  نشان می دهند.

مثال: مجموعه عددهای اول کوچک تر از ۲، یک مجموعه تهی است، زیرا هیچ عدد اولی کوچک تر از ۲ نداریم.

نکته ۱: یک دسته از اشیاء متمایز و کاملاً مشخص را یک مجموعه می گویند. متمایز بودن اشیاء یعنی اینکه تکراری نباشند و کاملاً مشخص بودن اشیاء یعنی اینکه دقیقاً بدانیم چه اشیائی درون مجموعه قرار می گیرند و چه اشیائی درون مجموعه قرار نمی گیرند. عضوهای مجموعه را درون  $\{ \}$  (اکلاد) قرار می دهیم و آن را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنیم.

مثال: عبارت «چهار عدد طبیعی و زوج کوچک تر از ۱۰» یک مجموعه را مشخص می کند ولی عبارت «چهار عدد زوج متوالی» یک مجموعه را مشخص نمی کند. زیرا کاملاً مشخص نیست که کدام عددهای زوج متوالی درون این مجموعه قرار می گیرند.

مثال: مجموعه حروف انگلیسی صدادار را A می نامیم و به صورت  $A = \{a, e, i, u, o\}$  نشان می دهیم.

نکته ۲: جابه جایی عضوهای مجموعه مهم نیست. یعنی با جابه جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی شود.

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$$

## فعالیت

- شما شمارنده های مرکب عدد ۶۰ را به صورت یک مجموعه ننویسید و آن را B نامید.

- مجموعه D شامل همه شمارنده‌های دو رقمی عدد ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟ شش عضو دارد.  
 $D = \{10, 12, 15, 20, 30, 60\}$   
 از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شامل ۳ شمارنده زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. احمد نوشت:  $\{4, 6, 10\}$  و رضا نوشت:  $\{6, 10, 12\}$ . به نظر شما چرا جواب‌های آن‌ها با هم فرق دارد؟ چون کاملاً مشخص نیست منظور کدام عددهای زوج است.

**۳**

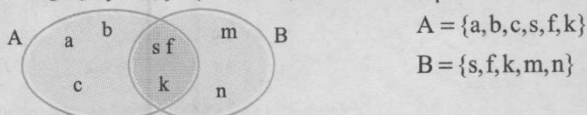
### فعالیت

- ۱- کدام یک از عبارات‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.  
 الف) عددهای طبیعی و یک رقمی:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
 ب) چهار شاعر ایرانی: نمی‌توان یک مجموعه را مشخص کرد، چون نمی‌دانیم کدام چهار شاعر مد نظر است یعنی عضوهای مجموعه کاملاً مشخص نیست. (در قسمت ب) عضوهای مجموعه مشخص نیستند.)  
 ج) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲: نمی‌توان یک مجموعه را مشخص کرد، چون معلوم نیستند. کدام دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲ درون این مجموعه قرار دارند. یعنی عضوهای مجموعه کاملاً مشخص نیستند.  
 ۲- با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:  
 الف) به جای  $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$  باید بنویسیم:  $A = \{1, 2, 4, 5\}$   
 ب) به دلیل تکراری بودن عدد ۵ در  $B = \{5, 6, 5, 7\}$  آن را به صورت  $B = \{5, 6, 7\}$  می‌نویسیم.

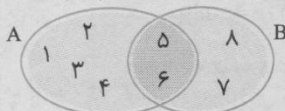
**۳**

### فعالیت

۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.



- ۲- دو مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8\}$  را در نظر بگیرید:  
 دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته مربوط به A و هم در منحنی بسته B وجود دارد؟ اعداد ۵ و ۶ هم در منحنی بسته مربوط به A و هم در منحنی بسته B وجود دارند.



۳- مجموعه عددهای دو رقمی و زوج اول را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند عضو دارد؟ از آنجا که هر عدد زوج دو رقمی به جز ۱ و خودش بر عدد ۲ نیز بخش پذیر است پس، هیچکدام از عددهای زوج دو رقمی اول نیستند. بنابراین مجموعه E هیچ عضوی ندارد.

۴- کدام یک از عبارات‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟

- الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶: این عبارت مجموعه تهی را مشخص می‌کند.  
 ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱: این مجموعه شامل عضو صفر است. پس تهی نیست.  
 ج) عددهای اول و زوج: این مجموعه شامل عدد ۲ است، پس تهی نیست.  
 د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشد: این مجموعه شامل عدد ۳ است، پس تهی نیست.

**۴**

### کار در کلاس

- ۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد؛ سپس عبارات‌های خود را با نوشته‌های هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.  
 مجموعه عددهای صحیح بین -۷ و -۸.

نهم (دوره اول متوسطه)



۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد. (چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک عضوی می‌نامند.)

مجموعه عددهای طبیعی بین صفر و ۲  $\leftarrow \{ \}$

مجموعه جواب‌های معادله  $x + 1 = 3 \leftarrow \{ 2 \}$

مجموعه حروف غیر عربی کلمه «تگرگ»  $\leftarrow \{ گ \}$

۳- عبارتهایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، با علامت  $\checkmark$  و بقیه را با علامت  $\times$  مشخص کنید (با ذکر دلیل).

الف) چهار عدد فرد متوالی  $\times$  یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند.

ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲  $\checkmark \leftarrow \{ 2, 4, 6 \}$

ج) عددهای اول کوچک‌تر از ۲۰  $\checkmark \leftarrow \{ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \}$

د) سه شهر ایران  $\times \leftarrow$  یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند.

ه) شمارنده‌های عدد ۲۴  $\checkmark \leftarrow \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \}$

و) ۵ عدد بزرگ  $\times \leftarrow$  این عبارت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند، چون کاملاً مشخص نیست چه اعدادی بزرگ

محسوب می‌شوند و درون این مجموعه می‌توانند قرار بگیرند.

ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳  $\checkmark \leftarrow$  در واقع مجموعه تهی را مشخص می‌کند ( $\emptyset$ ).

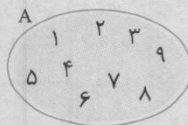
۴- مانند نمونه کامل کنید.

۱	A = { الف ، پ ، ب ، ... ، ی }	۱) مجموعه حروف الفبای فارسی
۴	B = { ۴, ۸, ۱۲, ... }	۲) F = { ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ }
۷	C: مجموعه حروف a و b و عدد ۳	۳) مجموعه عددهای صحیح بین -۳ و ۳
۶	D = { ۵ }	۴) مجموعه عددهای طبیعی و مضرب ۴
۳	E = { }	۵) مجموعه عددهای اول و یک رقمی
۸	F = { ۲, ۴, ۶, ۸ }	۶) مجموعه عددهای اول و مضرب ۵
۲	G: مجموعه عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰	۷) { ۳, a, b }
۵	H = { ۲, ۳, ۵, ۷ }	۸) { ۶, ۴, ۲, ۸ }

۵- کدام یک از عبارتهای زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ با نمودار ون نشان دهید:

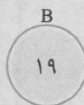
الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$



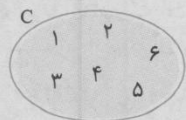
ب) شمارنده‌های اول عدد ۱۹:

$$B = \{ 19 \}$$



ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی مشخص می‌کند.

$$C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$



ها چهار میوه خوشمزه: این عبارت یک مجموعه را مشخص نمی کند. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیست. (و) عددهای منفی و بزرگ تر از یک:



تمرین

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید:

الف)  $A = \{1, 8, 27, 64, 125\} \leftarrow$  مجموعه عددهای طبیعی مکعب کامل کوچک تر از ۱۳۰

ب)  $C = \{1\} \leftarrow$  مجموعه کوچک ترین عدد طبیعی دو رقمی

ج) عددهای طبیعی مضرب ۳ و کوچک تر از ۱۰۰۰  $\leftarrow A = \{3, 6, 9, \dots, 999\}$

د) عددهای طبیعی بزرگ تر از ۴ و کوچک تر از ۵  $\leftarrow \emptyset$  (مجموعه تهی)

ه) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارند  $\leftarrow \emptyset$  (مجموعه تهی)

و) عددهای اول دو رقمی که مضرب ۷ باشد  $\leftarrow \emptyset$  (مجموعه تهی)

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد» یک مجموعه را مشخص نمی کند.

ب) مجموعه  $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$  دارای ۸ عضو است.

ج) مجموعه  $A = \{0, \emptyset\}$  دارای ۲ عضو است.

د) باتوجه به مجموعه  $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$  داریم:  $5 \in A$  است یا با نماد ریاضی،  $5 \in A$  و  $12 \notin A$  نیست یا با نماد ریاضی  $12 \notin A$ .

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشد.

(۱)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  = مجموعه عددهای طبیعی

(۲)  $\{2, 4, 6, \dots\}$  = مجموعه عددهای طبیعی زوج

(۳)  $\{2, 3, 5, 7\}$  = مجموعه عددهای اول یک رقمی

### ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱ نمره)

«هر دسته از اشیاء ..... و کاملاً ..... را یک مجموعه می گوئیم.

۲- کدام عبارت یک مجموعه را مشخص می کند و کدام عبارت یک مجموعه را مشخص نمی کند. چرا؟ (۲)

الف) جواب های معادله  $3x - 2 = 1$

ب) انسان های روشنگر

ج) ده عدد فرد سه رقمی

د) مقسوم علیه های طبیعی عدد ۱۲

۳- کدام مجموعه مشخص کننده مجموعه تهی نیست؟ چرا؟ (۲)

الف) مجموعه همه ی عددهای صحیح که مربع آن ها منفی باشد.

ب) مجموعه عددهای طبیعی بین ۱۰۰ و ۱۰۱

ج) مجموعه اعدادی که جذر آن ها برابر با خودشان باشد.

د) مجموعه اعدادی که هم مثبت و هم منفی باشند.

۴- مجموعه  $A = \{1, 2, \frac{1}{3}, 1, 3\}$  دارای چند عضو است؟ چرا؟ (۱)

۵- آیا دو مجموعه  $\{a, b, c\}$  و  $\{c, a, b\}$  با هم فرق دارند؟ چرا؟ (۱)

۶- باتوجه به نمودار زیر مجموعه A و B و C را با اعضایشان مشخص کنید. (۳)



۵

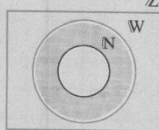
نهم (دوره اول متوسطه)

## پاسخ ارزشیابی مستمر

- ۱ متمایز (۵/۵) - مشخص (۵/۵) الف) یک مجموعه است و این مجموعه دارای یک عضو می‌باشد.  $\{1\}$  (۵/۵) ب) یک مجموعه نیست. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند. (۵/۵) ج) یک مجموعه نیست. چون عضوهای آن کاملاً مشخص نیستند. (۵/۵) د) یک مجموعه است.  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  الف) مجموعه تهی است. زیرا مربع هیچ عددی منفی نیست. (۵/۵) ب) مجموعه تهی است. چون بین ۱۰۰ و ۱۰۱ عددی طبیعی نداریم. (۵/۵) ج) این مجموعه تهی نیست. زیرا دارای عضوهای صفر و یک است. (۵/۵) د) این مجموعه تهی است. زیرا هیچ عددی هم مثبت و هم منفی نیست. (۵/۵) ۴ این مجموعه دارای ۲ عضو است (۵/۵) یعنی  $A = \{1, 2\}$  زیرا  $\frac{4}{2} = 2$  و  $3^1 = 1$  و اینکه تکرار عضو در مجموعه مجاز نیست. ۵ خیر (۵/۵) فرقی ندارند. زیرا جایجایی اعضا یک مجموعه جدید ایجاد نمی‌کند. (۵/۵) ۶  $C = \{4, 5, 6\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  و  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  (۱)

## مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

- (مجموعه اعداد طبیعی)  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$   
 (مجموعه عددهای حسابی)  $W = \{0, 1, 2, \dots\}$   
 (مجموعه عددهای صحیح)  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$



نکته ۱۲: می‌توان برخی از مجموعه‌ها را به جای نشان دادن با اعضا، با نمادهای ریاضی نشان داد و مشخص کرد. برای این کار باید ابتدا یک ویژگی مشترک برای عضوهای این مجموعه‌ها یافت و سپس آن ویژگی مشترک را با متغیر یا متغیرهایی بیان کرد. سپس باید مشخص کنیم این متغیرها عضو چه مجموعه‌ای هستند.

مثال: مجموعه  $A$  را با نمادهای ریاضی و مجموعه  $B$  را با عضوهای مشخص کنید.

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}, k < 3\} = \{3, 1, -1, -3, \dots\}$$

نکته ۱۳: مجموعه عددهای گویا را نمی‌توان با نمایش اعضا مشخص کرد. بنابراین این مجموعه را با نماد ریاضی معرفی و با حرف  $Q$  نام‌گذاری می‌کنیم.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \quad \text{نکته ۱۴}$$

نکته ۱۵: اگر مجموعه‌ای دارای  $n$  عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های

آن برابر با  $2^n$  است.

مثال: اگر مجموعه‌ای دارای ۴ عضو باشد تعداد زیر

مجموعه‌های آن چندتا است؟

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 = 16 \Rightarrow \text{۱۶ زیر مجموعه}$$

## کلیدرسان:

نکته ۶: می‌گوییم دو مجموعه  $A$  و  $B$  با هم برابرند، هرگاه همه عضوهایشان یکسان باشند. به عبارت دیگر می‌گوییم دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابرند هرگاه هر عضو  $A$  در  $B$  باشد و هر عضو  $B$  نیز در  $A$  باشد. در صورتی که  $A$  با  $B$  برابر باشد می‌نویسیم  $A = B$  و در صورتی که  $A$  و  $B$  برابر نباشند می‌نویسیم  $A \neq B$ .

مثال: دو مجموعه  $A = \{1, 2, -\sqrt{4}\}$  و  $B = \{1, \sqrt{4}, -2\}$  با هم برابرند زیرا  $2 = \sqrt{4}$  و  $-\sqrt{4} = -2$ .

نکته ۷: می‌گوییم مجموعه  $A$  زیرمجموعه مجموعه  $B$  است و می‌نویسیم  $A \subseteq B$  هرگاه هر عضو مجموعه  $A$  درون مجموعه  $B$  نیز موجود باشد. اگر  $A$  زیرمجموعه  $B$  نباشد می‌نویسیم  $A \not\subseteq B$ .

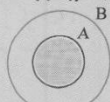
مثال: اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  در این صورت  $A \subseteq B$ .

مثال: اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 2, 4, 5\}$  در این صورت  $A \not\subseteq B$  زیرا عدد ۳ در  $A$  هست ولی در  $B$  نیست.

نکته ۸: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است. یعنی  $A \subseteq A$ .

نکته ۹: مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است یعنی  $\emptyset \subseteq A$ .

نکته ۱۰: اگر  $A$  زیرمجموعه  $B$  باشد، در این صورت نمایش  $A$  و  $B$  با نمودار ون به صورت زیر است:



نکته ۱۱: مجموعه‌های اعدادی که کاربرد زیادی دارند به صورت زیر نام‌گذاری و نمایش داده می‌شوند.

## فعالیت

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود. سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

۱۰	-۱۰	۱۲
۶	۴	۲
-۴	۱۸	-۲

 $A = \{۶, ۴, ۲\}$ 

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟  $B = \{۲, ۴, ۶\}$  سه عضو آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ بله آیا هر عضو B در مجموعه A است؟ بله

۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است: فرض کنیم عدد کوچک‌تر x باشد. پس عددهای دوم و سوم  $x+۱$  و  $x+۲$  خواهند بود.

$$\begin{aligned} x + (x+1) + (x+2) &= 27 \Rightarrow 3x + 3 = 27 \\ \Rightarrow 3x &= 27 - 3 \\ \Rightarrow 3x &= 24 \\ \Rightarrow x &= \frac{24}{3} = 8 \Rightarrow A = \{8, 9, 10\} \end{aligned}$$

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰:  $\{۷, ۸, ۹\}$  با A برابر نیست.  
ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱:  $\{۸, ۹, ۱۰\}$  با A برابر است.  
ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر باشد.  $\{۸, ۹, ۱۰\}$  با A برابر است.

## کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشد:

الف)  $\left\{ ۵, -۳, \frac{۲}{۵}, \frac{۹}{۳} \right\} = \left\{ \frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}, ۴, \sqrt{۲۵} \right\}$

توجه کنید که  $۳ = \frac{-12}{-4} = \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}$  و  $\sqrt{۲۵} = ۵$  و  $\frac{۹}{۳} = ۳$ . بنابراین عدد ۳- به مجموعه سمت چپ و عدد ۴ به مجموعه سمت راست باید اضافه شود.

ب)  $\left\{ ۷, \frac{۴}{۱۰}, \sqrt{\frac{۴}{۹}}, -\frac{۱}{۳}, -۲, ۰, \frac{۶۲۵}{۱۰۰۰} \right\} = \left\{ \frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۵}, -۰, \frac{۵}{۸}, ۷, -۲ \right\}$

توجه کنید که  $\frac{۴}{۹} = \frac{۲}{۳}$  و  $\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۵}{۸}$  و  $\frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$  و  $۰ = \frac{۰}{۶۲۵}$ . بنابراین به مجموعه سمت چپ، عدد ۲- و به مجموعه سمت راست، عدد ۷ باید اضافه شود.

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$$A = \{۲, ۳, ۴\} \quad B = \{\sqrt{۴}, -(-۳), ۲^۲\}$$

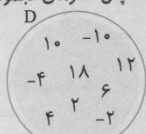
می‌دانیم که  $\sqrt{۴} = ۲$  و  $۲^۲ = ۴$  و  $-(-۳) = ۳$ . پس هر عضو A در B و هر عضو B در A موجود است. پس در واقع دو مجموعه A و B مساوی‌اند.

نتیجه: طبق پاسخ‌های دوستانمان نتیجه می‌گیریم که دو مجموعه A و B در صورتی مساوی هستند که هر عضو A در B و هر عضو B در A موجود باشد.

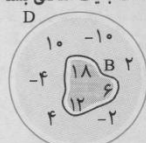


## فعالیت

مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعه D را در نمودار ون روبه رو بنویسید:



در نمودار بالا، عضوهایی که بر ۳ بخش پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.



۸

توجه

$$B = \{12, 18, 6\}$$

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز است؟

بله هر عضو از B عضوی از D است.

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا  $D = C$ ؟

$$C = \{10, -10, -4, 4, 2, -2, 6, 12, 18\}$$

بله  $D = C$  است.

آیا مجموعه C زیرمجموعه D است؟ بله

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشند؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟

{ } - مجموعه تهی ( $\emptyset$ )

آیا عبارت  $D \subseteq \{10, 4, -6, 2\}$  درست است؟ چرا؟ خیر - زیرا هر عضو مجموعه  $\{10, 4, -6, 2\}$  عضوی از

مجموعه D نیست. به بیان دقیق‌تر عدد -6 عضو این مجموعه است ولی در مجموعه D وجود ندارد.

آیا در مجموعه تهی عضو هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟ خیر - زیرا مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد.

۸

## کار در کلاس

۱- پاتوجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$A \not\subseteq C$  ← نادرست است. زیرا تمام عضوهای A حتماً در مجموعه C نیز وجود دارند.

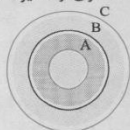
$B \subseteq A$  ← نادرست است. زیرا طبق شکل B عضوهایی دارد که در A نیستند.

$C \not\subseteq A$  ← درست است. زیرا C به جز عضوهای A، عضوهای دیگری نیز دارد.

$\emptyset \subseteq A$  ← درست است. زیرا  $\emptyset$  هیچ عضوی ندارد که در A وجود نداشته باشد.

$B \subseteq C$  ← درست است. زیرا همه عضوهای B حتماً درون C نیز موجودند.

$A \subseteq B$  ← درست است. زیرا هر عضو A حتماً عضوی از B نیز هست.



۲- مجموعه‌های A، B و C را در نظر بگیرید، سپس درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (با ذکر دلیل)

$$A = \{1, 3, 6, 4\}, \quad B = \{5, 1, 3\}, \quad C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$$

$B \not\subseteq A$  ← درست است. زیرا عدد ۵ در B هست ولی در A نیست.

$3 \subseteq B$  ← نادرست است. زیرا عدد ۳ یک مجموعه نیست. درست آن است که بنویسیم  $3 \in B$ .

$A \subseteq B$  ← نادرست است. زیرا عددهای ۴ و ۶ در B نیستند در حالی که در A موجودند.

$B \subseteq C$  ← درست است. زیرا هر سه عدد ۱ و ۳ و ۵ در  $C$  نیز موجودند.  
 $A \not\subseteq C$  ← درست است. زیرا عدد ۴ عضو  $A$  است ولی در  $C$  نیست.  
 $2 \in A$  ← نادرست است. زیرا عدد ۲ در مجموعه  $A$  وجود ندارد.  
 $\{1, 4\} \in A$  ← نادرست است. زیرا عضوی چون  $\{1, 4\}$  در مجموعه  $A$  وجود ندارد. درست آن است که بنویسیم  $\{1, 4\} \subseteq A$ .  
 $6 \in A$  ← نادرست است. زیرا عدد ۶ درون  $A$  موجود است.  
 $\{5, 6\} \subseteq C$  ← درست است. زیرا هر دو عضو ۵ و ۶ درون مجموعه  $C$  نیز موجودند.  
 $5 \in C$  ← درست است. زیرا عدد ۵ عضو مجموعه  $C$  است.  
 $0 \subseteq A$  ← نادرست است.  
 مثال: همهٔ زیرمجموعه‌های  $A = \{a, b, c\}$  در زیر نوشته شده است.

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

مانند مثال قبل. تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:  
 الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲  $\{10, 11\}$

زیرمجموعه‌ها:  $\emptyset, \{10\}, \{11\}, \{10, 11\}$

ب)  $\{a, b, c, d\}$

زیرمجموعه‌ها:

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}$  و  $\{a, b, c, d\}$

کار در کلاس

۱۰

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید:

الف) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد.  $\{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$

ب)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$   $A = \{-5, -4, ..., 4\}$

ج)  $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\left. \begin{aligned} k = -2 &\Rightarrow 3k + 2 = 3(-2) + 2 = -4 \\ k = -1 &\Rightarrow 3k + 2 = 3(-1) + 2 = -1 \\ k = 0 &\Rightarrow 3k + 2 = 3(0) + 2 = 2 \\ k = 1 &\Rightarrow 3k + 2 = 3(1) + 2 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \{..., -4, -1, 2, 5, ...\}$$

تمرین

۱۰

۱- مجموعهٔ  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟

ابتدا عضوهای هر مجموعه را مشخص می‌کنیم:

$$B = \{x \mid x \in A, x^2 \leq 2\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{x \mid x \in A, -1 \leq x \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$D = \{x \mid x \in A, x^4 = 1\} = \{-1, 1\}$$

طبق عضوهای سه مجموعه واضح است که دو مجموعه  $B$  و  $C$  با هم برابرند. یعنی  $B = C$ . اما  $D \neq B$  و  $D \neq C$ .

۲- سه مجموعه مانند  $A$  و  $B$  و  $C$  بنویسید به طوری که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  و آیا می‌توان نتیجه گرفت  $A \subseteq C$ ؟

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بله با توجه به سه مجموعه  $A$  و  $B$  و  $C$  می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$ ، آنگاه حتماً  $A \subseteq C$ .

۳- تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x+1=3\}$

$2x+1=3 \Rightarrow 2x=3-1 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow A = \{1\}$

با توجه به مجموعه  $A$  زیرمجموعه‌های آن عبارتند از:  $A, \emptyset$ .

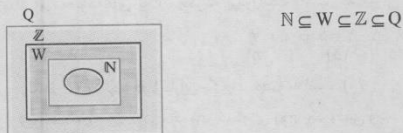
ب)  $B = \{0, 2, 6\}$

$B = \{2x \mid x = 0, 2, 3\}$

زیرمجموعه‌های  $B$  عبارتند از:

$\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{6\}, \{0, 2\}, \{0, 6\}, \{2, 6\}, \{0, 2, 6\}$

۴- نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های  $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Z}$  را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری کنید و با علامت  $\subseteq$  با هم مقایسه کنید.



۵- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:

- الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. نادرست است. زیرا  $\frac{1}{2}$  عددی گویاست که در مجموعه عددهای حسابی نیست.
- ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. درست است. زیرا هر عدد حسابی  $a$  به صورت  $\frac{a}{1}$  قابل نوشتن است، پس گویا نیز هست.
- ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. درست است. زیرا هر عدد صحیح  $a$  به صورت  $\frac{a}{1}$  قابل نوشتن است، پس گویا نیز هست.
- د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. عددهای گویایی که در آن‌ها صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، عدد صحیح هستند.

### ارزشیابی مستمر

۱- مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  با کدام مجموعه برابر است؟ (۱ نمره)

الف)  $B = \left\{ 3^2, \sqrt{9}, 2^2, \frac{6}{3} \right\}$       ب)  $C = \left\{ \frac{\sqrt{4}}{2}, (-1)^3, (-2)^2, 3 \right\}$

۲- جای حروف انگلیسی عدد مناسب بنویسید تا تساوی برقرار شود. (۲)

$\left\{ \frac{3}{5}, -\sqrt{16}, \frac{(-2)^2}{9}, A, B \right\} = \left\{ -1, C, D, \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}, (-2)^2 \right\}$

۳- همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه  $A = \{m, n\}$  را بنویسید. (۱)

۴- یک مجموعه  $(n-2)$  عضوی دارای ۳۲ زیرمجموعه است.  $n$  را بیابید. (۱)

۵- آیا هر مجموعه‌ای حداقل دو زیرمجموعه را داراست؟ چرا؟ (۱)

۶- آیا مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی عددهای زوج یک رقمی است؟ چرا؟ (۱)

۷- اگر  $A \subseteq B$  باشد، با رسم یک نمودار ون مناسب وضعیت  $A$  و  $B$  را نشان دهید. (۱)

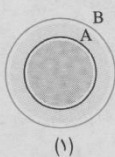
۸- صورت دیگر مجموعه‌های زیر را بنویسید. (با عضوها یا با نمادهای ریاضی) (۲)

$A = \{5x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\} =$

$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} =$

## پاسخ ارزشیابی مستمر

- ۱ این مجموعه با مجموعه (الف) برابر است (۵/۲۵) زیرا  $3^0 = 1$  و  $\sqrt{9} = 3$  و  $2^2 = 4$  و  $\frac{6}{3} = 2$  (۵/۲۵)
- مجموعه A با مجموعه C برابر نیست (۵/۲۵) زیرا  $(-1)^3 = -1$  و این عضو در مجموعه A وجود ندارد در حالی که در مجموعه C وجود دارد. (۵/۲۵)
- ۲  $D=1, C=-4, B=-1, A=4$   
(۵/۵) (۵/۵) (۵/۵) (۵/۵)
- ۳  $(\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{m,n\})$   
(۵/۲۵) (۵/۲۵) (۵/۲۵) (۵/۲۵)
- ۴ می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر است با  $2^k$  که در آن k تعداد عضوهای مجموعه است. پس داریم:  
 $2^{n-2} = 32 \Rightarrow 2^{n-2} = 2^5 \Rightarrow n-2=5 \Rightarrow n=7$   
(۵/۲۵) (۵/۲۵) (۵/۲۵)
- ۵ خیر (۵/۵) - زیرا مجموعه تهی فقط دارای یک زیرمجموعه است. (۵/۵)
- ۶ خیر (۵/۵) - زیرا عددهای ۳ و ۱ در مجموعه عددهای زوج یک رقمی وجود ندارند. (۵/۵)
- ۷ مجموعه عددهای زوج یک رقمی  $= \{2, 4, 6, 8\}$



- (۱)  $A = \{5x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{3, 8, 13, 18, \dots\}$   
(۱)  $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 2\}$

## ۳ اشتراک، اجتماع، تفاضل مجموعه‌ها

مثال: اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{1, 3, 5\}$   $A \cap B$  و  $A \cup B$  و  $A - B$  و  $B - A$  را با عضوهایشان مشخص کنید.

$A \cap B = \{1, 3\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$   
 $A - B = \{2, 4\}$ ,  $B - A = \{5\}$

نکته ۱۹: اگر A یک مجموعه باشد، تعداد عضوهای A را با  $n(A)$  نشان می‌دهیم. مثلاً اگر  $A = \{a, b\}$  در این صورت  $n(A) = 2$ .

مثال: اگر  $A = W - N$  و  $B = Z - Q$  و  $n(A)$  و  $n(B)$  را مشخص کنید.

$$A = W - N \Rightarrow A = \{0\} \Rightarrow n(A) = 1$$

$$B = Z - Q \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow n(B) = 0$$

نکته ۱۶: اگر A و B دو مجموعه باشد، اشتراک دو مجموعه A و B را با نماد  $A \cap B$  نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل همه عضوهای مشترک A و B است.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$

نکته ۱۷: اگر A و B دو مجموعه باشند، اجتماع دو مجموعه A و B را با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل عضوهای است که این اعضا حداقل در یکی از مجموعه‌های A یا B موجود باشند.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$

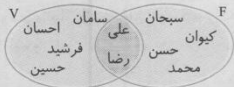
نکته ۱۸: اگر A و B دو مجموعه باشند، تفاضل مجموعه B از مجموعه A را با نماد  $A - B$  نشان می‌دهیم. این مجموعه شامل همه عضوهای از مجموعه A است که در مجموعه B نباشند.

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$



## فعالیت

۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند.  
الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را  $V$  و فوتبال را  $F$  نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش دهید و سپس با عضوهایشان بنویسید.



$$V = \{\text{احسان و حسین و سامان و فرشید و علی}\}$$

$$F = \{\text{علی و محمد و سبحان و حسن و کیوان}\}$$

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید.  
ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند بنویسید.

۲- دو مجموعه  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ب)  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ج)  $\{1, 2, 3\}$  = مجموعه عددهایی که در هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  هست

(این مجموعه را اشتراک  $A$  و  $B$  می‌نامیم و با نماد  $A \cap B$  نشان می‌دهیم.)

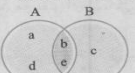
د)  $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  = مجموعه عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه  $A$  و  $B$  هست.

(این مجموعه را اجتماع  $A$  و  $B$  می‌نامیم و با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهیم.)

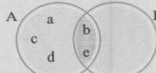
## فعالیت

۱- دو مجموعه  $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$  و  $A \cap B = \{b, e\}$  را در نظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که باتوجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های  $A$  و  $B$  را با نمودار ون نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:

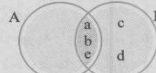
الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموز بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.  
پاسخ حمیده درست است. زیرا طبق این نمودار ون  $b$  و  $c$  به هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  تعلق دارند و همچنین عضوهایی که حداقل عضو یکی از دو مجموعه  $A$  یا  $B$  باشند عبارتند از  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $e$ .



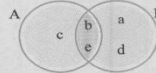
پاسخ حمیده



پاسخ زهرا



پاسخ زهرا



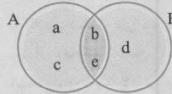
پاسخ حمیده

پاسخ ریحانه درست است. زیرا اولاً  $b$  و  $c$  عضو هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  هستند. ثانیاً عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه  $A$  یا  $B$  متعلق باشند  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $e$  است.

پاسخ زهرا نادرست است. زیرا مجموعه عضوهایی که به هر دو مجموعه  $A$  و  $B$  تعلق دارند عبارت است از  $\{a, b, e\}$ . بنابراین  $A \cap B = \{a, b, e\}$  است که با خواسته مسئله متفاوت است.

پاسخ حنانه درست است. زیرا  $b$  و  $c$  عضوهایی هستند که هم به  $A$  و هم به  $B$  متعلق‌اند. ثانیاً عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه  $A$  یا  $B$  تعلق داشته باشند عبارتند از  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $e$ .

ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.



بله- با مقایسه پاسخ خود و دیگر هم‌کلاسی‌ها مشاهده می‌کنیم که تعداد حالت‌هایی که بتوان A و B را طبق شرایط داده شده تشکیل داد، متنوع است و یک جواب واحد به دست نمی‌آید.

۲- باتوجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد  $V - F$  نمایش می‌دهیم.

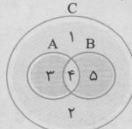
$$V - F = \{\text{حسین و فرشید و سامان و احسان}\}$$

$$F - V = \{\text{محمد و کیوان و حسن و سبحان}\}$$

۱۳

کار در کلاس

۱- باتوجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟



ج)  $C \subseteq (A \cup B)$  نادرست

ب)  $B \subseteq C$  درست

الف)  $A \subseteq C$  درست

و)  $4 \in (A \cap B)$  نادرست

ه)  $4 \in (A \cup B)$  نادرست

د)  $(A \cup B) \subseteq C$  درست

ط)  $4 \in (A \cup B)$  درست

ح)  $5 \in (A \cup B)$  درست

ز)  $A \cup B = A$  نادرست

۲- مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سوالات زیر پاسخ دهید:

مجموعه شمارنده‌های طبیعی ۱۲  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

مجموعه شمارنده‌های طبیعی ۱۸  $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن شمارنده ۱۸ باشد ولی شمارنده ۱۲ نباشد.

$$B - A = \{9, 18\}$$

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوه‌های آن هم شمارنده ۱۲ و هم شمارنده ۱۸ باشند.

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$$

۳- مجموعه‌های  $(Z - N)$ ،  $(N - Z)$  و  $(W - N)$  را تشکیل دهید.

$$Z - N = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

$$N - Z = \emptyset$$

$$W - N = \{0\}$$

۱۴

تمرین

۱- مجموعه‌های  $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$  و  $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$  و  $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$  را در نظر بگیرید: سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

الف)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

ب)  $B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

ج)  $A \cup C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

د)  $A \cap B = \{9\}$

ه)  $A - B = \{2, 4, 6, 8\}$

۱۳

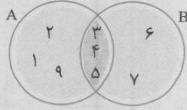
نهم دوره اول متوسطه

موسسه

۱۴۰

- و)  $C - B = \{8, 10, 11\}$   
 ز)  $(A - C) \cup (B - C) = \{2, 4, 6, 9\} \cup \{5, 7, 9\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$   
 ح)  $(A \cup B) - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 7, 8, 10, 11\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$   
 ط)  $A \cap A = \{2, 3, 6, 8, 9\} = A$   
 ی)  $A \cap \emptyset = \emptyset$   
 ک)  $B \cup B = \{1, 5, 7, 3, 9\} = B$   
 ل)  $C \cup \emptyset = \{1, 7, 8, 10, 11\} = C$

۲- باتوجه به نمودار زیر، عبارت های درست را با  $\checkmark$  و گزاره های نادرست را با  $\times$  مشخص کنید:



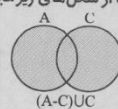
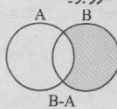
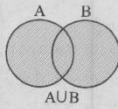
- الف)  $B - A = \{6, 7\}$   $\checkmark$   
 ب)  $(A - B) \cup (A \cap B) = A$   $\checkmark$   
 ج)  $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$   $\times$   
 د)  $n(A \cup B) = 8$   $\checkmark$   
 ه)  $A - B = B - A$   $\times$

و)  $n(B - A) = 2$  و  $n(A - B) = 3$  زیرا  $\times$  .  $n(A - B) = n(B - A)$

۳- کلمات و مجموعه های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

- الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعه اجتماع همان دو مجموعه است.  
 ب) هریک از دو مجموعه A و B زیر مجموعه  $(A \cup B)$  می باشند.  
 ج) اشتراک دو مجموعه A و B زیر مجموعه هریک از دو مجموعه A و B است.  
 د) مجموعه  $A - B$  زیر مجموعه مجموعه A است.  
 ه) اجتماع دو مجموعه  $(B - A)$  و  $(A \cap B)$  مساوی با مجموعه B است.

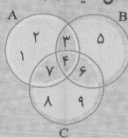
۴- در هریک از شکل های زیر مجموعه مورد نظر را هاشور بزنید.



ارزشیابی مستمر

- ۱- کدام درست و کدام نادرست است؟ (۱/۵ نمره)  
 الف)  $(A \cap B) \subseteq A$  (الف)  $B \subseteq (A \cup B)$  (ب)  $N \cap Q = Q$  (ج)  $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{Q}$  (د)  
 ه)  $W - N = \{0\}$  (ه) و)  $(A \cap B) \subset (A \cup B)$  (و)  
 ۲- اگر  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{-1, -2, 0, 3\}$ ، مجموعه های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید. (۲)  
 الف)  $A \cap B$  (الف)  $A \cup B$  (ب)  $A - B$  (ج)  $B - A$  (د)

۳- اگر  $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 5\}$  و  $B = \{3, 5, 7, 8\}$ ،  $n(A \cup B)$  را تعیین کنید. (۱/۵)



- ۴- باتوجه به نمودار زیر عبارت های درست را با  $\checkmark$  و عبارت های نادرست را با  $\times$  مشخص کنید. (۲)  
 الف)  $A \cap B = \{3\}$  (الف)  
 ب)  $n(A \cap C) = 2$  (ب)  
 ج)  $n(B - C) = n(A - C)$  (ج)  
 د)  $A \cap B \cap C = \{4\}$  (د)

پاسخ ارزشیابی مستمر

- ۱ الف درست (۰/۲۵) ب درست (۰/۲۵) ج نادرست (۰/۲۵) د نادرست (۰/۲۵)  
 ۲ الف  $A \cap B = \{۰, ۳\}$  (۰/۵) ب  $A \cup B = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$  (۰/۵)  
 ج  $A - B = \{۱, ۲, ۴\}$  (۰/۵) د  $B - A = \{-۱, -۲\}$  (۰/۵)

۳  $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$  (۰/۵)  $B = \{۳, ۵, ۷, ۸\}$  (۰/۵)  $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸\}$  (۰/۵)  $n(A \cup B) = ۷$

- ۴ الف نادرست است زیرا:  $A \cap B = \{۳, ۴\}$  (۰/۵)  
 ب درست است. زیرا:  $A \cap C = \{۷, ۴\}$  (۰/۵)  
 ج نادرست است زیرا:  $B - C = \{۳, ۵\}$  و  $A - C = \{۱, ۲, ۳\}$  (۰/۵)  
 د درست است. (۰/۵)

۱۶

نیم دوره اول متوسطه

۴ مجموعه‌ها و احتمال

نکته ۲۱: دو پیشامد A و B را هم‌شانس می‌گوئیم هرگاه احتمال‌های رخداد این پیشامدها یکسان باشد، یعنی  $P(A) = P(B)$

مثال: دو سکه را پرتاب می‌کنیم:  
 الف) احتمال اینکه حداقل یکی از سکه‌ها «رو» بیاید چقدر است؟

$S = \{(ر,ر), (ر,پ), (پ,ر), (پ,پ)\} \rightarrow n(S) = ۴$   
 $A = \{(ر,ر), (ر,پ), (پ,ر)\} \rightarrow n(A) = ۳$   
 $\Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۴}$

ب) احتمال اینکه هر دو سکه با هم «رو» نباشند چقدر است؟  
 $B = \{(ر,ر), (ر,پ), (پ,ر)\} \rightarrow n(B) = ۳$   
 $\Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۴}$

ج) آیا دو پیشامد قسمت «الف» و قسمت «ب» هم‌شانس هستند؟  
 بله، زیرا  $P(A) = P(B)$

نکته ۲۰: اگر A یک پیشامد تصادفی باشد، احتمال رخ دادن پیشامد A را با  $P(A)$  نمایش می‌دهیم و آن را با فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

که در آن  $n(A)$  تعداد عضوهای پیشامد A و  $n(S)$  تعداد کل حالت‌های ممکن برای آن پدیده تصادفی است.

مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم مطلوبست:  
 الف) احتمال اینکه عدد رو شده زوج باشد؟

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$   
 $A = \{۲, ۴, ۶\} \Rightarrow n(A) = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب) احتمال اینکه عدد رو شده کمتر از ۳ باشد؟  
 $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$   
 $A = \{۱, ۲\} \Rightarrow n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

۱۶

فعالیت

با توجه به چرخنده مقابل، همه حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:



$S = \{۱, ۲, ۳\}$

نکته



الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید: پاسخ‌های خود را با هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

- $A = \{3, 1\}$       (عقربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)  
 $B = \{1, 2\}$       عقربه روی عدد ۳ نایستد  
 $C = \{2, 3\}$       عقربه روی عددی اول بایستد  
 $D = \{2\}$       عقربه روی عدد زوج بایستد

ب) هریک از زیرمجموعه‌های  $S$  را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

$$A = \emptyset \Rightarrow n(A) = 0 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{3} = 0$$

$$A = \{1\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$$

$$A = \{2\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$$

$$A = \{3\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$$

$$A = \{2, 3\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{3}$$

$$A = \{1, 3\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{3}$$

$$A = \{1, 2\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{3}$$

$$A = \{1, 2, 3\} = S \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = P(S) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{3} = 1$$

پیشامدهای  $\{1\}$  و  $\{2\}$  و  $\{3\}$  هم‌شانس هستند همچنین سه پیشامد  $\{1, 2\}$  و  $\{1, 3\}$  و  $\{2, 3\}$  نیز هم‌شانس هستند. ج) همه زیرمجموعه‌های  $S$  را تشکیل دهید.

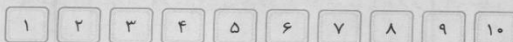
$$S = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} = S$$

۱۶

ریاضی

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعه همه حالت‌های ممکن  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$  است. پیشامد  $A$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعه  $A$  را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

عدد روی کارت کمتر از ۵  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\frac{n(A) = 4}{n(S) = 10} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد،  $\frac{4}{10}$  باشد. پیشامد  $A$  را به این صورت

تعریف می‌کنیم: «عدد روی کارت خارج شده عددی اول باشد»

$$\frac{n(A) = 4}{n(S) = 10} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخداد هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس هستند؟ چرا؟

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow n(B) = 4 \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{10}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\} \rightarrow n(C) = 5 \rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{10}$$

پیشامدهای B و C هم‌شانس نیستند. زیرا احتمال رخداد آنها با هم برابر نیست.

۱۷

تمرین

۱- اگر تاسی را بیاندازیم چقدر احتمال دارد:

- الف) عدد رو شده زوج باشد.  
 ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد.  
 ج) عدد رو شده زوج و اول باشد.  
 د) عدد رو شده از ۳ کم‌تر باشد.  
 وقتی تاسی را می‌اندازیم شش حالت ممکن است اتفاق بیفتد که عبارتند از ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ بنابراین:  
 $n(S) = 6$  و  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الف)  $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ب)  $B = \{4, 6\} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ج)  $C = \{2\} \Rightarrow n(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

د)  $D = \{1, 2\} \Rightarrow n(D) = 2 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د، د، د) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟  
 $S = \{(د، د، د)، (د، د، پ)، (د، پ، د)، (د، پ، پ)، (پ، د، د)، (پ، د، پ)، (پ، پ، د)، (پ، پ، پ)\}$   
 $\Rightarrow n(S) = 8$

پیشامد A را «داشتن دو فرزند دختر» در نظر می‌گیریم:

$$A = \{(پ، د، د)، (د، د، پ)، (د، پ، د)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

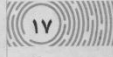
- الف) این مهره آبی باشد.  
 ب) این مهره سبز نباشد.  
 ج) این مهره قرمز یا سبز باشد.  
 اگر سه مهره قرمز را «قرمز ۱، قرمز ۲ و قرمز ۳» و ۴ مهره آبی را «آبی ۱، آبی ۲، آبی ۳ و آبی ۴» و ۵ مهره سبز را «سبز ۱، سبز ۲، سبز ۳، سبز ۴ و سبز ۵» در نظر بگیریم، کل حالت‌های ممکن برای مهره خارج شده عبارت است از:  
 $S = \{س-۱، س-۲، س-۳، س-۴، س-۵، ۱-س، ۲-س، ۳-س، ۴-س، ۱-آ، ۲-آ، ۳-آ، ۴-آ، ۱-ق، ۲-ق، ۳-ق، ۴-ق، ۵-ق\}$   
 $\Rightarrow n(S) = 12$

الف)  $A = \{1-آ، 2-آ، 3-آ، 4-آ\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

ب)  $B = \{1-س، 2-س، 3-س، 4-س، 5-س\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$

ج)  $C = \{1-ق، 2-ق، 3-ق، 4-ق، 5-ق\} \Rightarrow n(C) = 5$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$



نهم دوره اول متوسطه



۴- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد: (اگر مجموعه همه حالات‌های ممکن را S بنامیم،  $n(S) = 36$ )

- (الف) هر دو بار، عدد اول رو شود.  
 (ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد.  
 (ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد.  
 (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.

الف)  $A = \{(2,3), (3,2), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (2,2), (3,3), (5,5)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ب)  $B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow n(B) = 6$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ج)  $C = \{(2,6), (6,2), (3,3), (6,6)\} \Rightarrow n(C) = 4$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

د)  $D = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

### ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۵/۰ نمره)

- «نسبت تعداد حالات‌های مطلوب برای یک پیشامد به تعداد کل حالات‌های ممکن را ..... آن پیشامد می‌گویند.»
- ۲- جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. (۲)
- الف) احتمال آمدن عددی اول در پرتاب یک تاس برابر ..... است.  
 ب) احتمال آمدن دو «رو» در پرتاب دو سکه برابر ..... است.  
 ج) احتمال آمدن مجموع ۳ در پرتاب دو تاس برابر ..... است.  
 د) احتمال آمدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر ..... است.

۳- فرض کنید یک تاس را پرتاب کرده‌ایم. پیشامدهای هم‌شانس را به هم وصل کنید. (۱/۵)

پیشامد زوج	<input type="radio"/>
پیشامد عددی ۱	<input type="radio"/>
پیشامد عدد بزرگ‌تر از ۴	<input type="radio"/>
پیشامد مضرب ۶	<input type="radio"/>
پیشامد عددی بین ۱ و ۴	<input type="radio"/>
پیشامد عددی فرد	<input type="radio"/>

۴- یک تاس را دوبار پرتاب می‌کنیم. احتمالات زیر را حساب کنید. (۳/۵)

الف) احتمال اینکه هر دو بار عددی اول بیاید یا هر دو عدد یکسان باشند.

ب) احتمال اینکه مجموع ۷ باشد و حداقل یکی از عددها، «عدد اول» باشد.

۵- در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره آبی یا قرمز باشد چقدر است؟ (۲/۵)

### پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ احتمال رخ دادن (۵/۰)

- ۲ الف)  $\frac{1}{3}$       ب)  $\frac{1}{4}$       ج)  $\frac{2}{36}$       د) صفر (هر قسمت ۵/۰)

۳

- پیشامد عددی زوج  
پیشامد عدد ۱  
پیشامد عدد بزرگتر از ۴
- پیشامد مضرب ۶ (۰/۵)  
پیشامد عددی بین ۴ و ۵ (۰/۵)  
پیشامد عددی فرد (۰/۵)

۴ الف

$$n(S) = 36 \quad (0/5)$$

$$A = \{(2,2), (3,3), (5,5), (2,3), (3,2), (3,5), (5,3), (1,1), (4,4), (6,6)\} \quad (1)$$

$$\Rightarrow n(A) = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad (0/5)$$

ب

$$B = \{(2,5), (5,2), (3,3), (4,3)\} \quad (0/5)$$

$$n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad (0/5)$$

۵

$$\left. \begin{array}{l} (0/5) \quad n(S) = 4 + 3 + 4 = 11 \\ (1) \quad n(A) = 3 + 4 = 7 \\ \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad \text{آبی قرمز} \end{array} \right\} \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{11} \quad (1)$$

نهم | دوره اول متوسطه

آزمون کشیک

بیت فصل اول

تاریخ: .....

زمت: .....

- ۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
- الف) هر مجموعه ناتهی حداقل دارای ..... زیر مجموعه است.
- ب) اجتماع دو مجموعه  $Z$  و  $W$  مجموعه ..... است.
- ج) احتمال پیشامد «آمدن عدد اول یا عددی فرد» در پرتاب یک تاس ..... است.
- د) اگر مجموعه  $W$  را از مجموعه  $N$  کم کنیم مجموعه ..... به دست می آید.
- ۲- مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که در مجموعه  $A = \{3, a+b\}$  و  $B = \{a, 5\}$  باهم مساوی باشند.
- ۳- هر کدام از عبارت های ستون سمت چپ را به یک عبارت از ستون سمت راست وصل کنید.

$Z - N$	$Q$
$B \cap \emptyset$	صفر
$(A - B) \cup (A \cap B)$	$(A - B) \cup (B - A)$
$(A \cup B) - (A \cap B)$	$\{0, -1, -2, \dots\}$
$P(\emptyset)$	$\emptyset$
$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\}$	$A$
	$\{0\}$

- ۴- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.
- الف) عبارت «همه کتاب های قدیمی کتابخانه مدرسه» یک مجموعه را مشخص می کند.
- ب) مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه هاست.

۱۴۶

۰/۵	۵- اگر $A \subseteq B \subseteq C$ باشد $A$ و $B$ و $C$ را با نمودار ون مشخص کنید.
۱/۵	۶- همه زیر مجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.
۱/۵	۷- مجموعه $A$ را به زبان ریاضی و مجموعه $B$ را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید.
۲	$A = \{7, 8, 9, 10\} =$ <span style="margin-left: 100px;"><math>B = \{2k - 1   k \in W\} =</math></span> ۸- اگر $A = \{1, -1, 2, 0\}$ و $B = \{1, 3, 2\}$ مجموعه‌های زیر را بیابید.
الف) $A \cup B$	ب) $A \cap B$ ج) $A - B$ د) $B - A$

### پایخ آزمون تئوری فصل اول

۱ الف) ۲ (ب)  $Z$  (ج)  $\frac{2}{3}$  (د) تهی (هر مورد ۰/۲۵)

۲  $\begin{cases} A = \{3, a+b\} \\ B = \{a, 5\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a+b=5 \end{cases} \xrightarrow{a=3} 3+b=5 \rightarrow b=2 \quad (0/5)$

۳

$Z - N$ $B \cap \emptyset$ $(A - B) \cup (A \cap B)$ $(A \cup B) - (A \cap B)$ $P(\emptyset)$ $\{\frac{a}{b}   a, b \in Z, b \neq 0\}$		$Q$ صفر $(A - B) \cup (B - A)$ $\{0, -1, -2, \dots\}$ $\emptyset$ $A$ $\{0\}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------

۴ الف) نادرست است. چون کاملاً مشخص نیست عضوهای این مجموعه چه کتاب‌هایی هستند. (یعنی معیار قدیمی بودن یا نبودن یک کتاب مشخص نیست). (ب) درست است. چون مجموعه تهی عضوی ندارد که در مجموعه‌های دیگر وجود نداشته باشد. (۰/۵)

۵

(۰/۵)

۶  $\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \emptyset$  (۱/۵)

۷

۸ هر مورد (۰/۵) نمره

الف)  $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$     ب)  $A \cap B = \{1, 2\}$     ج)  $A - B = \{-1, 0\}$     د)  $\{2\}$



۲ فصل  
عددهای حقیقی

۱ درس  
عددهای گویا

کلیدرسز

روش دوم: (میانگین دو عدد)

$$\frac{2}{5} < \frac{2+3}{5+7} < \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{29}{70} < \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{29}{70} < \frac{59}{140} < \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{29}{70} < \frac{59}{140} < \frac{3}{7}$$

نکته ۵: برای مقایسه چند کسر داده شده، ابتدا برای آنها مخرج مشترک می‌گیریم. سپس صورت کسرها را با هم مقایسه می‌کنیم.

مثال: کسرهایی  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{2}{5}$  را مقایسه کنید.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{10}{40} \\ \frac{3}{4} &= \frac{30}{40} \\ \frac{2}{5} &= \frac{16}{40} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{10}{40} < \frac{16}{40} < \frac{30}{40} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$$

نکته ۶: هرگاه بخواهیم یک عدد کسری را به صورت اعشاری نمایش دهیم، کافی است صورت آن را بر مخرج تقسیم کنیم. در این صورت یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد: الف) تعداد رقم‌های اعشاری مشخص است و به انتها می‌رسد. (مختوم) مثلاً:

$$\frac{2}{5} = 0/4, \frac{3}{4} = 0/75, \frac{1}{8} = 0/125, \frac{1}{2} = 0/5$$

ب) تعداد رقم‌های اعشاری بی‌شمار است و هیچ‌وقت تمام نمی‌شود و رقم‌ها به‌طور متناوب تکرار می‌شود. مثلاً

$$\frac{1}{3} = 0/3333... = 0/\bar{3} \text{ و } \frac{1}{6} = 0/16666... = 0/1\bar{6}$$

$$\frac{1}{33} = 0/212121... = 0/\bar{21}$$

نکته ۷: اگر یک کسر به گونه‌ای باشد که پس از ساده شدن، مخرج آن فقط شمارنده‌های ۲ یا ۵ را داشته باشد، صورت اعشاری آن مختوم است. در غیر این صورت، شکل اعشاری آن متناوب خواهد بود.

مثال: عدد  $\frac{5}{8}$  دارای شکل اعشاری مختوم است و عدد  $\frac{3}{14}$  دارای صورت متناوب است.

نکته ۱: منظور از عبارت  $x < a$  این است که  $x$  هر عددی کوچک‌تر از  $a$  است. و منظور از عبارت  $x \leq a$  این است که  $x$  هر عددی کوچک‌تر از  $a$  یا اینکه مساوی خود  $a$  است. (می‌خوانیم  $x$  کوچک‌تر یا مساوی  $a$ )

نکته ۲: منظور از عبارت  $x > a$  این است که  $x$  هر عددی بزرگ‌تر از  $a$  است و منظور از عبارت  $x \geq a$  این است که  $x$  هر عدد بزرگ‌تر از  $a$  است یا مساوی خود  $a$  است. (می‌خوانیم  $x$  بزرگ‌تر یا مساوی  $a$ )

نکته ۳: وقتی می‌نویسیم  $a < x < b$ ، منظور این است که  $x$  عددی بین  $a$  و  $b$  است. و وقتی می‌نویسیم  $a \leq x \leq b$  منظور این است که  $x$  عددی بین  $a$  و  $b$  است و می‌تواند خود  $a$  و خود  $b$  نیز باشد.

مثال: آیا عدد ۳ عضو مجموعه  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$  است؟ بله. زیرا این مجموعه شامل عددهای صحیح بزرگ‌تر یا مساوی ۳ است.

نکته ۴: برای مشخص کردن یک یا چند عدد گویا بین دو عدد گویای داده شده از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم: الف) برای دو عدد داده شده مخرج مشترک می‌گیریم. سپس این مخرج مشترک را آن قدر بزرگ می‌کنیم تا بین دو عدد واقع در صورت، به تعداد لازم عدد صحیح موجود باشد.

ب) دو عدد گویای داده شده را جمع می‌کنیم و بر ۲ تقسیم می‌کنیم (میانگین دو عدد گویای داده شده را می‌یابیم). این کار را آنقدر انجام می‌دهیم تا به تعداد مورد نیاز عدد گویا بین دو عدد داده شده بیابیم.

مثال: بین دو عدد  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{7}$  دو عدد گویا بنویسید.

روش اول: (مخرج مشترک)

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} &= \frac{14}{35} \text{ صورت و مخرج را } \frac{42}{105} \\ &\text{سه برابر می‌کنیم} \\ \frac{3}{7} &= \frac{15}{35} \text{ صورت و مخرج را } \frac{45}{105} \\ &\text{سه برابر می‌کنیم} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{42}{105} < \frac{44}{105} < \frac{3}{7}$$

نیم (دوره اول متوسطه)

روش دوم

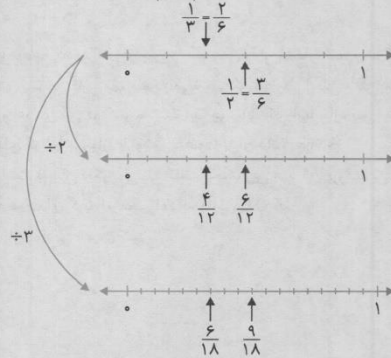
۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی کمتر از ۲	$\{x \in \mathbb{W} \mid x < 2\}$ $\{0, 1, 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۳ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 2\}$ $\{-2, -1, 0, 1\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۱	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -1\}$ $\{0, 1, 2, \dots\}$	

نامساوی  $x \geq 3$  برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟ ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ فقط برای ۳ و ۲ و ۵ درست است. زیرا عددهای (۲) کمتر از ۳ هستند.

۲- می‌خواهیم بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

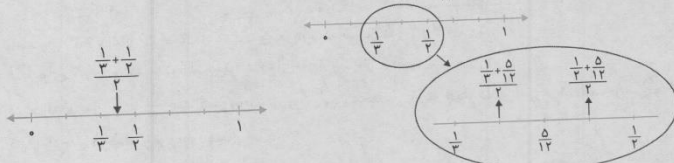
روش مریم: مریم ابتدا هر دو عدد  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  را روی یک محور مشخص کرده است. این دو عدد متناظر با عددهای  $\frac{2}{6}$  و  $\frac{1}{6}$  روی محور هستند. از آنجا که بین ۲ و ۱ عدد طبیعی موجود نیست، او با بیش‌تر کردن تعداد تقسیم‌بندی‌های هر واحد (دو برابر کردن تعداد تقسیم‌بندی‌ها) یک عدد بین آن دو یافته است. (عدد  $\frac{5}{12}$ ) به همین ترتیب با سه برابر کردن تعداد تقسیم‌بندی‌های هر واحد دو عدد بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  پیدا کرده است.



روش بهار: بهار تقریباً همان روش مریم را به کار برده است. با این تفاوت که از محور عددها استفاده نکرده است. او ابتدا برای دو عدد  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  مخرج مشترک گرفته است. سپس با بزرگ‌تر کردن این مخرج مشترک باعث شده صورت دو کسر از هم فاصله پیدا کنند و عددهای بیش‌تری بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  پیدا شود. وقتی مخرج مشترک ۱۲ است یک عدد و وقتی مخرج مشترک ۱۸ است دو عدد بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  وجود دارد.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6} \\ \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} \\ \frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18} \end{array}$$

روش مهناز: مهناز دو عدد  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  را روی محور مشخص کرده است. سپس با پیدا کردن میانگین آنها عددی را بین آنها یافته است ( $\frac{5}{12}$ ). بار دیگر با پیدا کردن میانگین دو عدد  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{12}$  عددی دیگر را پیدا کرده است و با تکرار همین روش، میانگین دو عدد  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{12}$  را یافته تا عدد دیگری را بیاید.



روش عطیه: عطیه تقریباً همان کاری را انجام داده است که مهناز انجام داد. با این تفاوت که از محور استفاده نکرده است. عطیه با جمع کردن  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  و تقسیم کردن حاصل جمع آن‌ها بر دو، میانگین آنها را یافته است که همان عدد  $\frac{5}{12}$  است. با همین روش می‌توان عددی بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{12}$  و عدد دیگری بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{12}$  را یافت.

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{12}}{2} < \frac{5}{12}$$

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار کسر پیدا کرد. اگر روش عطیه را برای یافتن عددی بین دو کسر به کار ببریم، متوجه می‌شویم که این کار (یعنی یافتن میانگین دو کسر) می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و اعدادی بین دو کسر به‌دست آید. چون این کار انتها ندارد پس بیشمار عدد می‌توان یافت.  
ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوهای نشان داد؟ چرا؟ خیر، زیرا بین هر دو عدد گویا بیشمار عدد گویای دیگر موجود است. به بیان دیگر نمی‌توان گفت کوچک‌ترین عدد گویا بزرگ‌ترین عدد گویا چیست.

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ خیر  
د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

کار در کلاس

۱- بین  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{4}$  سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

ابتدا مخرج مشترک دو کسر را یافته و آنها را با آن مخرج می‌نویسیم. یعنی  $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$  و  $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ . حالا کفایت سه عدد بین  $\frac{8}{20}$  و  $\frac{15}{20}$  پیدا کنیم که عبارتند از  $\frac{9}{20}$  و  $\frac{10}{20}$  و  $\frac{11}{20}$ . البته عددهای  $\frac{12}{20}$  و  $\frac{13}{20}$  و  $\frac{14}{20}$  نیز در بین این دو عدد قرار دارند.

۲- بین  $-\frac{1}{4}$  و  $-1$  دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

ابتدا دو عدد را با مخرج مشترک ۲ می‌نویسیم یعنی  $-\frac{1}{4}$  و  $-\frac{2}{4}$  از آنجا که بین  $-1$  و  $-2$  عدد صحیح موجود نیست، صورت و مخرج را سه برابر می‌کنیم تا دو عدد صحیح بین صورت دو کسر ایجاد شود، در این صورت  $-\frac{1}{4} = \frac{-3}{12}$  و  $-\frac{2}{4} = \frac{-6}{12}$ . عددهای  $-\frac{4}{6}$  و  $-\frac{5}{6}$  عددهای مورد نظر هستند.

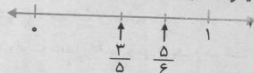
۲۰

### فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  و  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{5}{9}$  را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند باهم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.

روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از

این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟ خیر.



روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید؛ برای به دست آوردن عدد ۳۶۰ کافی است ک.م.م عددهای ۶ و ۵ و ۹ (مخرج‌های چهار کسر) را بیابیم.

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \times 3 \\ 8 = 2^3 \\ 9 = 3^2 \\ 5 = 5^1 \end{array} \right\} \Rightarrow 5, 6, 8, 9 \text{ م.م.م.} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$$

$$\frac{5}{9} = \frac{200}{360} \quad \frac{7}{8} = \frac{315}{360} \quad \frac{5}{6} = \frac{300}{360} \quad \frac{3}{5} = \frac{216}{360}$$

حالا با توجه به این که مخرج‌ها مشترک است، کافی است صورت کسرها را مقایسه کنیم.

$$200 < 216 < 300 < 315 \Rightarrow \frac{5}{9} < \frac{3}{5} < \frac{5}{6} < \frac{7}{8}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.55 \quad \frac{7}{8} = 0.87 \quad \frac{5}{6} = 0.83 \quad \frac{3}{5} = 0.60$$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت و گو کنید.

در روش شاهد ممکن است دانش‌آموز مکان‌های تقریبی درستی را مشخص نکند و اشتباه وجود داشته باشد ولی روش مجید با توجه به کار با ماشین حساب، دقیق‌تر است. و در مورد روش مرتضی نیز ممکن است مخرج مشترک به دست آمده بزرگ شود و امکان محاسبه را سخت کند.

۲- با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهایی زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

$$\frac{1}{9} = 0.11 \quad \frac{7}{6} = 1.16$$

$$\frac{1}{5} = 0.2 \quad \frac{1}{3} = 0.33 \quad \frac{3}{8} = 0.37$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می‌دهد؟ تا ۱۲ رقم.

ب) بین مقادیر اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ در برخی از آنها رقم‌های اعشاری انتها دارد مثل  $\frac{1}{5} = 0/2$  و  $\frac{3}{8} = 0/375$  ولی در برخی دیگر رقم‌های اعشاری تمام نمی‌شود. مثل  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{9}$  و  $\frac{1}{7}$ .

۲۲

کار در کلاس

نمایش اعشاری هریک از کسره‌های زیر را بنویسید:

$$\frac{5}{11} = 0/4545\dots$$

$$\frac{7}{22} = 0/31818\dots$$

$$\frac{7}{9} = 0/777\dots$$

$$\frac{3}{20} = 0/15$$

$$\frac{5}{6} = 0/8333\dots$$

$$\frac{5}{16} = 0/3125$$

اگر به نمایش اعشاری کسره‌های بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسره‌هایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

۲۲

۲۲

تمرین

۱- پس از محاسبه هر قسمت، کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید:

توضیح: عبارت مقابل یک کسر مرکب است که در کتاب درسی حذف شده است. با راهبرد زیر مسئله حل آن را می‌بینید.

$$1 + \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \times \frac{24}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12} \times \frac{1}{1} = \frac{-85}{4}$$

$$1 + \frac{3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$-1 + \frac{3}{4} = \frac{-4+3}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{5 \times 1}{6 \times 8} = \frac{5}{48}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) + \left(-1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{6} + \left(-\frac{10}{9}\right) = -\frac{2}{9} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2} = \frac{17}{6} + \frac{7}{2} = \frac{-17+21}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$-1 - \frac{1}{4} = \frac{-9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{-10}{9}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{48}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4-2+3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{10} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{10-15-10}{20} = \frac{-15}{20} = \frac{-3}{4}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{16}{3}$$

نهم (دوره اول متوسطه)

توسعه



$$\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} + \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{-5}{14} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-3-3+4}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{5} = \frac{-5}{14}$$

$$\frac{-5}{14} \times \frac{7}{5} = \frac{-1}{2}$$

$$-\frac{2}{3} - \frac{3}{3} + \frac{7}{3} = (-2-3+4) + (-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{7}{12}) = -1 + \frac{-6-4+7}{12} = -1 - \frac{3}{12} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} + (\frac{2}{3} - \frac{6}{5}) = \frac{5}{6} - \frac{7}{8} + (-\frac{4}{15}) = \frac{5}{6} + \frac{21}{40} = \frac{100+63}{120} = \frac{163}{120}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$$

$$\frac{-4}{15} \times \frac{21}{40} = \frac{-21}{60}$$

$$\frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} = -1, \quad -1 - (-\frac{3}{4}) = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

الف)  $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -\frac{5}{6}$

از آنجا که عددهای منفی از عددهای مثبت کوچک‌ترند، کافی است، عددهای منفی را با هم و عددهای مثبت را نیز با هم مقایسه کنیم و سپس از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

از میان دو عدد  $-\frac{5}{6}$  و  $-\frac{2}{3}$  واضح است که عدد  $-\frac{2}{3}$  بزرگ‌تر است. زیرا عدد  $-\frac{5}{6}$  سه واحد کامل منفی دارد در حالی که عدد  $-\frac{2}{3}$  هنوز به یک واحد منفی هم نرسیده است. برای مقایسه عددهای  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{3}{4}$  و  $2$  ابتدا مخرج مشترک ۸ را برای آنها در نظر می‌گیریم.

$$\frac{7}{8}, \frac{3}{4} = \frac{6}{8}, 2 = \frac{16}{8} \Rightarrow \frac{6}{8} < \frac{7}{8} < \frac{16}{8} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < 2$$

بنابراین در حالت کلی داریم:

$$-\frac{5}{6} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < 2$$

ب)  $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, 2/75, -\frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

از آنجا که  $\frac{56}{13} = 4\frac{4}{13}$  و  $\frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$  داریم:

$$-\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < \frac{16}{7} < 2/75 < \frac{56}{13} < \frac{3}{5}$$

۴- بین هر دو کسر، سه کسرتنوینید.

الف)  $\frac{10}{11}, \frac{12}{13} \rightarrow \frac{10}{11} = \frac{130}{143}, \frac{12}{13} = \frac{132}{143} = \frac{528}{572} \Rightarrow \frac{10}{11} < \frac{521}{572}, \frac{522}{572}, \frac{523}{572} < \frac{12}{13}$

ب)  $\frac{-1}{3} \rightarrow \frac{-1}{3} < \frac{-1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{-1}{6} < 0$

### ارزشیابی مستمر

۱- کدام گزینه در نامساوی  $x \geq 2$  صدق می‌کند. چرا؟ (۱ نمره)

الف) ۲      ب)  $\frac{1}{3}$       ج)  $-\frac{1}{5}$       د) ۰

۲- با روش هم‌مخرج کردن ۳ عدد گویا بین  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{3}{4}$  بنویسید. (۱/۵)

۳- با روش میانگین گرفتن ۲ عدد گویا بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  بیابید. (۱/۵)

۴- مجموعه عددهای گویا را به زبان ریاضی معرفی کنید و این مجموعه را نامگذاری نمایید. (۱)

۵- کسرهایی  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{4}{7}$  را از چپ به راست از کوچک به بزرگ مرتب کنید. (۱)

۶- بدون تقسیم کردن بگویید کدام یک از کسرهایی زیر نمایش اعشاری مختوم دارد؟ چرا؟ (۱)

الف)  $\frac{12}{25}$       ب)  $\frac{4}{15}$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۳)

الف)  $\left[-2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{5}\right] + (-5\frac{3}{10})$       ب)  $\frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}$

نهم (دوره اول متوسطه)

### پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ گزینه الف) درست است (۰/۲۵). زیرا عبارت  $x \geq 2$  یعنی همگی اعدادی که بزرگ‌تر از ۲ یا مساوی ۲ باشند. در گزینه‌های ب و ج و د همگی عددهای کوچک‌تر از ۲ هستند. (۰/۷۵)

۲ ابتدا دو کسر داده شده را هم‌مخرج می‌کنیم.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{32}{48} \quad \frac{3}{4} = \frac{24}{32} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

۳

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}} = \frac{5}{12} \quad (0/5)$$

۴ مجموعه عددهای گویا را با حرف Q نامگذاری کرده و به صورت زیر معرفی می‌کنند:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \quad (1)$$

۵ ابتدا برای ۳ کسر داده شده مخرج مشترک می‌یابیم:

$$\frac{1}{3} = \frac{25}{75} \quad \frac{2}{5} = \frac{63}{75} \quad \frac{3}{7} = \frac{60}{75} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{2}{5} \quad (0/25)$$

۶ کسر (الف) نمایش اعشاری مختوم دارد ولی کسر (ب) نمایش اعشاری مختوم ندارد (۵/۵) زیرا مخرج کسر  $\frac{12}{25}$  (عدد ۲۵) تنها شمارنده اول ۵ را دارد (۵/۲۵) ولی مخرج کسر  $\frac{4}{15}$  (عدد ۱۵) دارای شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ است (۵/۲۵).

۷ الف 
$$\left[-2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{5}\right] \times \left(-\frac{10}{53}\right) = \left[\frac{-7}{3} - \frac{2}{5}\right] \times \left(-\frac{10}{53}\right) = \frac{-37}{15} \times \left(-\frac{2}{53}\right) = +\frac{74}{795} = +\frac{2}{3} \left(\frac{5}{5}\right)$$

ب 
$$\frac{2 - \frac{1}{3} + 1}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{12-2+3}{3}}{\frac{9-4}{12}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{13}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5} \left(\frac{5}{25}\right)$$

۲۳

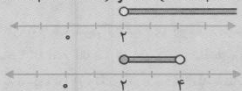
تقریب

## ۲ گنگ عددهای حقیقی

چکیده درس

نکته ۱۲: عددهای حقیقی را می‌توان روی محور نمایش داد. در این صورت این محور را محور عددهای حقیقی می‌گویند. هر قطعه از عددهای حقیقی را توسط یک پاره‌خط یا نیم‌خط مشخص می‌کنیم. اگر نقطه ابتدایی یا انتهایی خودشان جزء این قطعه از عددهای حقیقی باشند، از دایره توپر برای نمایش آنها استفاده می‌کنیم و اگر جزء این قطعه نباشند از دایره توخالی استفاده می‌کنیم.

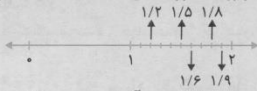
مثال: مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.  
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\}$  و  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$



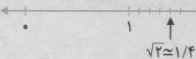
نکته ۸: برخی از عددها مانند  $0.1234567891011\dots$ ،  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{5}$ ،  $\pi$ ، وقتی به صورت اعشاری نوشته می‌شوند، رقم‌های اعشاری آنها تمام نمی‌شود و به صورت متناوب نیز تکرار نمی‌شوند. این عددهای را عددهای گنگ می‌گویند. مجموعه عددهای گنگ را با  $\mathbb{Q}'$  نمایش می‌دهیم. نکته ۹: جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، یک عدد گنگ است مثلاً  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{5}$ ،  $\dots$  اعدادی گنگ هستند. نکته ۱۰: اجتماع عددها گویا و عددهای گنگ را عددهای حقیقی می‌نامند و آن را با  $\mathbb{R}$  نمایش می‌دهند. یعنی  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ . عددهای گویا و عددهای گنگ اشتراک ندارند یعنی  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$ . نکته ۱۱: بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد گنگ و بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

## فعالیت

۱- پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید. عددهای  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{5}$ ،  $\frac{1}{6}$ ،  $\frac{1}{8}$  و  $\frac{1}{9}$



۲- با توجه به اینکه مقدار تقریبی  $\sqrt{2}$  مساوی  $1.414$  است، آن را روی محور نشان دهید.



۳- معلم از دانش‌آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد  $\sqrt{2}$  را بنویسند. با توجه به اینکه دانش‌آموزان از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کردند، تعداد رقم‌هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین حساب‌ها را در زیر می‌بینید. با توجه به آنها به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

1.4142136                      1.414213562  
 1.41421356237

- چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر یا رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد. زیرا در ماشین حساب ۸ رقمی تقریب زدن با روش گرد کردن انجام شده است.
- چرا این تفاوت در ماشین حساب های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی شود؟ زیرا رقم آخر در ماشین حساب ده رقمی با روش گرد کردن تغییری نمی کند. چرا که رقم پس از آن ۳ است.
- با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم های اعشاری دیده می شود؟ خیر هیچ تناوبی دیده نمی شود.
- مقدار تقریبی  $\sqrt{2}$ ، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان داده شده برای  $\sqrt{2}$ ، تناوبی می بینید؟ خیر

کار در کلاس

۲۴

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$Q \cap Q' = \emptyset$  درست

$N \subseteq Q'$  نادرست

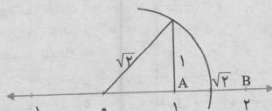
$Z \subseteq Q$  درست

$Z \subseteq Q'$  نادرست

فعالیت

۲۴

- الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می توان نوشت؟ بشمار عدد گویا می توان نوشت.
- ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم، متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور می توان پیدا کرد؟ بشمار نقطه.
- ج) روی محور نقطه نمایش  $\sqrt{2}$  را پیدا کنید.



مثلت قائم الزاویه ای که اضلاع زاویه قائمه آن هر کدام یک واحد باشند، می سازیم. طبق رابطه فیثاغورس وتر این مثلث  $\sqrt{2}$  واحد است.

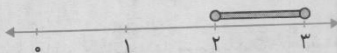
- د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می دهد، آیا همه نقاط پاره خط AB رنگ می شود؟ آیا  $\sqrt{2}$  نیز رنگ می شود؟ آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عدد گویا است، یک پاره خط به وجود می آورد؟ چرا؟ خیر، همه نقاط پاره خط AB رنگ نمی شود. نقطه متناظر با  $\sqrt{2}$  رنگ نمی شود. خیر این نقاط رنگ شده یک پاره خط ایجاد نمی کند. زیرا نقاطی مثل  $\sqrt{2}$  هستند که رنگ نمی شوند. بنابراین یک پاره خط پیوسته ایجاد نمی شود.

کار در کلاس

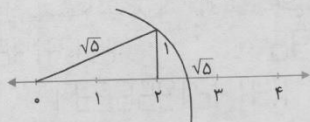
- ۱- بین  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید. چهار عدد  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{8}$  و  $\sqrt{9/1}$  همگی گنگ هستند و همگی بین  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{10}$  قرار دارند.

- ۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید. چهار عدد گنگ عبارتند از:  $\sqrt{8}$  و  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{5}$  زیرا  $2 = \sqrt{4}$  و  $3 = \sqrt{9}$

- ۳- الف) مجموعه A به صورت  $A = \{x \in Q \mid 2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر درست است؟ خیر. زیرا در این بین عددهای گنگ هم هستند که عضو مجموعه A نمی باشند.



ب) نقطه نمایش  $\sqrt{5}$  را روی محور مشخص کنید.



۲۴

نیم دوره اول متوسطه

۱۵۶

۲۵

کار در کلاس

۱- داخل  $\circ$  علامت  $\in$  یا  $\notin$  بگذارید:

$4 \in \mathbb{Z}$	$0/2 \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{18} \in \mathbb{R}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$
$-5 \in \mathbb{R}$	$\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$	$\sqrt{25} \in \mathbb{Q}'$	$\frac{0}{6} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0/09} \in \mathbb{Q}$	$\frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}$

توجه کنید  $\frac{0}{6} = 0$  و  $\sqrt{0/09} = 0/3$  و  $\sqrt{25} = 5$  است.

۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.

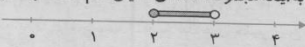


۲۶

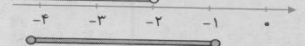
فعالیت

باتوجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$



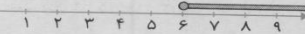
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$



$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$



باتوجه به مجموعه  $A$  چرا نقطه  $2$  روی محور توپرو نقطه  $3$  روی محور توخالی است؟  
 زیرا نقطه  $2$  عضو مجموعه  $A$  است ولی نقطه  $3$  عضو مجموعه  $A$  نیست. (از آنجا که عبارت  $2 \leq 2$  درست است پس عدد  $2$  عضوی از  $A$  است و چون عبارت  $3 < 3$  نادرست است پس عدد  $3$  عضو این مجموعه نیست.)

۲۶

کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا باتوجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:

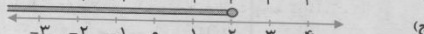
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$



$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$



$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$



۲- باتوجه به سه مجموعه  $A$  و  $B$  و  $C$  در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت  $\checkmark$  مشخص کنید:

$0/75 \in A \checkmark$

$0.252552555 \dots \in B \checkmark$

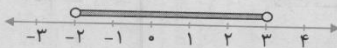
$\sqrt{13} \in A \checkmark$

$\sqrt{2} \in C \times$

$\sqrt{1} \in A \checkmark$

$-1000 \in C \checkmark$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟



(الف)  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(ب)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

(ج)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

مجموعه مشخص شده در قسمت «ج» با مجموعه نقاط روی شکل برابر است.



۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید:

مجموعه اعداد	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$0$	$\pi$	$3/4$	$0.292292229\dots$	$-10$	$6/7$
طبیعی $\mathbb{N}$	x	x	x	x	x	x	x	✓
حسابی $\mathbb{W}$	x	x	✓	x	x	x	x	✓
صحیح $\mathbb{Z}$	x	x	✓	x	x	x	x	✓
گویا $\mathbb{Q}$	x	✓	✓	x	✓	x	✓	✓
گنگ $\mathbb{Q}'$	✓	x	x	✓	x	✓	x	x
حقیقی $\mathbb{R}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید:

الف)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$  ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

در مجموعه A همه عددهای حقیقی بین 1/5 و 5 مورد نظر است اما در مجموعه B فقط عددهای گویای بین عددهای 1/5 تا 5 مورد نظر هستند. پس A شامل عددهای گنگ است ولی B شامل عددهای گنگ نیست.

ب)  $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  ,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

در مجموعه C تنها عددهای صحیح بین 3 و 9 نوشته شده‌اند اما در مجموعه D همه عددهای حقیقی بین 3 و 9 مورد نظر هستند. یعنی مجموعه D شامل عددهای گنگ و گویای بین 3 و 9 نیز هست.

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید:

۱)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$                       ۲)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$                       ۳)  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$                        $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$

۴- عدد  $1 + \sqrt{5}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

روش ۱) از آنجا که  $\sqrt{9} < \sqrt{5} < \sqrt{4}$  پس  $3 < \sqrt{5} < 2$  است. پس  $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$ . یعنی  $1 + \sqrt{5}$  بین دو عدد 3 و 4 قرار دارد.

روش ۲) چون  $\sqrt{5} = 2/2$  ، پس  $1 + \sqrt{5} = 3/2$ . یعنی  $1 + \sqrt{5}$  بین 3 و 4 است.

۵- بین هردو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید:

الف)  $-2, 5 \rightarrow -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$

ب)  $6, 7 \rightarrow \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}$

ج)  $\sqrt{3}, 6 \rightarrow \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}$

د)  $\sqrt{2}, \sqrt{4/1} \rightarrow \sqrt{2/5}, \sqrt{3}, \sqrt{3/2}, \sqrt{3/9}$

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با x مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

۱)  عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. ← مثلاً عدد 1 هم صحیح است و هم گویا است.

۲)  عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد. ← زیرا می‌دانیم  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

۳)  عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. ← مثلاً عدد  $\sqrt{2}$  هم حقیقی است و هم گنگ است.

۴)  عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. ← مثلاً عدد 2 هم طبیعی است و هم حقیقی است.

۷- در نمایش اعشاری عدد  $\sqrt{10}$  و عدد  $3/11$  چه تفاوتی هست؟

ارقام اعشاری عدد  $\sqrt{10}$  بی‌انتها و بدون تناوب هستند. ولی ارقام اعشاری عدد  $3/11$  بی‌انتها و متناوب است.

$$\frac{3}{11} = 0.272727\dots$$

$$\sqrt{10} = 3.162277660168\dots$$

## ارزشیابی مستمر

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (۲ نمره)

الف)  $Q \subseteq Q'$  (الف)  $-\sqrt{3} \in Q$  (ب)  $-\frac{3}{4} \in Q'$  (ج)  $Z \subseteq Q'$  (د)  
 هـ)  $Q \cap Q' = \emptyset$  (هـ)  $N \subseteq Q'$  (و)  $0/1234\dots \in Q'$  (ز)  $0/23 \in Q$  (ح)

۲- عدد  $-\sqrt{21}$  بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ (۵/۵)

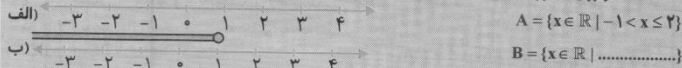
۳- جای خالی را پر کنید. (۲)

الف)  $Q \cup Q' = \dots\dots\dots$  (الف)  
 ب)  $N \cap Q' = \dots\dots\dots$  (ب)  
 ج)  $R - Q = \dots\dots\dots$  (ج)  
 د)  $R \cap Q' = \dots\dots\dots$  (د)

۴- در جای خالی علامت  $\in$  یا  $\notin$  قرار دهید. (۲)

الف)  $-2 \in Z$  (الف)  $-\frac{2}{3} \in Q'$  (ب)  $\sqrt{3} \in R$  (ج)  $\sqrt{0/09} \in Q$  (د)

۵- قسمت الف را روی محور نمایش دهید و قسمت ب را به زبان ریاضی بیان کنید. (۱)



۶- در نمایش اعشاری عدد  $\sqrt{13}$  و  $\frac{3}{7}$  چه تفاوتی در ارقام بعد از ممیز مشاهده می شود؟ (۱)

۷- بین دو عدد  $\sqrt{3}$  و ۳ سه عدد گنگ بنویسید. (۱/۵)

## پاسخ ارزشیابی مستمر

- ۱ الف) نادرست (الف) نادرست (ب) درست (ج) نادرست  
 د) درست (هـ) درست (و) نادرست  
 ز) درست (ح) نادرست (هر قسمت ۵/۲۵)

۲  $16 < 21 < 25 \Rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{21} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{21} < 5 \Rightarrow -5 < -\sqrt{21} < -4$  (۵/۲۵)

- ۳ الف)  $R$  (الف)  $\emptyset$  (ب)  $Q'$  (ج)  $Q'$  (د) (هر قسمت ۵/۵ نمره)  
 ۴ الف)  $\in$  (الف)  $\in$  (ب)  $\in$  (ج)  $\in$  (د) (هر قسمت ۵/۵ نمره)



۶ در نمایش اعشاری  $\sqrt{13}$  بعد از ممیز ارقام بدون تناوب هستند (۵/۵) ولی در نمایش اعشاری  $\frac{3}{7}$  ارقام بعد از ممیز دارای یک تناوب هستند. یعنی ارقام به طور متناوب تکرار می شوند. (۵/۵)

$\sqrt{13} = 3/605551275\dots$   
 $\frac{3}{7} = 0/4285714285\dots$

۷ چون  $(\sqrt{3})^2 = 3$  و  $3^2 = 9$  پس داریم:  
 (۵/۲۵) (۵/۲۵)

۲  $3 < 5,6,7 < 9 \Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7} < 3$  (۵/۵)  
 (۵/۵)

قدر مطلق و محاسبه تقریبی

$$|\sqrt{3}-2| = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2$$

منفی  
 $|\pi-3| = \pi-3$

مثبت  
 $|\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}| = \sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

مثبت  
 نکته ۱۵: با توجه به تعریف جذر، می توانیم این تعریف را به زبان ریاضی به صورت زیر نیز بنویسیم.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

مثال: حاصل جذرهای زیر را بنویسید.

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(\pi-\sqrt{2})^2} = |\pi-\sqrt{2}| = \pi-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(3-\sqrt{10})^2} = |3-\sqrt{10}| = -(3-\sqrt{10}) = -3+\sqrt{10}$$

نکته ۱۶: چند ویژگی مهم قدر مطلق به صورت زیر است:

۱)  $|a| = |-a|$

۲)  $|x| = k \Rightarrow x = k$  یا  $x = -k$

۳)  $|a-b| = |b-a|$

نکته ۱۳: فاصله نقطه متناظر با عدد  $a$  روی محور عددهای حقیقی از مبدأ (نقطه ۰) را قدر مطلق آن عدد حقیقی می گویند و با نماد  $|a|$  نمایش می دهند. بنابراین برای هر عدد حقیقی  $a$  یکی از سه حالت زیر اتفاق می افتد:

۱)  $a > 0 \Rightarrow |a| = a$

۲)  $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$

۳)  $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

مثال: قدر مطلق های زیر را ساده کنید.

$$|\pi| = \pi, |0| = 0, |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, |3| = 3, |-2| = 2$$

نکته ۱۴: برای برخی از محاسبات لازم است مقدار تقریبی عددهای گنگ  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{7}$  را بدانیم. در مورد بقیه عددهای گنگ همین که بدانیم به چه عدد صحیحی نزدیک هستند کافی است.

$$\sqrt{2} = 1/4, \sqrt{3} = 1/7, \sqrt{5} = 2/2, \sqrt{6} = 2/4$$

$$\sqrt{7} = 2/6$$

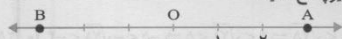
مثال: تساوی های زیر را کامل کنید.

$$|2-\sqrt{2}| = -(2-\sqrt{2}) = -2+\sqrt{2}$$

منفی

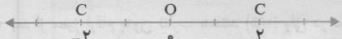
فعالیت ۲۸

۱- با توجه به شکل به سوالات زیر پاسخ دهید:



نقاط A و B چه عددی را نمایش می دهند؟ نقطه A عدد ۳ و نقطه B عدد -۳ را نشان می دهد. فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟ ۳ واحد. فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟ ۳ واحد. می خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد: چند نقطه می توان یافت؟ ۲ نقطه می توان یافت. یکی نقطه متناظر با عدد ۲ و دیگری نقطه متناظر با عدد -۲.



کاردرکلاس ۲۹

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید:

- الف) دو عدد  $a$  و  $b$  مثبت است.  $a > 0, b < 0$
- ب) عدد  $a$  نامنفی است.  $a > 0, b > 0$
- ج) دو عدد  $a$  و  $b$  منفی است.  $a \geq 0$
- د) عدد  $a$  مثبت و عدد  $b$  منفی است.  $a < 0, b < 0$
- ه) عدد  $a$  نامنفی است.  $a \leq 0$

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید:

- الف)  $a > 0, b > 0$  → ۱)  $ab < 0$   
 ب)  $a < 0, b < 0$  → ۲)  $ab > 0, a + b > 0$   
 ج)  $a < 0, b > 0$  → ۳)  $ab > 0, a + b < 0$

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید:

- الف)  $a > 0$  → ۱)  $|a| = -a$   
 ب)  $a > 0, b > 0$  → ۲)  $|a| = a$   
 ج)  $a < 0$  → ۳)  $|a + b| = a + b$   
 د)  $a < 0, b < 0$  → ۴)  $|a + b| = -(a + b)$

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید:

۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد، مساوی یا حاصلضرب قدر مطلق آنهاست.

مثال  $|2 \times (-3)| = |2| \times |-3|$

۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی است.

مثال  $|2 + (-3)| \leq |2| + |-3|$

۳۱

زبان ریاضی

### فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر را یک رقم اعشار نوشته شده است:

$\sqrt{2} = 1/4$        $\sqrt{3} = 1/7$        $\sqrt{5} = 2/2$   
 $\sqrt{6} = 2/4$        $\sqrt{7} = 2/6$        $\sqrt{8} = 2/8$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید:

۱)  $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

دلیل:  $\sqrt{2} = 1/4$  پس  $1 - \sqrt{2}$  عددی منفی می‌شود:

۲)  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

دلیل: چون  $\sqrt{3} = 1/7$  پس  $2 - \sqrt{3}$  عددی مثبت می‌شود.

۳)  $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = -\sqrt{7} + \sqrt{8} = \sqrt{8} - \sqrt{7}$

دلیل: چون  $\sqrt{7} > \sqrt{8}$  پس  $\sqrt{7} - \sqrt{8}$  منفی می‌شود.

۴)  $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}| = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

دلیل: چون  $\sqrt{5} = 2/2$  پس  $2\sqrt{5} = 4/4$  و در نتیجه  $2\sqrt{5} - \sqrt{5}$  مثبت می‌شود.

۵)  $|-4 - \sqrt{3}| = -(-4 - \sqrt{3}) = 4 + \sqrt{3}$

دلیل: چون حاصل جمع دو عدد منفی، عددی منفی است پس عبارت داخل قدر مطلق منفی می‌شود.

۳۰

### فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نتیجه می‌گیریم که جذر مربع هر عدد برابر با قدر مطلق آن عدد است.

۳۱

### کار در کلاس

۱- عبارات‌های زیر را با هم مقایسه کنید:

الف)  $|(-7)^2| \square |-7|^2$       ب)  $|-8 + 5| \square |-8| + |5|$       ج)  $|3 - 9| \square |3| - |9|$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید:

$$|0| = 0 \quad |7^3 - 7^4| = -7^3 + 7^4 \quad (\text{چون } 7^3 < 7^4)$$

$$|\frac{4}{3}| = \frac{4}{3} \quad |0/2^5 - 0/2^6| = 0/2^5 - 0/2^6 \quad (0/2^5 > 0/2^6)$$

یادآوری

اعداد بی‌نهایت صغریک هرچه به توان بیش‌تر برسد کوچک‌تر می‌شوند. اما اعدادهای بیش‌تر از یک هرچه به توان بیش‌تر برسد بزرگ‌تر می‌شوند.

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف  $\sqrt{(-2595)^2} = 2595$   
 ب  $\sqrt{(1394)^2} = 1394$   
 ج  $\sqrt{(-3 + \sqrt{10})^2} = \underbrace{-3 + \sqrt{10}}_{\text{مثبت}} = -3 + \sqrt{10}$  (زیرا  $-3 + \sqrt{10}$  مثبت می‌شود.)  
 د  $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \underbrace{2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}} = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$  (زیرا  $2 - \sqrt{5}$  منفی می‌شود.)

تمرین

۱- اگر  $a = 0/25$ ,  $b = -\frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{1}{4}$  باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$|a+b| + 2|a-b-c| = \left|0/25 + \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + 2\left|0/25 - \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\right| = |0 + 2| - 2| = 0 + 2 \times 2 = 4$$

$$\frac{0/25 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0}{0/25 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید:

الف  $|-3\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$   
 ب  $|\sqrt{7-5\sqrt{3}}| = -(7-5\sqrt{3}) = -7+5\sqrt{3}$   
 ج  $|0 + \sqrt{5}| = |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر. و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید.

۴  $|5-12| > 1 + \boxed{4}$

۴- مقدار عددی عبارت  $|a| + a$  را به ازای  $a = -2$ ,  $a = 0$  و  $a = 2$  به دست آورید. آیا می‌توانید عددی حقیقی به جای  $a$  قرار دهید که حاصل  $|a| + a$  منفی باشد؟ خیر - زیرا حاصل  $|a| + a$  هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

$a = -2 \Rightarrow |-2| + (-2) = 2 + (-2) = 0$        $a = 0 \Rightarrow |0| + 0 = 0 + 0 = 0$

$a = 2 \Rightarrow |2| + 2 = 2 + 2 = 4$

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی  $\sqrt{a^2} = a$  را نشان دهید. فرض کنیم  $a = -3$  باشد. طبق رابطه داده شده داریم:

$\sqrt{(-3)^2} = -3$

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{-3 \times -3} = \sqrt{9} = 3$

در حالی که با محاسبه داریم:

۶- حاصل عبارات روبه‌رو را به دست آورید:

$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \underbrace{|\sqrt{2}-1|}_{\text{مثبت}} = \sqrt{2}-1$

$\sqrt{(1-\sqrt{10})^2} = \underbrace{|1-\sqrt{10}|}_{\text{منفی}} = -(1-\sqrt{10}) = -1 + \sqrt{10}$



## ارزشیابی مستمر

۱- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف)  $a > 0 \Rightarrow |a| = \dots\dots\dots$

ب)  $a = 0 \Rightarrow |a| = \dots\dots\dots$

ج)  $a < 0 \Rightarrow |a| = \dots\dots\dots$

۲- اگر  $a$  عددی نامنفی باشد کدام درست است؟

- الف)  $a$  مثبت است      ب)  $a$  صفر است      ج)  $a$  مثبت یا صفر است      د) هیچکدام

۳- عبارت  $|a| = |a||b|$  را به زبان فارسی بیان کنید.

۴- تساوی‌های زیر را کامل کنید. (۱)

الف)  $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} =$

ب)  $\sqrt{(-35)^2} =$

۵- عبارت زیر را بدون قدرمطلق بنویسید. (۳)

$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - 1| - |-\sqrt{2}| =$

۶- در جای خالی علامت  $<>$  قرار دهید. (۳)

الف)  $7^5 \square 7^6$

ب)  $|-7|^2 \square |(-7)^2|$

ج)  $7^5 \square 7^6$

د)  $0/6^3 \square 0/7^3$

ه)  $|-5| + |2| \square |-5 + 2|$

و)  $|-3| + |-4| \square |-3 - 4|$

## پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) (۰/۵)  $|a| = a$       ب) (۰/۵)  $|a| = 0$       ج) (۰/۵)  $|a| = -a$

۲ گزینه ج) درست است. (۰/۵)

۳ «قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد حقیقی با حاصل ضرب قدرمطلق‌های آن دو عدد برابر است.» (۱)

۴

الف)  $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1-\sqrt{3}| = -1+\sqrt{3}$  (۰/۵)

ب)  $\sqrt{(-35)^2} = |-35| = 35$  (۰/۵)

۵  $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - 1| + |-\sqrt{2}| = -\sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) + \sqrt{2}$  (۱)

منفی      مثبت      منفی

(۰/۲۵)      (۰/۲۵)      (۰/۲۵)

$= -\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} = 1$  (۰/۲۵)

(۱)

۶ هر قسمت این سؤال ۰/۵ نمره)

الف)  $7^5 \square 7^6$

ب)  $|-7|^2 \square |(-7)^2|$

ج)  $7^5 \square 7^6$

د)  $0/6^3 \square 0/7^3$

ه)  $|-5| + |2| \square |-5 + 2|$

و)  $|-3| + |-4| \square |-3 - 4|$

آزمون تئوری

بش فصل دوم ..... زت ..... تاریخ: .....

۱- درون جای خالی علامت  $\in$  یا  $\notin$  قرار دهید.

$\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$        $\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}$        $\frac{3}{5} \in \mathbb{R}$        $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Z}$

۲- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر عدد حقیقی عددی گنگ است.  
 ب) صورت اعشاری عددهای گویا، یا مختوم است یا متناوب.  
 ج) قدر مطلق هر عددی، عددی مثبت می شود.  
 د) عددی وجود دارد که هم گویاست و هم گنگ است.

۳- عبارت «قدر مطلق مجموع دو عدد مختلف علامت از مجموع قدرمطلقهای آن دو عدد کوچک تر است» را به زبان ریاضی بنویسید.

۴- بین دو عدد  $\frac{3}{7}$  و  $\frac{2}{5}$  دو عدد گویا بنویسید.

۵- اعداد  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  و  $0$  و  $-\frac{3}{5}$  را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

۶- مجموعه  $A$  را روی محور نشان دهید و مجموعه  $B$  را به زبان ریاضی مشخص کنید.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$

$B = \{ \quad \}$

۷- آیا رابطه  $|a| > 0$  همواره درست است؟ چرا؟

۸- عبارتهای زیر را بدون قدر مطلق بنویسید. (۲)

الف)  $|-4 \times 3 + 2 + 3 \times \frac{1}{3}|$       ب)  $|2 - \pi|$   
 ج)  $|2 - \sqrt{2}|$       د)  $|\sqrt{3} + \sqrt{2}|$

۹- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$\frac{11}{5} + \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 + (-\frac{1}{3})}$

پنج (درجه اول متوسطه)

### پنج آزمون تئوری فصل دوم

۱ هر مورد (۰/۲۵)

$\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$        $\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}$        $\frac{3}{5} \in \mathbb{R}$        $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Z}$

۲ الف) نادرست (ب) درست (ج) درست (د) نادرست (هر مورد ۰/۲۵)

۳  $ab < 0, |a+b| < |a|+|b|$   
 (۰/۲۵)      (۰/۲۵)

۱۶۴

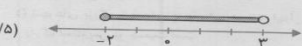
۴

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\Delta} = \frac{14}{35} \times \frac{3}{7} &\rightarrow \frac{2}{\Delta} = \frac{42}{105} \quad (0/25) \\ \frac{3}{\Delta} = \frac{15}{35} \times \frac{3}{7} &\rightarrow \frac{3}{\Delta} = \frac{45}{105} \quad (0/25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{\Delta} < \frac{3}{\Delta} < \frac{4}{\Delta} < \frac{5}{\Delta}$$

۵ مخرج مشترک ۱۰۵ را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{2}{\Delta} < \frac{3}{\Delta} < \frac{4}{\Delta} < \frac{5}{\Delta} \Rightarrow \frac{2}{\Delta} < \frac{3}{\Delta} < \frac{4}{\Delta} < \frac{5}{\Delta}$$

۶

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\} \Rightarrow$$


۷ خیر (۰/۲۵) زیرا اگر  $a = 0$  و یا  $a$  عددی منفی باشد، آنگاه  $a + |a| = 0$ .

۸

الف)  $|-4 \times 2 + 2 + 3 \times \frac{1}{3}| = |-6 + 1| = |-5| = 5 \quad (0/5)$   
 ب)  $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = -2 + \pi \quad (0/5)$   
 ج)  $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2} \quad (0/5)$   
 د)  $|\sqrt{3} + \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad (0/5)$

۹

$$\frac{11}{\Delta} + \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 + (-\frac{1}{3})} = \frac{11}{\Delta} + \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{11}{\Delta} + 1 = \frac{6}{\Delta} \quad (0/5)$$

$$3 - \frac{1}{3} = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3} \quad (0/5)$$

$$3 + (-\frac{1}{3}) = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3} \quad (0/5)$$

۱۶۵

## فصل ۲ استدلال و اثبات در هندسه

### ۱- اثبات استدلال

کلیدزیر:

همنشیتی دو مثلث کافی نیست.  
 مثال: کدام استدلال درست و کدام نادرست است؟  
 الف) اگر باران ببارد زمین خیس می‌شود. زمین خیس نیست پس باران نباریده است.  
 ب) همه سکه‌هایی که من پرتاب کردم «رو» آمدند. پس سکه بعدی هم که پرتاب خواهم کرد حتماً «رو» می‌آید.  
 ج) هر مربع یک متوازی الاضلاع است. پس در متوازی‌الاضلاع‌ها هر چهار ضلع برابرند.  
 د) شهرهای بزرگ شهرهای پرجمعیتی هستند. تهران شهری بزرگ است پس پر جمعیت است.  
 در موارد فوق الف و د استدلال‌هایی درست هستند و ب و ج نادرست هستند.  
 نکته ۳: مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی یا یک ادعا نادرست است را مثال نقض می‌گوییم.

نکته ۱: دلیل آوردن برای معلوم شدن یک موضوع مجهول، با استفاده از داشته‌های درست قبلی را استدلال می‌گویند.  
 نکته ۲: استدلالی که درستی یک موضوع را نتیجه بدهد اثبات نامیده می‌شود.  
 نکته ۳: استفاده حواس پنجگانه برای استدلال در ریاضیات کافی نیست و باید استدلال براساس داشته‌های قبلی ما که مورد قبول هستند، صورت پذیرد.  
 مثال: اگر چند مثلث رسم کنیم و سپس ارتفاع‌های آن‌ها را بکشیم و محل تقاطع ارتفاع‌های همه آنها درون مثلث‌ها قرار گیرد، باز هم به طور قطع نمی‌توان گفت که محل برخورد همه ارتفاع‌های مثلث درون مثلث است.  
 مثال: اگر با استفاده از چشم بگوییم دو شکل همنهشت هستند، درست نیست. چون حواس در استدلال ریاضی کارایی ندارند. همین‌طور اندازه‌گیری برای ایجاد اطمینان از

۳۳  
 نیم دوره اول متوسطه

### فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید:

- ۱- امیر و محسن برای دیدن یک مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»  
 آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ خیر، درست نیست. زیرا همیشه نمی‌توان از روی نتایج گذشته یک قانون کلی برای آینده بیان کرد. چرا که همه شرایطی که در گذشته بوده است، ثابت باقی نمانده‌اند.
- ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

سانتی‌متر مربع  $4 \times 8 = 32$  = مساحت بیسکویت عباس

سانتی‌متر مربع  $6 \times 6 = 36$  = مساحت بیسکویت باقر

چون هر دو بیسکویت از یک نوع هستند و مساحت بیسکویت باقر بیشتر از مساحت بیسکویت عباس است پس، مقدار بیسکویت باقر بیشتر است.

- ۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است. دلیلی که محسن آورده بود چندان معتبر نیست. اما دلیلی که ما در فعالیت ۲ آوردیم به خاطر آنکه براساس دانش ریاضی بود و درستی آن از قبل پذیرفته شده است، قابل اطمینان‌تر است.

۳۳

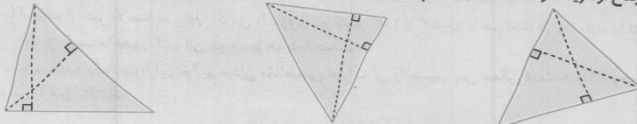
### کار در کلاس

- ۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی باتوجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست. شخصی ده بار سکه‌ای را پرتاب کرده است که هر ده بار «رو» آمده است. او نتیجه می‌گیرد که بار یازدهم نیز باید سکه «رو» بیاید.

شخصی هر بار هندوانه خریده است، درون هندوانه سرخ بوده است. ادعا می‌کند اگر این بار هم هندوانه بخرد درون آن سرخ خواهد بود.

شخصی پنج بار متوالی که با اتومبیل خود از خانه خارج شده است، دچار سانحه رانندگی شده است. نتیجه‌گیری می‌کند که حتماً فردا نیز اگر با اتومبیل از خانه خارج شود، تصادف خواهد کرد.

۲- دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید:



۳۴  
توجه

آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند. خیر - مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس زاویه قائمه است. و یا در مثلث‌هایی که دارای یک زاویه باز هستند، نقطه برخورد ارتفاع‌ها بیرون از مثلث است.



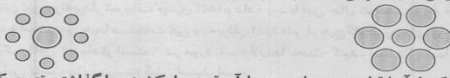
اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟ این فرد مشابه استدلال محسن در فعالیت شماره یک استدلال کرده است.

۳۴

### فعالیت

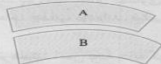
۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟

الف) یا مشاهده تشخیص دهید. قرص سمت چپ بزرگ‌تر به نظر می‌رسد.



ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازه آنها را با هم مقایسه کنید. با این کار متوجه می‌شویم که هر دو قرص به یک اندازه هستند.

۲- اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی مورد علاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟) قطعه B را انتخاب می‌کنم زیرا بزرگ به نظر می‌آید.



با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ با استفاده از کاغذ شفاف و عمل انطباق متوجه می‌شویم که دو قطعه با هم برابرند.

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

خیر، زیرا مشاهده و استفاده از حس‌های پنج‌گانه در برخی موارد با خطا و اشتباه همراه است.



۳۵

## کار در کلاس

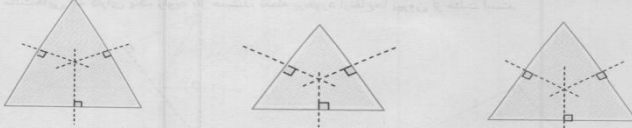
مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایج که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید.

- گوش‌ها قابلیت شنیدن صدای برخی از موجودات (مثل مورچه) را ندارد. بنابراین ممکن است ما فکر کنیم، مورچه‌ها صدایی از خود منتشر نمی‌کنند.
- با استفاده از حس لامسه نمی‌توان گرمی یا سردی دو جسم که ۲ یا ۳ درجه با هم اختلاف دما دارند را تشخیص داد و ممکن است ما تصور کنیم این دو جسم هم دما هستند.
- ما با مشاهده یک آهنربا نمی‌توانیم میدان مغناطیسی اطراف آن را ببینیم. پس ممکن است هیچگاه وجود چنین میدانی را قبول نکنیم.

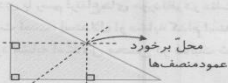
۳۵

## تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمود منصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید:



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمود منصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟  
خیر - با ارائه یک مثال نقض نشان می‌دهیم که این نتیجه‌گیری نادرست است. مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد عمود منصف‌ها روی ضلع بزرگ‌تر (وتر) می‌باشد و درون مثلث نیست.



۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلوگی را داشت. آن‌ها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند. نیما: زیرا هفته پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنه ۹۰ کیلوگی را بلند کند. پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است. استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید. استدلال نیما معتبرتر است. استدلال براساس دانسته‌های درست قبلی استوار است.

۳- چون من تا به حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.  
این استدلال مشابه کدام یک از استدلال‌های زیر است؟ قسمت ج، زیرا در این مورد هم مانند استدلال صورت سؤال از مجموعه معدودی اطلاعات، یک نتیجه‌گیری کلی انجام شده است.

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.  
ب) همه فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود، پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچه خاله کوچکم هم دختر خواهد بود.

د) چون همه قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دونفر درباره چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نرافتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

۳۵

نیم دوره اول متوسطه

اولی: در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند. دومی: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است. استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید. استدلال دومی درست است. نفر اول همه خانواده‌های ممکن را ندیده و از روی تعداد محدودی خانواده استدلال کرده است. پس معتبر نیست. ولی استدلال نفر دوم براساس معیارهای درست و منطقی انجام شده است که به زمان و مکان بستگی ندارد و محدودیت نیز ندارد.

### ارزشیابی مستمر

- ۱- جای خالی را پر کنید. (۱ نمره)  
« ..... یعنی دلیل آوردن برای موضوعی که برای ما مجهول بوده است.»
- ۲- کدام استدلال درست است؟ (۲)  
(الف) چون همه فرزندان عموی من پسر هستند پس فرزند بعدی آن‌ها نیز پسر خواهد بود.  
(ب) چون در همه مثلث‌ها مجموع زاویه‌های داخلی  $180^\circ$  است پس در مثلث‌های قائم‌الزاویه نیز مجموع زاویه‌های داخلی  $180^\circ$  است.  
(ج) اگر قد  $A$  از  $B$  بلندتر باشد و قد  $B$  از  $C$  بلندتر باشد آنگاه قد  $A$  از  $C$  بلندتر است.  
(د) اگر  $A = B$  و  $A = C$  باشد، آنگاه  $B = C$  است.
- ۳- آیا با استفاده از حواس پنجگانه برای استدلال به طول کامل می‌توان اطمینان کرد؟ (۱)

### پاسخ ارزشیابی مستمر

- ۱- استدلال (۵/۵) - معلوم شدن (۵/۵) ۲ الف نادرست (۵/۵) ب درست (۵/۵) ج درست (۵/۵) د درست (۵/۵)
- ۳ خیر به طور کامل نمی‌توان اطمینان کرد زیرا حواس پنجگانه در بسیاری از موارد با خطا عمل می‌کنند. (۱)

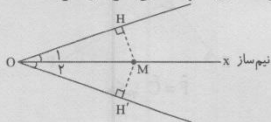
### آشنایی با اثبات در هندسه

نکته ۷: «دو شیء مساوی با یک شیء خودشان با هم برابرند». این مطلب یکی از حقایق پذیرفته شده است که می‌توانیم از آن برای استدلال استفاده کنیم. به زبان ریاضی:  

$$\left. \begin{matrix} A = B \\ C = B \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = C$$

نکته ۸: هنگامی که می‌خواهیم موضوعی را برای هر عضو از یک مجموعه ثابت کنیم، کافی است ابتدا یک عضو دلخواه از آن مجموعه را انتخاب کرده و مطلب را برای آن ثابت کنیم. سپس با توجه به اینکه همه اعضای آن مجموعه تمام ویژگی‌های آن عضو دلخواه را دارند مطلب را برای تمام اعضای آن مجموعه تعیین کنیم.

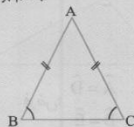
مثال: ثابت کنید فاصله هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.  
 اثبات: نقطه دلخواه  $M$  را روی نیم‌ساز زاویه  $O$  ( $OX$ ) انتخاب می‌کنیم. از آن دو عمود بر ضلع‌های زاویه  $O$  رسم می‌کنیم تا در تقاطع‌های  $H$  و  $H'$  این ضلع‌ها را قطع کند.



نکته ۵: در یک مسئله به اطلاعاتی که مسئله به ما داده است فرض گفته می‌شود و خواسته مسئله را حکم می‌نامند.  
 نکته ۶: برای اثبات در هندسه باید از فرض‌ها و همچنین حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم است استفاده کنیم و به خواسته مسئله برسیم.

مثال: فرض و حکم را در مسئله زیر مشخص کنید و سپس آن‌ها را به زبان ریاضی بنویسید. «در هر مثلث متساوی الساقین، زاویه‌های مجاور قاعده برابرند.»

فرض	مثلث $ABC$ متساوی الساقین است.	$AB = AC$
حکم	زاویه‌های مجاور قاعده برابرند.	$\hat{B} = \hat{C}$



(فرض)  $AC = AB$   
 (مشترک)  $AP = AP$   
 (نیمساز)  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$\Delta APC = \Delta APB \Rightarrow PC = PB$

(مشترک)  $MO = MO$   
 (نیمساز)  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

اجزای متناظر  $\Delta OHM \cong \Delta O'H'M \Rightarrow HM = H'M$

فاصله M از دو ضلع زاویه برابر است.  
 چون این مطلب را برای نقطه دلخواه M ثابت کردیم و بقیه نقاط روی نیمساز هم با این نقطه از نظر ویژگی‌ها تفاوتی ندارند، پس این مطلب برای هر نقطه از نیمساز درست است.  
 مثال: در شکل مقابل نشان دهید مثلث PBC متساوی الساقین است. (AD نیمساز زاویه A است.)

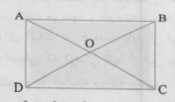
۳۷ فعالیت



۱- به گفت و گوی زیر توجه کنید:  
 مهرداد: آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو باهم برابر است؟  
 سعید: بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، باهم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را زیر کامل کنید:  
 فرض: شکل لوزی است حکم: زاویه‌های روبه‌رو برابر است.  
 استدلال:

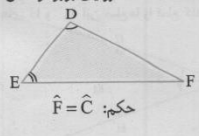
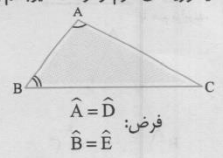
در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند  $\Rightarrow$  لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است.  
 در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو برابر است.  
 ۲- اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید:



فرض: ABCD مستطیل است.  
 حکم: قطرهای مستطیل، مساوی است.  
 فرض:  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$   
 $AB = DC$   $AD = BC$  و حکم:  $AC = BD$   
 $AB \parallel DC$   $AD \parallel BC$

۳۸ کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید:  
 ۱- در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز باهم برابر است.



بیم (دوره اول متوسطه)

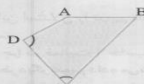
۱۷۰

۲- اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است. از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.



فرض:  $\hat{A} > \hat{C}$   
حکم:  $BC > AB$

۳- اگر مجموع دو زاویه از چهار ضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهار ضلعی EFGH برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابر است.



فرض:  $\hat{D} + \hat{C} = \hat{F} + \hat{H}$



حکم:  $\hat{A} + \hat{B} = \hat{E} + \hat{G}$

۳۹

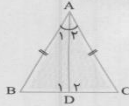
بازی

۳۹

فعالیت

۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید:

مثلث ABC متساوی‌الساقین است و AD نیمساز زاویه A است. ثابت کنید AD میانه نیز هست:



فرض: AD نیمساز زاویه A از مثلث متساوی‌الساقین ABC است.  
حکم:  $BD = DC$

استدلال: چون AD نیمساز زاویه A است پس  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$  و ضلع AD در دو مثلث مشترک است. پس مثلث‌های ADB و ADC به حالت دو زاویه بین (ض ز) با هم هم‌نهشتند. پس اجزای متناظر آنها برابر است، در نتیجه:  $BD = DC$ .

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی‌الساقین نیم‌ساز وارد بر قاعده، میانه هم هست. آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیم‌ساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیم‌ساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد.

نادرستی این استدلال در آنجاست که از نیم‌ساز بودن AD، نتیجه شده است  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ . در حالی که AD نیم‌ساز زاویه A است و فقط می‌توان از آن نتیجه گرفت  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ .

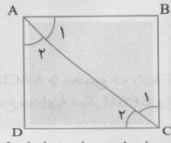
اصلاح استدلال: چون AD نیم‌ساز زاویه A است پس  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ . از طرفی چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است پس ساق‌های آن برابرند یعنی  $AB = AC$ . همچنین AD ضلع مشترک دو مثلث است. پس دو مثلث ADB و ADC بنا بر حالت (ض ز ض) با هم برابرند. پس اجزای متناظر آنها نیز برابرند و در نتیجه  $BD = DC$ . پس AD میانه وارد بر BC است.

خیر - نمی‌توان نتیجه گرفت که نیم‌ساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است. زیرا زاویه B همان شرایط زاویه A را ندارد. (زاویه رأس نیست) پس نمی‌توان خصوصیات A را برای B نیز تعمیم داد.

۲- با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است.

چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت است، زوایای متناظر با هم برابر است؛ بنابراین

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$  و لذا AC نیمساز است. آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

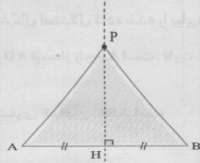


بله می‌توان این استدلال را تعمیم داد. زیرا همان فرض‌ها و شرایطی که برای قطر AC برقرار است برای قطر BD نیز برقرار است.

۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت مورد نظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود. اما در فعالیت ۲ خاصیت مورد نظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

زیرا در فعالیت ۱، فرض‌هایی مشابه با آنچه در استدلال به کار برده بودیم برای تعمیم به سایر نیمسازها برقرار نبود، ولی در فعالیت ۲ همه فرض‌های مورد نظر برای قطر دیگر نیز برقرار بود.

۴- نقطه‌ای مانند P روی عمود منصف پاره خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره خط وصل می‌کنیم، چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ض) همنهشت است، نتیجه می‌شود پاره خط‌های PA و PB با هم برابر است.



بنابراین فاصله نقطه P، که روی عمود منصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است. آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمود منصف برقرار است، کافی است؟ بله کافیست. زیرا نقطه P یک نقطه دلخواه روی عمود منصف بود و هر نقطه دیگر نیز همین ویژگی‌های نقطه P را داراست.

#### کار در کلاس

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئله زیر آورده‌اند:

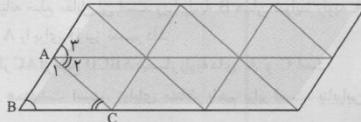
مسئله مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال حامد: حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه  $60^\circ$  است، مجموع زاویه‌های مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آن‌ها را اندازه گرفت و دید که در همه آن‌ها مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

استدلال مهدی: مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های همنهشت تشکیل شده است را کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد:

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$



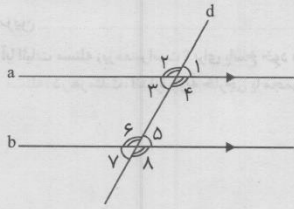
۴۰

نهم (دوره اول متوسطه)

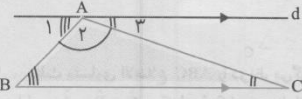
دوره اول



۴۱  
ریاضی



استدلال رضا: رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آن‌ها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند  $\triangle ABC$  را در نظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویه  $\hat{A}$  همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به

عنوان مورب داریم  $\hat{B} = \hat{A}_1$  و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم  $\hat{C} = \hat{A}_3$  پس با جای‌گذاری  $\hat{A}_1$  و  $\hat{A}_3$  به ترتیب به جای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  خواهیم داشت:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$   
استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

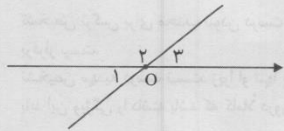
$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

دربارهٔ معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا معتبرتر است. زیرا استدلال حامد فقط برای مثلث متساوی‌الاضلاع است. استدلال حسین با وسایل اندازه‌گیری بوده است و اندازه‌گیری همیشه با خطا همراه است. استدلال‌های مهدی یا اینکه براساس دانسته‌های سال گذشته است اما به طور کامل جزئیات استدلال در آن بیان نشده است.

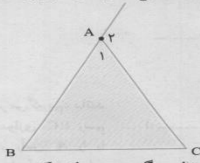
#### ۴۱

**مسئله:** حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید. پول هر دوی آنها با هم برابر است. چرا که مجموع پول هر دوی آنها با پول بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان شده است. بین استدلالی که برای مسئله قبل و مسئله بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟  
در مسئله بعدی نیز مجموع زاویه‌های  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  برابر  $180^\circ$  است و مجموع زاویه‌های  $\hat{O}_2$  و  $\hat{O}_3$  نیز  $180^\circ$  است. یعنی مجموع دو عدد مختلف با یک عدد به‌طور جداگانه مقداری ثابت شده است.  
**مسئله:** نشان دهید زاویه‌های متقابل به‌رأس با هم برابر است.  
فرض کنیم  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_3$  مانند شکل زیر متقابل به‌رأس باشد. داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

۱- آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.  
 مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن برابر است.



اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است و زوایای  $\hat{A}_1$  و  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  هر کدام  $60^\circ$  است. بنابراین

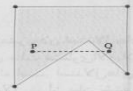
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

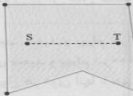
خبر- این اثبات معتبر نیست. زیرا در صورت مسئله گفته شده «در هر مثلث» اما در اثبات، مثلث «متساوی‌الاضلاع» در نظر گرفته شده است که یک حالت خاص است.

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چند ضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد: «یک چند ضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چند ضلعی را به هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که محدب نباشد، مقرر است. آیا تشخیص‌های دو دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چند ضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

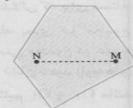
ترکس: چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.



مهديه: چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط S و T درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را به هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.



هریم: چند ضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط N و M درون آن قرار دارد و پاره خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.



تشخیص ترکس برای محدب نبودن درست است. زیرا مثالی ارائه کرده است که شرایط تعریف محدب بودن در آن برقرار نیست.

تشخیص مهديه درست نیست. زیرا او تنها یک پاره خط را در نظر گرفته است درحالی که طبق تعریف هر پاره خطی باید این ویژگی را داشته باشد که کاملاً درون شکل قرار بگیرد.

تشخیص مریم درست است اما دلیلی که ارائه کرده است درست نیست. زیرا در تعریف گفته شده است «هر پاره خط که دو نقطه از درون آن چند ضلعی را به هم وصل کند» اما مریم فقط یک پاره خط را ملاک محذب بودن قرار داده است.

۳- آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.  $\Leftrightarrow$  چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مستطیل است.

این نتیجه‌گیری نادرست است. زیرا هر متوازی‌الاضلاعی مستطیل نیست. به بیان بهتر از مستطیل بودن می‌توان متوازی‌الاضلاع بودن را نتیجه گرفت ولی از متوازی‌الاضلاع بودن نمی‌توان مستطیل بودن را نتیجه‌گیری کرد.

(ب) در هر مربع، ضلع‌ها باهم برابرند.  $\Leftrightarrow$  همه ضلع‌های ABCD، باهم برابر نیستند. ABCD مربع نیست.

این نتیجه‌گیری نادرست است. زیرا در لوزی هم ضلع‌ها با هم برابرند. از آنجا که ABCD مربع نیست ممکن است لوزی باشد و نتیجه‌گیری نابرابر بودن ضلع‌های آن نادرست است.

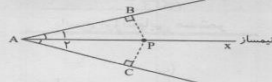
(ج) در هر مربع، ضلع‌ها باهم برابرند. در چهار ضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند.  $\Leftrightarrow$  ABCD مربع نیست.

این نتیجه‌گیری درست است. زیرا یک شرط مربع بودن چهار ضلعی ABCD برابر بودن ضلع‌هایش است و این شرط برقرار نیست.

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه برخط عمود می‌شود. راه‌نمایی: یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم. و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

اثبات: نقطه دلخواه P را روی نیمساز زاویه A در نظر می‌گیریم. سپس از P دو عمود بر اضلاع زاویه A رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه  $\hat{A}BP$  و  $\hat{A}CP$  بنابر حالت وتر و یک زاویه تند همنهشت هستند. زیرا:



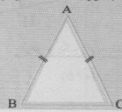
$$\left. \begin{array}{l} AP = AP \text{ (وتر مشترک)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (نیمساز زاویه A است)} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{A}BP \cong \hat{A}CP \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} BP = CP$$

چون  $CP=BP$  است پس فاصله P از دو ضلع زاویه A به یک اندازه است. از آنجا که نقطه P دلخواه بود، پس هر نقطه‌ای روی نیمساز زاویه A می‌تواند باشد. پس این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است.


### ارزشیابی مستقل

۱- در عبارات‌های زیر فرض و حکم را مشخص کنید. (۴ نمره)

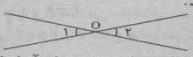
(الف) در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده برابرند.



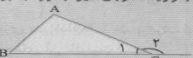
(ب) در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.



(ج) دو زاویه متقابل به رأس با هم برابرند.

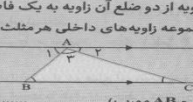


(د) در هر مثلث مجموع دو زاویه داخلی با زاویه خارجی غیرمجاور آنها برابر است.

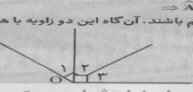


۲- ثابت کنید هر نقطه روی نیم سازه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. (۲)

۳- استدلال زیر را کامل کنید. «مجموعه زاویه‌های داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.»



۴- ثابت کنید اگر دو زاویه دارای یک متمم باشند، آن‌گاه این دو زاویه با هم برابرند. (۱/۵)



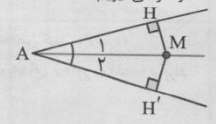
یاسخ ارزشیابی مستمر



نیم (دوره اول متوسطه)

(الف)	مثلث ABC متساوی الساقین است	فرض حکم	(۱)	مثلث ABC متساوی الساقین است	فرض حکم
(ب)	چهارضلعی ABCD مستطیل باشد	فرض حکم	(۱)	چهارضلعی ABCD مستطیل باشد	فرض حکم
(ج)	$O_1$ و $O_2$ متقابل به رأس اند	فرض حکم	(۱)	$O_1 = O_2$	فرض حکم
(د)	مثلث ABC	فرض حکم	(۱)	$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$	فرض حکم

۲ نقطه دلخواه M را روی نیم سازه زاویه A در نظر می‌گیریم.

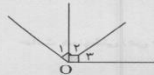


$$\left. \begin{array}{l} AM = AM \text{ (مشترک)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (فرض، نیم‌ساز)} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{(o/د)}]{\text{(و ت و یک زاویه تند)}} \Delta AMH \cong \Delta AMH' \Rightarrow MH = MH' \text{ (o/د)}$$

مدرسه

$$\left. \begin{aligned} (\text{مورب } AB \text{ و } d \parallel d') \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B} \text{ (o/}\delta) \\ (\text{مورب } AC \text{ و } d \parallel d') \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} \text{ (o/}\delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \text{ (o/}\delta)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$



## ۲ همنهشتی مثلث‌ها

۴۴ ریاضی

اثبات: نقطه M را بیرون دایره دلخواهی در نظر می‌گیریم و از آن دو مماس MH و MH' را بر دایره رسم می‌کنیم. باید ثابت کنیم MH = MH'. برای این کار از O دو شعاع OH و OH' را رسم کرده و از M به O وصل می‌کنیم. حال نشان می‌دهیم دو مثلث OHM و OH'M همنهشت هستند.

(وتر و یک ضلع)  $OM = OM$  (مشترک)  
(شعاع)  $OH = OH'$

اجزای متناظر  $\triangle OHM \cong \triangle OH'M \Rightarrow MH = MH'$

مثال: در شکل زیر نشان دهید  $AB = CD$ .



اثبات: نشان می‌دهیم دو مثلث  $\triangle AOB$  و  $\triangle COD$  همنهشت هستند و سپس از اجزای متناظر آنها بهره می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (مقابل به راس)} \\ AO = CO \text{ (شعاع)} \\ BO = DO \text{ (شعاع)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD \Rightarrow AB = CD$$

نکته ۹: برای اثبات همنهشتی دو مثلث کافی است نشان دهیم یکی از حالت‌های زیر برقرار است.

(الف) نشان دهیم سه ضلع مثلث اول با سه ضلع مثلث دوم برابر است. (ضی ضی ضی)

(ب) نشان دهیم دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلث اول با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلث دوم برابر است. (ضی ز ضی)

(ج) نشان دهیم دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث اول با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دوم برابر است. (ز ضی ز)

نکته ۱۰: برای اثبات همنهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه، به جز سه حالت بالا، می‌توان از دو حالت زیر هم استفاده کرد:

(الف) نشان دهیم وتر و یک ضلع از مثلث اول با وتر و یک ضلع از مثلث دوم برابر است.

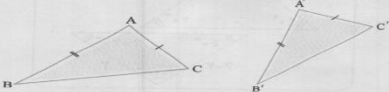
(ب) نشان دهیم وتر و یک زاویه تند از مثلث اول با وتر و یک زاویه تند از مثلث دوم برابر است.

نکته ۱۱: همنهشتی مثلث یکی از اجزای مهمی است که در هندسه برای اثبات برابری دو پارامتر یا دو زاویه از آن استفاده می‌شود. به این ترتیب که ابتدا یک شکل مناسب برای مسئله داده شده رسم می‌کنیم و سپس خواسته مسئله را روی شکل پیدا می‌کنیم و با استفاده از همنهشتی دو مثلث خواسته مسئله را (که در اجزای متناظر به آن می‌رسیم) اثبات می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید اندازه دو مماسی که از نقطه‌ای بیرون دایره، بر دایره رسم می‌شود با هم برابر است.

## یادآوری

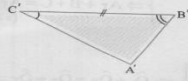
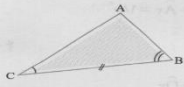
با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه‌نویسی کنیم. مثلاً حالت همنهشتی (ضی ز ضی) را این‌گونه نمایش می‌دهیم:



$$\left. \begin{aligned} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

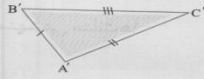
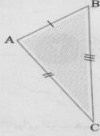


برای یادآوری، دو حالت دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها و دو حالت هم‌نهشتی ویژه مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.



$$\left. \begin{array}{l} BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

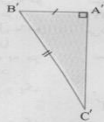
حالت هم‌نهشتی (ض ض ض)



$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

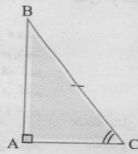
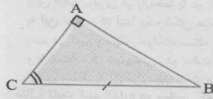
حالت هم‌نهشتی (وتر و یک ضلع)

$$\left. \begin{array}{l} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$



$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array} \right\}$$

حالت هم‌نهشتی (وتر و یک زاویه تند)

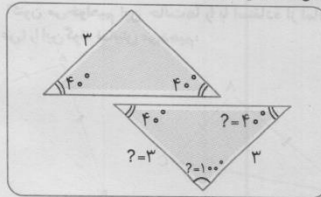
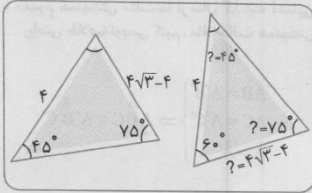


$$\left. \begin{array}{l} BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

۴۴

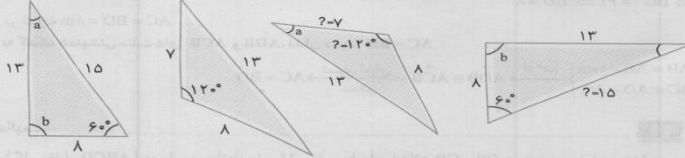
فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:



۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های هم‌نهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید. (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده، با هم مساوی‌اند).

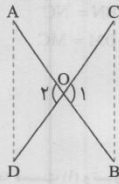
طبق اندازه‌های روی شکل‌ها دو مثلث اول و سوم با هم هم‌نهشت و دو مثلث دوم و چهارم نیز با هم هم‌نهشت هستند.



۴۵

مثال: با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آن‌ها داریم که دو لایهٔ چوبی آن از وسط هم گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که:  $OA = OB$  و  $OC = OD$  و  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  (چرا؟) چون طبق فرض مسئله، دو لایهٔ چوبی آن از وسط هم گذشته‌اند.

حکم این است که:  $AD = BC$ . زوایای  $\hat{O}_1$  و  $\hat{O}_2$  برابرند (چرا؟) چون زاویه‌های متقابل به راس با هم برابرند. پس مثلث‌های  $OAD$  و  $OBC$  هم‌نهشت هستند و از آنجا درستی حکم بدست می‌آید، یعنی:

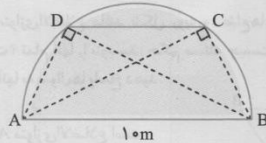


$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC$$

۴۵

فعالیت

در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ۱۰ متر است. ترانه روی پلهٔ C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC = ۶) و شهرزاد روی پلهٔ D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی  $AC = BD$ . درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.



۱- نشان دهید زاویه‌های  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید:  $AC = BD$ .

زاویه‌های  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  به این دلیل قائمه هستند که هر دو زاویه‌هایی محاطی و روبه‌رو به قطر هستند. یعنی زاویه‌های محاطی روبه‌روی کمان  $180^\circ$ . بنابراین طبق ویژگی زاویه‌های محاطی، اندازه آنها نصف کمان روبه‌رویشان است، هر دو باید  $90^\circ$  باشند.

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow AC^2 + 36 = 100$$

$$\Rightarrow AC^2 = 64 \Rightarrow AC = 8m$$

$$BD^2 + AD^2 = AB^2 \Rightarrow BD^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow BD^2 + 36 = 100$$

$$\Rightarrow BD^2 = 64 \Rightarrow BD = 8$$

در نتیجه  $AC = BD = 8m$

۲- به کمک همبستگی مثلث‌های  $ACB$  و  $ADB$ ، نشان دهید  $AC = BD$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AB = 10m \\ BC = AD = 6m \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \xrightarrow{\text{متناظر}} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای}} \triangle ADB \cong \triangle ACB \xrightarrow{\text{متناظر}} AC = BD$$

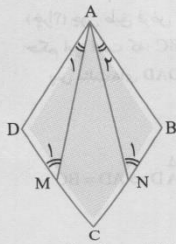
۴۶

فعالیت

در شکل مقابل  $ABCD$  لوزی است و نقطه‌های  $M$  و  $N$  وسط‌های اضلاع  $CD$  و  $CB$  هستند. می‌خواهیم نشان دهیم

$$\triangle ADM \cong \triangle BDN$$

۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:



$$\text{فرض} \left\{ \begin{array}{l} AD = AB = BC = CD, \quad BN = NC \\ \hat{A} = \hat{C}, \hat{B} = \hat{D}, \quad DM = MC \end{array} \right.$$

$$\text{حکم: } \triangle ADM \cong \triangle BDN$$

۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول ثابت کنید مثلث‌های  $ADM$  و  $ABN$  همبسته‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \\ DM = BN \\ \hat{D} = \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle ADM \cong \triangle BDN$$

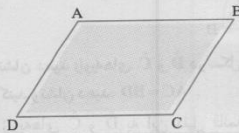
۳- حال با توجه به همبستگی دو مثلث  $ADM$  و  $ABN$  اجزای متناظر آن‌ها را بنویسید.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \quad \hat{M}_1 = \hat{N}_1, \quad AM = AN$$

۴۶

کار در کلاس

می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابر است. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آن‌ها را بنویسید: حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه، نظر چند دانش‌آموز را ببینید و با توجه به آن‌ها به سوال‌ها پاسخ دهید.



فرض	چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.
حکم	$AD=BC$ و $AB=DC$

شبنم: در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می‌توان دید!

۴۶

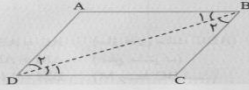
نهم (دوره اول متوسطه)

موضوع

۱۸۰

• آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟

خیر، زیرا گاهی اوقات آنچه توسط چشم دیده می‌شود همراه با خطا و اشتباه است.  
 • به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل، در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را بینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟  
 خیر، در تعریف متوازی‌الاضلاع فقط موازی بودن ضلع‌های مقابل وجود داشت. با اندازه‌گیری هم نمی‌توان درستی یک حکم را ثابت کرد، زیرا عمل اندازه‌گیری همراه با خطا است که این خطا هم از جانب فرد اندازه‌گیری‌کننده است و هم از جانب وسیله اندازه‌گیری.  
 ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم. اما در شکل دو مثلث نداریم. پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرهای دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \text{ , مورب } \angle B_1 = \angle D_1 \\ AD \parallel BC \text{ , مورب } \angle A_1 = \angle C_1 \\ \text{(ضلع مشترک)} \quad BD = BD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (ز ض ض)}$$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث  $ABD$  و  $CBD$  تساوی‌های زیر را کامل کنید.

دیدیم که  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$  ، بنابراین داریم:  $AD = BC$  و  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$  ، بنابراین داریم:  $AB = DC$

• چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ض ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ چون تنها فرض مسئله موازی بودن اضلاع بود و در مورد تساوی اضلاع چیزی نمی‌دانستیم. در واقع تساوی اضلاع چیزی بود که ما باید آن را اثبات می‌کردیم و نمی‌توانستیم از آن استفاده کنیم.

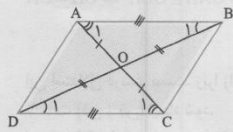
• با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر  $AC$  به دست آوریم؟ بله، زیرا با رسم قطر  $AC$  همان شرایط موجود برای قطر  $BD$  برقرار خواهد بود.

• از هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم درباره زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید: این نتیجه را بنویسید.  
 • در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، مساوی‌اند.

۴۸

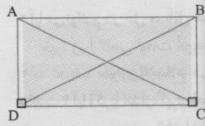
تمرین

۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید:  $OA = OC$  و  $OB = OD$



$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \triangle AOB \cong \triangle COD \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرهای یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)  
 روش اول: دو مثلث  $ADC$  و  $BDC$  هر دو قائم‌الزاویه هستند و ضلع  $DC$  در هر دو مشترک است. از طرفی چون مستطیل  $ABCD$  هم هست پس  $AD = BC$ ، طبق رابطه فیثاغورس داریم:



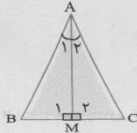
$$\left. \begin{aligned} AD^2 + DC^2 &= AC^2 \\ BC^2 + DC^2 &= BD^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{BC=AD} AC^2 = BD^2 \Rightarrow AC = BD \Rightarrow$$

قطرها برابرند.

روش دوم: چون ABCD یک متوازی الاضلاع هم هست پس  $AD=BC$  داریم:

$$\left. \begin{aligned} AD &= BC \\ DC &= DC \text{ (مشترک)} \\ \hat{D} &= \hat{C} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ADC \cong \Delta BDC \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AC = BD$$

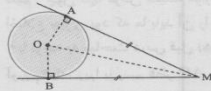
۳- در مثلث متساوی الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده ایم. مثلث های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟ به حالت (ض ض ض). زیرا:



$$\left. \begin{aligned} AC &= AB \text{ (ساق های مثلث ABC)} \\ AM &= AM \text{ (ضلع مشترک)} \\ BM &= MC \text{ (M وسط BC است)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AMB \cong \Delta AMC$$

چرا AM نیمساز زاویه  $\hat{A}$  است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

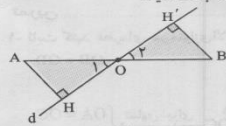
از تساوی اجزای متناظر دو مثلث AMB و AMC نتیجه می گیریم که  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  که نشان می دهد AM نیمساز زاویه A است. همچنین نتیجه می گیریم  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ . از آنجا که  $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$  پس  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ .  
 ۴- از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه های A و B وصل کنید.)  
 می دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ . در دو مثلث قائم الزاویه OAM و OBM داریم:



$$\left. \begin{aligned} OM &= OM \text{ (وتر مشترک)} \\ OA &= OB \text{ (شعاع دایره هستند)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \Delta OAM \cong \Delta OBM$$

تساوی اجزای متناظر  $\Rightarrow AM = BM$  مماس ها با هم برابرند

۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB گذشته و A و B از d به یک فاصله اند ( $AH = BH'$ ) ثابت کنید  $OH = OH'$ . در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی  $OH = OH'$  بحث کنید:



$$\left. \begin{aligned} OA &= OB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 \text{ (مقابل به رأس)} \\ AH &= BH' \text{ (فرض)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow OH = OH'$$

این استدلال درست نیست. زیرا زاویه های  $O_1$  و  $O_2$  بین ضلع های مساوی  $OA = OB$  و  $AH = BH'$  نیستند تا حالت (ض ض ض) ایجاد شود.

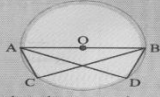
این استدلال را به صورت زیر اصلاح می کنیم: دو مثلث AHO و BHO قائم الزاویه هستند.

$$\left. \begin{aligned} AO &= BO \text{ (فرض)} \\ AH &= BH' \text{ (فرض)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow OH = OH'$$



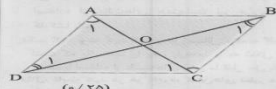
## ارزشیابی مستمر

- ۱- ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. (۲ نمره)
- ۲- ثابت کنید در هر دایره وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم مساوی‌اند. (۲)
- ۳- در شکل مقابل وترهای AC و BD برابرند. ثابت کنید  $BC = AD$ . (۲)



- ۴- ثابت کنید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی یا مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است. (۱/۵)

## پاسخ ارزشیابی مستمر



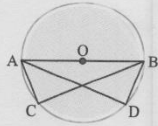
$$\begin{aligned} & \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad (o/5) \\ & \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \quad (o/5) \\ & AD \parallel BC \quad \text{و} \quad AC \text{ مورب} \\ & AB \parallel DC \quad \text{و} \quad BD \text{ مورب} \\ & AD = BC \quad (\text{فرض}) \end{aligned}$$

(قضی)

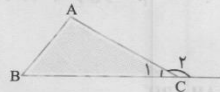
$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \triangle AOD \cong \triangle BOC \Rightarrow \begin{cases} AO = CO \\ BO = DO \end{cases}$  (قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند.  $(o/25)$ )  
 ۲ از مرکز دایره (نقطه O) به نقاط A و B و C و D وصل می‌کنیم. چون دو کمان AB و CD برابرند و هر دو کمان مقابل به زاویه مرکزی هستند پس  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  داریم:



$$\left. \begin{aligned} & AO = CO \quad (\text{شعاع}) \\ & BO = DO \quad (\text{شعاع}) \\ & \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (\text{فرض}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (o/5) \\ & \xrightarrow{(\text{قضی})} \triangle AOB \cong \triangle COD \Rightarrow AB = CD \end{aligned}$$



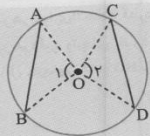
$$\left. \begin{aligned} & AC = BD \quad (\text{فرض}) \\ & \text{روبه‌رو به کمان } 180^\circ \\ & \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \quad (o/25) \\ & AB = AB \quad (\text{مشترک}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \xrightarrow[\text{(o/5)}]{\text{وتر و یک ضلع}} \\ & \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow AD = BC \quad (o/5) \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} & \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180^\circ \quad (o/25) \\ & \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \quad (o/25) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (o/5) \\ & \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_1 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2 \end{aligned}$$

۴ حل مسئله در هندسه

چهار در سر:



حکم:  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$   
 فرض:  $AB = CD$   
 اثبات: از O به دو وترهای AB و CD وصل می‌کنیم.

(فرض)  $AB = CD$   
 (شعاع)  $OA = OC$   
 (شعاع)  $OB = OD$

ض ض ض

$\triangle AOB \cong \triangle COD$  اجزای متناظر  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$   
 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$  زاویه مرکزی هستند

نکته ۱۲: مراحل حل یک مسئله در هندسه را می‌توان به صورت زیر فهرست کرد. اما توجه کنید که برای حل مسائل هندسی راه‌حل کلی وجود ندارد.

گام ۱) صورت مسئله را خوانده و اجزای آنها را به دقت بشناسید.

گام ۲) اگر مسئله دارای شکل نیست، با توجه به داده‌های مسئله برای آن شکل مناسبی را رسم کنید.

گام ۳) با توجه به شکلی که رسم کرده‌اید، فرض و حکم مسئله را به زبان ریاضی مشخص کنید.

گام ۴) حال با استفاده از حقایق و اصولی که درستی آنها را می‌دانید از فرضیات مسئله، حکم مسئله را نتیجه بگیرید.

استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت نیز می‌تواند در این راه کارگشا باشد.

نکته ۱۳: توجه کنید که در حل مسائل هندسه گاهی اوقات لازم است که یک خط یا یک پاره‌خط را به شکل اضافه کنیم تا مسئله با استفاده از دانسته‌های قبلی ما قابل حل باشد.

مثال: ثابت کنید در هر دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.

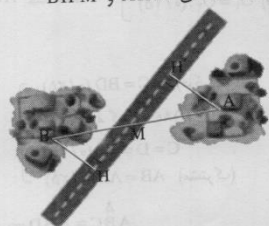
دایره‌ای دلخواه به مرکز O را به همراه دو وتر مساوی AB و CD رسم می‌کنیم.

۵۰

نیم دایره (دایره) (مستوی)

سؤال متن

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آن‌ها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟ مثلث‌های AHM و BH'M



با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

(طبق فرض)  $MA = MB$   
 $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$   
 (متقابل به رأس)  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

$\Rightarrow$  (وتر و یک زاویه حاده)  
 $\triangle AHM \cong \triangle BH'M \Rightarrow AH = BH'$

۱۸۴

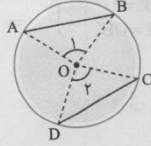
## فعالیت

۵۰

در شکل مقابل وترهای AB و CD باهم مساوی است.

۱- نشان دهید کمان‌های  $\widehat{AB}$  و  $\widehat{CD}$  مساوی است.

از نقطه O به نقاط A و B و C و D وصل می‌کنیم. نشان می‌دهیم دو مثلث AOB و DOC همنهشت هستند.

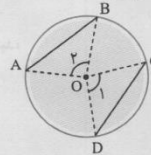


$$\left. \begin{array}{l} \text{(شعاع‌های دایره)} \quad AO = OD \\ \text{(شعاع‌های دایره)} \quad BO = CO \\ \text{(فرض)} \quad AB = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AOB \cong \Delta DOC \Rightarrow \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$$

چون  $\hat{\alpha}_1$  و  $\hat{\alpha}_2$  زاویه‌های مرکزی هستند و می‌دانیم اندازه هر زاویه مرکزی برابر با کمان روبه‌روی آن است پس نتیجه می‌گیریم که  $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ .

۲- در شکل مقابل کمان‌های  $\widehat{AB}$  و  $\widehat{CD}$  مساوی است. نشان دهید وترهای AB و CD باهم برابرند.

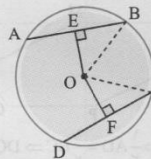
اثبات: از نقطه O بر A و B و C و D وصل می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \text{(شعاع)} \quad \overline{OA} = \overline{OD} \\ \text{(شعاع)} \quad \overline{OB} = \overline{OC} \\ \text{(کمان‌های } \widehat{AB} \text{ و } \widehat{CD} \text{ برابرند)} \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AOB \cong \Delta COD \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

۳- از سال گذشته می‌دانید که خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع،

نشان دهید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

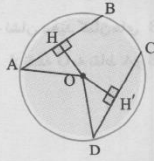


از نقطه O دو پاره‌خط OE و OF را رسم می‌کنیم طوری که در نقاط E و F بر وترهای AB و DC عمود باشند. سپس از O به نقاط B و C وصل می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه OEB و OFC ایجاد شود.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(شعاع‌های دایره هستند)} \quad OB = OC \\ \text{(چون } AB = DC \text{ و } E \text{ و } F \text{ وسط } AB \text{ و } DC \text{ هستند)} \quad EB = FC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \Delta OEB \cong \Delta OFC \Rightarrow OE = OF$$

یعنی فاصله O از AB و DC برابر است.

۴- در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر  $AB$  و  $CD$  به یک فاصله است ( $OH = OH'$ ). مرکز دایره را به  $A$  و  $D$  وصل کنید و با پر کردن جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر  $AB$  و  $CD$  با هم برابر است:



$$\left. \begin{array}{l} OA = OD \text{ (شعاع)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ (فرض) OH = OH' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \triangle OAH \cong \triangle ODH' \Rightarrow AH = DH' \\ \Rightarrow 2AH = 2DH' \Rightarrow AB = CD \end{array}$$

یادآوری

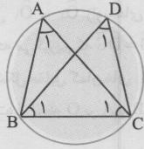
در هر دایره شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند.

۵۱

کار در کلاس

در شکل مقابل می‌دانیم  $AB = CD$

۱- چرا  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟ چون وترهای نظیر این دو کمان با هم برابرند.



۲- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{BC} \end{array} \right\} \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DCB}$$

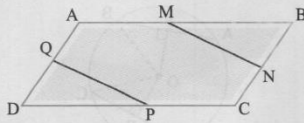
۳- چرا  $AC = BD$ ؟ چون این دو وتر روبه‌روی دو کمان  $\widehat{ABC}$  و  $\widehat{BCD}$  هستند که با هم برابرند.

۵۱

تمرین

۱- در شکل مقابل متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است و  $M$  و  $N$  و  $P$  و  $Q$  وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید:

$$MN = PQ$$



$$(ضلع‌های مقابل متوازی‌الاضلاع) AD = BC \Rightarrow \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC \Rightarrow DQ = BN$$

$$(ضلع‌های مقابل متوازی‌الاضلاع) AB = DC \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC \Rightarrow BM = DP$$

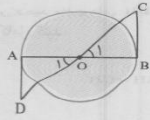
$$\left. \begin{array}{l} MB = DP \\ DQ = BN \\ \hat{D} = \hat{B} \end{array} \right\} \longrightarrow \triangle DQP \cong \triangle BMN \Rightarrow MN = PQ$$

۵۱

نهم (دوره اول متوسطه)

موسسه تخصصی

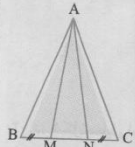
۱۸۶



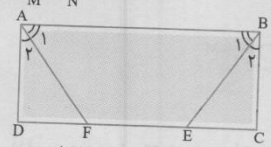
۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است. نشان دهید که AD و BC برابرند. از آنجا که شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث‌های AOD و BOC قائم‌الزاویه‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(ضلع مشترک)} \quad OA = OB \\ \text{(مقابل به رأس)} \quad \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \text{(۹۰° هستند)} \quad \hat{A} = \hat{B} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AOD \cong \triangle BOC \Rightarrow AD = BC$$

۳- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارند که  $BM = NC$ . نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.

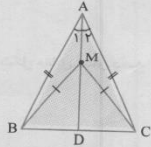


$$\left. \begin{array}{l} \text{(فرض)} \quad AB = AC \\ \text{(زاویه‌های مجاور قاعده در مثلث متساوی‌الساقین)} \quad \hat{B} = \hat{C} \\ \text{(فرض)} \quad BM = CN \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle AMB \cong \triangle ANC \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین است.}$$



۴- در مستطیل ABCD، پاره‌های AF و BE طوری رسم شده‌اند که دو زاویه  $\hat{A}_1$  و  $\hat{B}_1$  برابرند. ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(ضلع مقابل در مستطیل)} \quad AD = BC \\ \text{(چون } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ و } A \text{ و } B \text{ قائمه‌اند)} \quad \hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 90^\circ \\ \hat{B}_2 = \hat{A}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ز)}} \triangle ADF \cong \triangle BCE \Rightarrow AF = BE$$



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس، از دو سر قاعده، برابر است؛  $MB = MC$ .

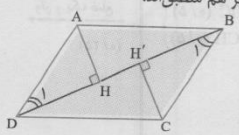
$$\left. \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \text{(ضلع مشترک)} \quad AM = AM \\ \text{(فرض)} \quad AB = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle AMB \cong \triangle AMC \Rightarrow MB = MC$$

چون M نقطه دلخواهی روی نیمساز زاویه رأس بود، پس این استدلال را می‌توان به همه نقاط روی نیمساز زاویه رأس تعمیم داد.

نتیجه: در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه رأس و عمود منصف قاعده بر هم منطبق‌اند.

۶- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است. دلیل برابری دو زاویه  $\hat{B}_1$  و  $\hat{D}_1$  را توضیح دهید.

چون  $BD \parallel AD$  و  $BC \parallel AD$  مورب است پس  $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ .



نشان دهید مثلث‌های  $BCH'$  و  $ADH$  همنهشتند و از آنجا برابری  $AH$  و  $CH'$  را نتیجه بگیرید. سپس جمله زیر را کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \text{(اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع)} \\ \angle B_1 = \angle D_1 \\ \text{(موجب } BC \parallel AD \text{ و } BD \text{ مورب)} \\ H = H' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(و ز)}} \Delta ADH \cong \Delta BCH' \Rightarrow AH = CH'$$

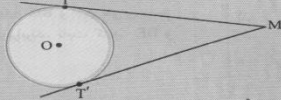
در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو رأس مقابل از قطر بین آنها، به یک فاصله‌اند.

### ارزشیابی مستمر

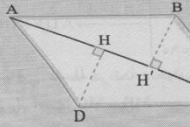
۱- ثابت کنید فاصله دو وتر مساوی در یک دایره از مرکز دایره برابر است. (۲ نمره)



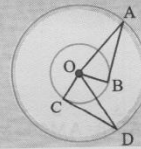
۲- در شکل مقابل نشان دهید  $MT = MT'$ .  $MT'$  و  $MT$  بر دایره مماس‌اند. (۲)



۳- نشان دهید در متوازی‌الاضلاع هر دو رأس مقابل از قطر بین آن‌ها به یک فاصله است. (۲)

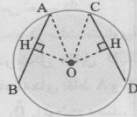


۴- در شکل مقابل نشان دهید  $AB = CD$ . (۲)



### پاسخ ارزشیابی مستمر

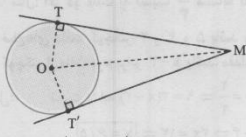
۱ می‌دانیم شعاع عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند. داریم:



$$AOH' \cong COH \Rightarrow OH = OH' \quad (o/25)$$

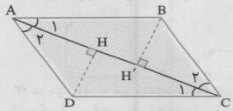
$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \quad (o/5) \\ AH' = CH \quad (o/5) \\ \text{(شعاع)} \\ \text{(فرض } CD = AB) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} (o/25)$$





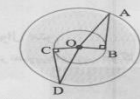
$$\left. \begin{array}{l} (o/\Delta) \quad OT = OT' \text{ (شعاع)} \\ (o/\Delta) \quad OM = OM \text{ (مشترک)} \end{array} \right\} \text{وتر و یک ضلع}$$

$$\Delta OTM \cong \Delta OT'M \Rightarrow MT = MT' \quad (o/\Delta)$$



$$\left. \begin{array}{l} (فرض متوازی الاضلاع) \quad AB = DC \quad (o/\Delta) \\ (مورب) \quad \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad (o/\Delta) \end{array} \right\}$$

$$\Delta ABH' \cong \Delta CDH' \Rightarrow DH = BH' \quad (o/\Delta)$$

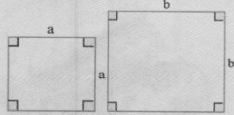


$$\left. \begin{array}{l} (شعاع) \quad OA = OD \quad (o/\Delta) \\ (شعاع) \quad OB = OC \quad (o/\Delta) \end{array} \right\} \text{وتر و یک ضلع} \quad (o/\Delta)$$

$$\Delta ABO \cong \Delta DCO \Rightarrow CD = BA \quad (o/\Delta)$$

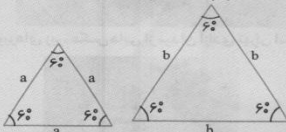
## شکل‌های متشابه

نکته ۱۵: هر دو مربعی با هم متشابه‌اند زیرا اولاً زاویه‌های آنها با هم برابر است و ثانیاً همه ضلع‌ها به یک نسبت کوچک یا بزرگ شده‌اند یعنی بین اضلاع دو شکل تناسب برقرار است.



$$\rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{a}{b}$$

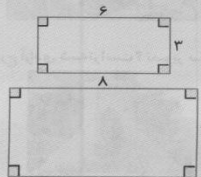
نکته ۱۶: هر دو مثلث متساوی الاضلاع با هم متشابه هستند.



$$\rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{a}{b}$$

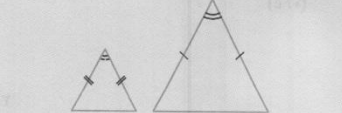
نکته ۱۴: هرگاه دو شکل به گونه‌ای باشند که اندازه زاویه‌های دو شکل با هم برابر باشند و با کوچکتر کردن یا بزرگتر کردن همه ضلع‌ها به یک نسبت در یکی از دو شکل، شکل دیگر به دست آید، می‌گوییم آن دو شکل با هم متشابه هستند. به نسبتی که همه ضلع‌ها به آن نسبت بزرگ یا کوچک شده‌اند، نسبت تشابه می‌گویند.

مثال: در شکل‌های مقابل دو مستطیل به نسبت تشابه  $\frac{3}{4}$  متشابه‌اند.



۳) هر دو مثلث متساوی الساقین با هم متشابه نیستند، زیرا هم ممکن است زاویه‌های دو مثلث برابر نباشند و یا اینکه اضلاع متناسب نباشند.

نکته ۱۸: دو مثلث متساوی الساقین در صورتی متشابه هستند که زاویه راس آن‌ها برابر باشند.



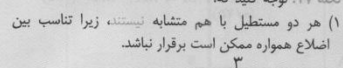
نکته ۱۹: دو مثلث قائم‌الزاویه در صورتی متشابه هستند که یک زاویه حاده برابر داشته باشند.



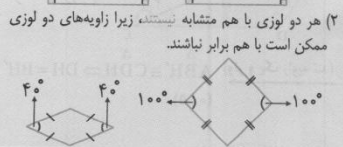
مثال: اگر دو مثلث به نسبت  $\frac{2}{3}$  متشابه باشند و اندازه ضلع‌های مثلث کوچکتر ۳ و ۴ و ۵ باشد و اندازه ضلع کوچکتر از مثلث دوم برابر  $x-2$  باشد، مقدار  $x$  را بیابید:

حل: نسبت تشابه  $2(x-2) = 3 \Rightarrow 2x-4 = 3 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = 3.5$

نکته ۱۷: توجه کنید که: هر دو مستطیل با هم متشابه نیستند، زیرا تناسب بین اضلاع همواره ممکن است برقرار نباشد.

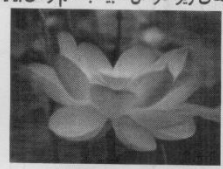
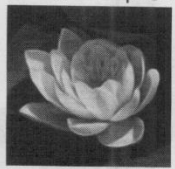


۲) هر دو لوزی با هم متشابه نیستند، زیرا زاویه‌های دو لوزی ممکن است با هم برابر نباشند.



### سوال متن

- در تصویرهای زیر، دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم است؟ خیر



- در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟ دو تصویر شبیه هم هستند ولی یکی با ابعاد کوچک‌تر و دیگری با ابعاد بزرگ‌تر



- تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟ تصویر سمت چپ.

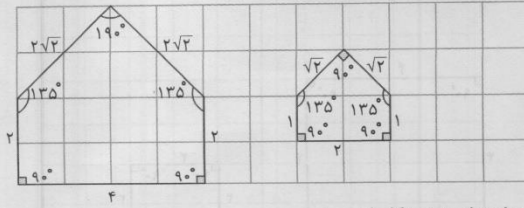


۵۳ نهم (دوره اول متوسطه)

۵۴

فعالیت

۱- مربع‌های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر است:



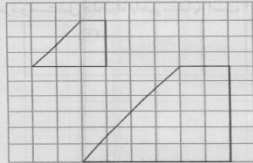
اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید:

چه رابطه‌ای بین ضلع‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ ضلع‌های دو شکل به یک نسبت تغییر کرده‌اند. در واقع اضلاع شکل بزرگتر همگی دو برابر اضلاع شکل کوچکتر است.

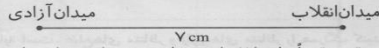
چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ زاویه‌های متناظر دو شکل با هم برابرند.

اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های شکل (۲) است؟ است؟ ۲ برابر

در صفحه شطرنجی مقابل یک چندضلعی رسم کنید و چندضلعی دیگری مانند آن بکشید به طوری که اندازه ضلع‌های ۲ برابر شکل اول باشد.



۲- در تصویر زیر، نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰.۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی برابر است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.



چون فاصله دو میدان روی نقشه تقریباً برابر با ۷ سانتی‌متر است پس طبق مقیاس داریم:

$$\frac{1}{100000} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = 700000 \text{ cm} = 7000 \text{ m} = 7 \text{ km}$$

۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید. با توجه به اینکه عدد روی دستگاه ۵۰٪ است پس طول هر ضلع را نصف می‌کنیم.



۵۵

کار در کلاس

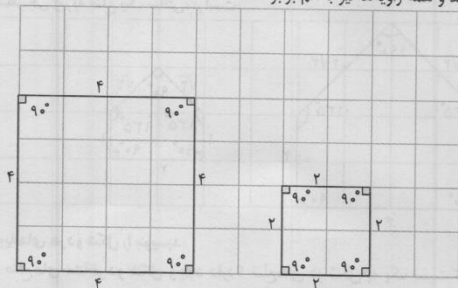
۱- آیا دو مربع زیر متشابه است؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو

شکل وجود دارد؟ بله - زاویه‌های دو شکل با هم برابرند و ضلع به نسبت  $\frac{1}{3}$  تغییر کرده‌اند.

۵۵

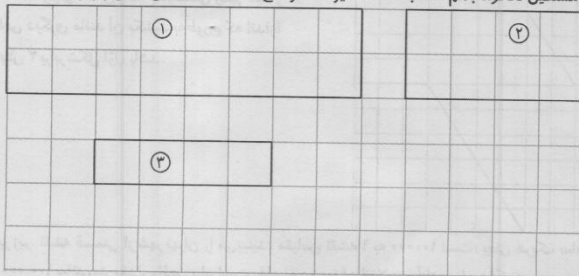
ریاضی

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه باهم متشابهند؟ چرا؟ بله - می‌توان گفت، زیرا در هر دو مربع ضلع‌ها به یک نسبت تغییر می‌کنند و همه زاویه‌ها نیز با هم برابر هستند.



۲- از مستطیل‌های زیر کدام باهم متشابهند؟ چرا؟ مستطیل‌های شکل (۱) و شکل (۳) - چون زاویه‌های آنها با هم برابرند و همه‌ی اضلاع آنها به نسبت  $\frac{1}{3}$  تغییر کرده‌اند.

آیا هر دو مستطیل دلخواه باهم متشابه است؟ خیر. مثلاً واضح است که مستطیل شکل (۱) و (۲) متشابه نیستند.



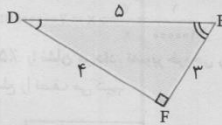
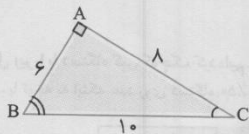
۵۶

نهم (دوره اول متوسطه)

۵۶

### فعالیت

۳ دو مثلث زیر باهم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم‌رنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟



زاویه‌های متناظر:  $\hat{C} = \hat{D}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $\hat{A} = \hat{F}$

ضلع‌های متناظر: (EF, AB) و (AC, DF) و (BC, DE)

$$\text{نسبت ضلع‌ها: } \frac{BC}{DE} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}, \frac{AC}{DF} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}, \frac{AB}{EF} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

بله - سه کسر برابر هستند.

دوره اول

## کاردر کلاس

۵۶

۱- باتوجه به مربع صفحه بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع  $\frac{1}{3}$  باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟

دو مربع می‌توان رسم کرد که به نسبت  $\frac{1}{3}$  با مربع داده شده متشابه باشند، زیرا مربع رسم شده می‌تواند کوچکتر یا بزرگتر باشد.



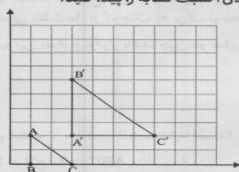
۲- در صفحه مختصات نقاط زیر را پیدا کنید.

مثلث  $ABC$   $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  مثلث  $A'B'C'$   $A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$   $B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   $C' = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید. در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

$$AB = BC = 2, AC = \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$A'B' = 4, A'C' = 4, B'C' = \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$$

دو شکل متشابه هستند و نسبت تشابه آنها  $\frac{1}{3}$  است.



۵۷

تمرین

۱- چند ضلعی‌های متشابه‌ی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید.



متشابهند  $\triangle AFH, \triangle AHC, \triangle CHJ, \triangle FHO, \triangle HOP, \triangle HPJ, \triangle KBN, \triangle DGH$  (الف)

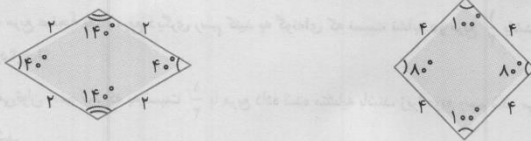
متشابهند  $\triangle DHEB, \triangle GKLH, \triangle MNH$  (ب)

متشابهند  $\triangle AFOH, \triangle CHPS$  (ج)

۲- آیا هر دو شکل هم‌نهشت باهم، متشابه نیز هستند؟ در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ بله - چون

زاویه‌های متناظر در آنها با هم برابر است و نیز نسبت تشابه  $\frac{1}{1} = 1$  است.

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ خیر. زیرا زاویه‌های آنها همواره با هم برابر نیستند.

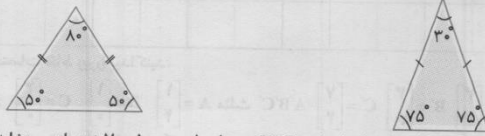


۴- در یک نقشه، مقیاس ۱:۲۰۰ است. فاصله دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتی متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

نقشه  $\frac{1}{200} = \frac{3/5}{x} \Rightarrow x = 200 \times 3/5 = 700 \text{cm}$

۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ بله - چون همه زاویه‌های متناظر در آنها با هم برابر است (۶۰°) و نسبت بین اضلاع متناظر ثابت است.

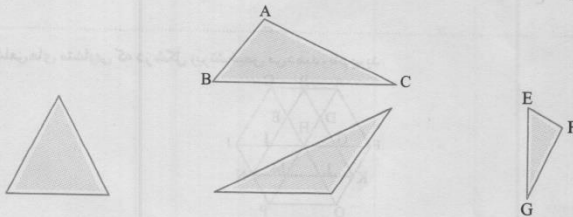
۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟ خیر - زیرا زاویه‌های هر دو مثلث متساوی الساقین با هم برابر نیستند.



۷- مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع ۱ و ۷ و x+۷ با هم متشابه هستند (اندازه ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است). مقدار x را پیدا کنید. چون دو مثلث متشابهند، پس باید تناسب بین اضلاع برقرار باشد. چون دو ضلع ۵ و ۱۰ معلوم هستند پس نسبت  $\frac{5}{10}$  یا  $\frac{1}{2}$  است.

$$\frac{4}{x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \times 4 = x-1 \Rightarrow 8 = x-1 \Rightarrow x=9$$

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟ کوچکترین مثلث، یعنی مثلث EFG. زیرا اضلاع آن همگی به نسبت  $\frac{1}{3}$  با اضلاع مثلث ABC متناسب است.



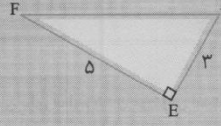
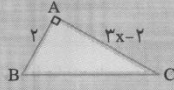
ارزشیابی مستمر

- ۱- آیا هر دو مربع متشابهند؟ چرا؟ (۱ نمره)
- ۲- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ (۱)
- ۳- در دو شکل متشابه نسبت تشابه برابر با  $\frac{3}{4}$  است. اگر طول ضلع کوچکتر شکل اول برابر ۹ باشد، ضلع کوچکتر شکل دوم چه اندازه‌ای است؟ (۱)

نهم (دوره اول متوسطه)



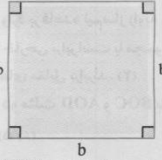
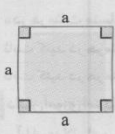
۴- دو شکل مقابل با هم متشابهند. x را بیابید. (۲)



۵- نشان دهید در دو مستطیل متشابه، نسبت محیط‌های دو مستطیل با نسبت تشابه برابر است. (۲)

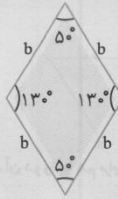
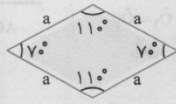
پاسخ ارزشیابی مستمر

۱- بله (۵/۵) - زیرا اولاً همه زاویه‌های دو شکل با هم برابرند و ثانیاً نسبت بین همه اضلاع با هم برابر است. (۵/۵)



نسبت تشابه =  $\frac{a}{b}$  (۵/۵)

۲- خیر (۵/۵) - زیرا زاویه‌های دو شکل ممکن است برابر نباشند. (۵/۵)

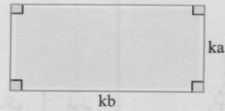
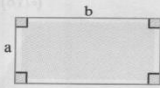


(۵/۵)

(۵/۵)  
 $\frac{3}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \times 9}{3} = 12$  (۵/۵)

(۵/۵)  
 $\frac{2}{3} = \frac{3x-2}{5} \Rightarrow 10 = 3(3x-2) \Rightarrow 10 = 9x-6 \Rightarrow 9x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{9}$  (۵/۵)

۵- اگر دو مستطیل مشابه باشند و نسبت تشابه برابر  $\frac{1}{k}$  باشد داریم:



نسبت تشابه =  $\frac{1}{k} = \frac{a+b}{2(ka+kb)} = \frac{a+b}{2k(a+b)}$  (۵/۵)

## آزمون کتبی

بمثل فصل سوم

تاریخ: ...../...../.....

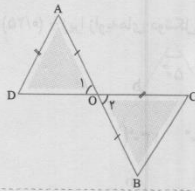
مدت: .....

- ۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱ نمره)  
 الف) ..... دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی برای معلوم شدن موضوعی است که قبلاً مجهول بوده است.  
 ب) داده‌های یک مسئله هندسی را ..... می‌گوییم و آنچه مسئله از ما خواسته ..... می‌نامیم.  
 ج) اگر دو شکل متشابه باشد نسبت اندازه‌های دو ضلع متناظر را ..... می‌گوییم.

۲- در مسئله زیر فرض و حکم را مشخص کنید. (۱)  
 «در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده نیم‌ساز زاویه رأس است»

۳- ثابت کنید در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن. (۲)  
 ۴- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند. (۲)

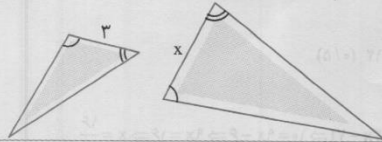
۵- دانش‌آموزی استدلال کرده است که دو مثلث AOD و BOC بنابر حالت (ض ض) هم‌نهشت هستند. آیا استدلال او درست است؟ چرا؟ (۵/۵)



$$\left. \begin{array}{l} AO = OB \text{ (فرضی)} \\ AD = OC \text{ (فرضی)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (مقابل به رأس)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض)} \\ AOD \cong BOC \end{array}$$

۶- ثابت کنید اگر دو وتر از مرکز یک دایره به یک فاصله باشند، طول آن دو وتر با هم برابر است. (۲)

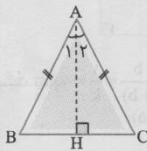
۷- دو مثلث مقابل به نسبت  $\frac{2}{3}$  متشابه‌اند. مقدار x را بیابید. (۱)



## پایخ آزمون کتبی فصل سوم

- ۱ الف) استدلال (۵/۲۵)  
 ب) فرض (۵/۲۵) - حکم (۵/۲۵)  
 ج) نسبت تشابه (۵/۲۵)

۲

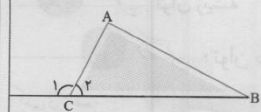


فرض	ABC متساوی الساقین	$\rightarrow AB = AC$
حکم	AH نیم‌ساز A است	$\rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

نهم (دوره اول متوسطه)

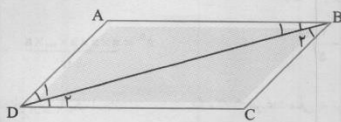
دوره اول

۳ مثلث ABC و زاویه خارجی C را رسم می‌کنیم.



$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_\gamma = 180^\circ \quad (\text{o}/\Delta) \\ \hat{C}_\gamma + \hat{C}_1 = 180^\circ \quad (\text{o}/\Delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}_\gamma = \hat{C}_\gamma + \hat{C}_1 \quad (\text{o}/\Delta)$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_1 \quad (\text{o}/\Delta)$$



(مشترک)  $DB = DB \quad (\text{o}/\Delta)$

(مورب)  $AD \parallel BC$  و  $BD$   $\hat{D}_1 = \hat{B}_\gamma \quad (\text{o}/\Delta)$

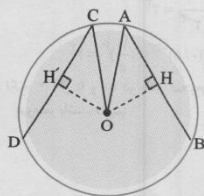
(مورب)  $AB \parallel DC$  و  $BD$   $\hat{D}_\gamma = \hat{B}_1 \quad (\text{o}/\Delta)$

}  $\xrightarrow{\text{ز ض ز}}$   
( $\text{o}/\Delta$ )

$\Delta ADB \cong \Delta CDB \Rightarrow \begin{cases} AD = BC \quad (\text{o}/\Delta) \\ AB = DC \quad (\text{o}/\Delta) \end{cases}$

۵ استدلال او نادرست است ( $\text{o}/\Delta$ ). زیرا زاویه‌های  $\hat{O}_\gamma$  و  $\hat{O}_1$  بین دو ضلع برابر قرار ندارند تا حالت (ض ز ض) ایجاد شود. ( $\text{o}/\Delta$ )

۶ از O به دو وتر عمودهای OH و OH' را وصل می‌کنیم. می‌دانیم این عمودها وترها را نصف می‌کنند ( $\text{o}/\Delta$ ). بار دیگر از O به A و C وصل می‌کنیم.



(شعاع)  $OC = OA \quad (\text{o}/\Delta)$

(فرض)  $H'O = HO \quad (\text{o}/\Delta)$

}  $\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}$  ( $\text{o}/\Delta$ )

$\Delta H'OC \cong \Delta HOA \Rightarrow H'C = HA \Rightarrow \gamma H'C = \gamma HA$

$\Rightarrow DC = AB \quad (\text{o}/\Delta)$

$$\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma}{x} \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\gamma} = \gamma \quad (\text{o}/\Delta)$$

## فصل توان ریشه

### توان صحیح

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{4}\right)^{-2} = 1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{3^{-7} \times 2^{-4}}{3^{-2}} = \frac{3^{-7}}{3^{-2}} \times 2^{-4} = 3^{-5} \times 2^{-4} = 6^{-4}$$

$$(-3)^{-2} + 5^{-2} = (-3+5)^{-2} = \left(\frac{-3}{5}\right)^{-2}$$

$$(3^{-2})^{-4} = 3^8$$

نکته ۵: هر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت و هر عدد منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی می‌شود.

مثال:  $(-2)^{-4} = \frac{1}{16}$        $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$

$$(-3)^{-6} = 3^{-6} \quad (-3)^{-11} = -3^{-11}$$

مثال: مقدار عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(-0.2)^{-4} \times (-25)^{-2} = (0.2)^{-4} \times 25^{-2}$$

$$= (0.2)^{-4} \times (5^2)^{-2} = (0.2)^{-4} \times 5^{-4} = 1^{-4} = 1$$

$$\left[ \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \right]^{-1} = -\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^{-1} = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16}$$

نکته ۶: اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بیشتری برسند، حاصل عددی کوچک‌تر و هرچه به توان کمتری برسند، حاصل عددی بزرگ‌تر می‌شود.

$$0 < a < 1 \rightarrow 0 \leq a^n < a < 1$$

نکته ۷: اعداد بزرگ‌تر از یک هرچه به توان بیشتری برسند، حاصل عددی بزرگ‌تر و هرچه به توان کمتری برسند، حاصل عددی کوچک‌تر می‌شود.

$$a > 1 \rightarrow a^n \geq a > 1$$

مثال: اعداد را از چپ به راست و از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$(-3)^{-2}, (-3)^{-3}, \left(\frac{-2}{3}\right)^2, \left(\frac{-2}{5}\right)^2, (-1)^{-5}, 2^3$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{9}, \quad (-3)^{-3} = \frac{-1}{27}, \quad \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^2 = 1, \quad (-1)^{-5} = -1, \quad 2^3 = 8$$

$$-1 < \frac{-1}{27} < \frac{-1}{9} < 1 < 8 < \frac{4}{9}$$

$$(-1)^{-5} < (-3)^{-3} < (-3)^{-2} < \left(\frac{-2}{3}\right)^2 < \left(\frac{-2}{5}\right)^2 < 2^3$$

نکته ۱: هر عدد به توان n (n عددی طبیعی) یعنی آن عدد n بار در خودش ضرب شود.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ بار}$$

نکته ۲: هر عدد غیرصفر به توان صفر برابر با یک است.

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

نکته ۳: اگر پایه یک عدد توان‌دار را معکوس کنیم، توان آن قرینه می‌شود. (توجه کنید که عدد صفر معکوس ندارد) یا توجه به این نکته توان منفی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

مثال: اعداد زیر را با توان منفی بنویسید.

$$2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}, \quad 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \quad \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

$$(0.25)^4 = \left(\frac{100}{25}\right)^{-4} = 4^{-4}$$

$$(0.008)^5 = \left(\frac{1000}{8}\right)^{-5} = (125)^{-5}$$

مثال: اعداد زیر را با توان مثبت بنویسید.

$$3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \quad \frac{1}{3^{-2}} = 3^2$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad (0.5)^{-3} = \left(\frac{1}{0.5}\right)^3 = 2^3$$

نکته ۴: اگر n و m دو عدد صحیح a و b دو عدد حقیقی غیرصفر باشند، داریم:

$$1) a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$2) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$3) a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$4) \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$5) (a^n)^m = a^{nm}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$3^{-5} \times 3^2 = 3^{-5+2} = 3^{-3}$$

۶۰

نهم دوره اول متوسطه

### فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟ از چپ به راست هر عدد نصف می‌شود تا عدد بعدی به دست آید.  
 ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟ عددهای پایینی صورت توان‌دار عددهای بالایی هستند.  
 ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا  $2^3$  با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟ توان‌ها یک واحد، یک واحد کم می‌شوند.  
 د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.  
 ها) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} \quad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} \quad 2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

۶۱

کارد در کلاس

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان طبیعی بنویسید:

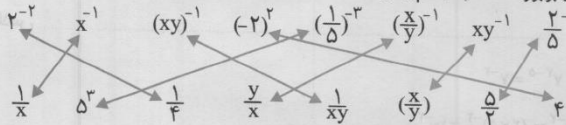
الف)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

ب)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج)  $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = \left(-\frac{1}{6}\right)^3$

د)  $\left(\frac{-2}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{-2}{7}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{2401}} = \frac{2401}{16} = \left(\frac{7}{2}\right)^4$

۲- عبارت‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید: ( $x \neq 0, y \neq 0$ )



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = (-3)^4 = 3^4 = 81$

ب)  $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$

ج)  $(-5)^2 = -25$

د)  $(-5)^{-2} = -\left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{25}$

ه)  $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

و)  $1^{-2} = 1^2 = 1$

ز)  $\frac{(-3)^2}{3} = \frac{1}{3}$

ح)  $\frac{1}{3^{-2}} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9} = -4$

ط)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

ی)  $2^3 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

۶۲

سؤال متن

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟ بله، برای توان‌های منفی هم می‌توان از همین رابطه استفاده کرد.

۶۳

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$



$$3^{-5} \times 3^{-2} = \frac{1}{3^5} \times \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{5+2}} = \frac{1}{3^7} = 3^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

برای محاسبه هر یک از ضرب‌های زیر ابتدا آن‌ها را به اعداد توان‌دار با توان طبیعی تبدیل کرده‌ایم و سپس از قواعد ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی استفاده کرده‌ایم. توان عددی که در پاسخ نوشته شده است از جمع توان‌های دو عدد توان‌دار ضرب شده به دست می‌آید.

$$5^3 \times 5^{-7} = 5^3 \times \frac{1}{5^7} = \frac{5^3}{5^7} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

۶۲

کار در کلاس

⊛ حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید. ( $b, x, y \neq 0$ )

$$5^{-7} \times 5^{10} = 5^{-7+10} = 5^3$$

$$(-4)^{-9} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-9+(-1)} = (-4)^{-10}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} = \left(\frac{-3}{8}\right)^{4+(-9)} = \left(\frac{-3}{8}\right)^{-5}$$

$$(\sqrt{2})^6 \times (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^{6+(-2)} = (\sqrt{2})^4 = 2$$

$$b^{-2} \times b^{-3} = b^{(-2)+(-3)} = b^{-5}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-7+11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

۶۳

کار در کلاس

الف)  $\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$

ب)  $2^{-2} \times 5^{-2} = (2 \times 5)^{-2} = 10^{-2}$

ج)  $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} = \left(\frac{-2}{3} \times 12\right)^{-3} = (-8)^{-3} = -8^{-3}$

د)  $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{(-2) \times (-1)} = \left(\frac{-2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$

ه)  $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^2 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^2} \times \frac{5^{10}}{5^6} = 2^6 \times 5^4 = 10^4$

و)  $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^3 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-3} \cdot z^{1-3} = x^7 y^{-1} z^{-2} \quad x, y, z \neq 0$

۶۳

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف)  $3^{-2} < \frac{1}{9}$   $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

ب)  $3^{-1} < \frac{1}{3}$   $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

ج)  $3^{-1} \times 4^{-1} < \frac{1}{7}$   $3^{-1} \times 4^{-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 12^{-1}$

۶۲

نهم دوره اول متوسطه

۲۰۰



د)  $3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$

ه)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

و)  $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود  $1.67 \times 10^{-24}$  گرم است. جرم یک وزنه  $100$  کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟  
 هر یک کیلوگرم برابر  $1000$  گرم است، پس  $100$  کیلوگرم،  $100000$  گرم یا  $10^5$  گرم است. برای حل این مسئله باید جرم وزنه را که  $10^5$  گرم است را بر جرم اتم هیدروژن تقسیم کنیم تا مشخص شود چند برابر آن جرم دارد.  
 $10^5 \div 1.67 \times 10^{-24} = 10^5 \times 10^{24} = 10^{29}$

۳- عددهای  $16^3$  و  $8^4$  و  $2^{11}$  را با یکدیگر مقایسه کنید.

$16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$   
 $8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$   
 $\Rightarrow 2^{11} < 8^4 = 16^3$

۴- در جاهای خالی علامت  $<$  یا  $>$  قرار دهید:

الف)  $\frac{1}{3} = 3^{-1} > 3^{-2} = \frac{1}{9}$

ب)  $1 = 3^0 > 3^{-5} = \frac{1}{243}$

ج)  $4 = (\frac{1}{5})^{-2} = (0.2)^{-2} > (0.6)^{-2} = (\frac{1}{6})^{-2} = \frac{25}{9}$

د)  $\frac{1}{5} = 5^{-1} > 5^{-2} = \frac{1}{25}$

ه)  $1 = (\frac{-1}{15})^0 = 1$

و)  $\frac{-1}{25} = (-5)^{-2} > (-5)^{-3} = \frac{1}{125}$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر  $x$  چه عددی است؟

الف)  $5^x \times 5^{-3} = 5^4$   
 $x + (-3) = 4 \Rightarrow x = 7$

ب)  $5^x + 5^{-3} = 5^4$   
 $x - (-3) = 4 \Rightarrow x = 1$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف)  $a^4 \times a^5 = a^{20}$  نادرست

ب)  $a^4 \times a^5 = a^9$  درست

ج)  $(a^m)^n = (a^n)^m$  درست

د)  $a > 0$  درست

ه)  $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$  درست

و)  $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$  نادرست

ز)  $6^{-2} = \frac{-2}{6}$  نادرست

ح)  $3^{-2} = -9$  نادرست

ط)  $3^{-1} < 3^{-1}$  درست

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف)  $(\frac{1}{3})^{-10} \times 27^{-3} = 3^{10} \times (3^3)^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3^1$

ب)  $(0.2)^{-4} \times (25)^{-2} = (\frac{1}{5})^{-4} \times (5^2)^{-2} = 5^4 \times 5^{-4} = 5^0 = 1$

ج)  $(\frac{15}{14})^{-4} \times (\frac{14}{15})^4 = (\frac{14}{15})^4 \times (\frac{14}{15})^4 = (\frac{14}{15} \times \frac{14}{15})^4 = (\frac{196}{225})^4$

د)  $(-5^{-2})^{-1} = (\frac{1}{-25})^{-1} = (-25)$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$2^{-3} \text{ و } 5^{-3} \text{ و } 2^3 \text{ و } (-\frac{1}{3})^{-2} \text{ و } (-7)^2 \text{ و } (-1)^{21} \text{ و } 1^{-90} \text{ و } -2^{-4}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{125} \quad 8 \quad 4 \quad 49 \quad -1 \quad 1 \quad -\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow (-1)^{21} < -2^{-4} < 5^{-3} < 2^{-3} < 1^{-90} < (-\frac{1}{3})^{-2} < 2^2 < (-7)^2$$

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$$(0.987)^1 < 1^0 \quad (1/2)^7 < (1/0.2)^7 \quad (\frac{5}{3})^2 < (0.7)^2 \quad (\frac{3}{5})^2 > (0.75)^3$$

درست                      نادرست                      نادرست                      درست

### یادآوری

۱) عددهای بین صفر و یک هر چه به توان بیشتر برسند، کوچک تر می شوند.

۲) عددهای بیشتر از یک هر چه به توان بیشتر برسند، بزرگ تر می شوند.

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{1}{3})^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}} = \frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{3}{2})^3}{-2^{5+(-8)}} = \frac{(\frac{2}{3})^3}{-2^{-3}} = -(\frac{1}{3})^2 \times 2^3 = -(\frac{2}{3})^2 = -\frac{1}{8}$

ب)  $\left[-(\frac{2}{3})^{-2}\right]^{-1} = \left[-(\frac{3}{2})^2\right]^{-1} = \left[-\frac{9}{4}\right]^{-1} = -\frac{4}{9}$

### ارزشیابی مستمر

۱- عبارت های زیر را با توان مثبت بنویسید. (۱/۵ نمره)

الف)  $(\frac{3}{4})^{-4}$                       ب)  $\frac{1}{3^{-3}}$                       ج)  $(0.2)^{-3}$

۲- حاصل عبارت های زیر را بیابید. (۲)

الف)  $2^{-1} + 3^{-2}$                       ب)  $(\frac{2}{3})^{-1} + (\frac{1}{4})^2$

ج)  $-(-3)^{-2}$                       د)  $3^3 - 3^{-1}$

۳- حاصل عبارت های زیر را به صورت توان دار بنویسید. (۴)

الف)  $(-3)^{-4} \times 3^7$                       ب)  $\left[-(\frac{1}{3})^{-3}\right]^{-1}$

ج)  $\frac{x^{15} \cdot y^2 \cdot z^{-4}}{x^{-7} \cdot y^5 \cdot z^3}$                       د)  $\frac{3^5 + (\frac{1}{3})^{-2}}{9^4 + 9}$

۴- اعداد  $81^3$  و  $9^5$  و  $27^5$  را مقایسه کنید. (۱/۵)

### پاسخ ارزشیابی مستمر

الف)  $(\frac{3}{4})^{-4} = (\frac{4}{3})^4$                       ب)  $\frac{1}{3^{-3}} = 3^3$                       ج)  $(0.2)^{-3} = (\frac{10}{2})^3 = 5^3$

(۰/۵)                      (۰/۵)                      (۰/۵)

نهم دوره اول متوسطه

۲

الف)  $3^{-1} + 3^{-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3+1}{9} = \frac{4}{9} = \frac{11}{18}$  (o/5)

ب)  $(\frac{2}{3})^{-1} + (\frac{1}{3})^{-2} = \frac{3}{2} + 3^2 = \frac{3}{2} + \frac{16}{1} = \frac{3+32}{2} = \frac{35}{2}$  (o/5)

ج)  $-(-3)^{-2} = -(\frac{1}{3^2}) = -\frac{1}{9}$  (o/5)

د)  $3^0 - 3^{-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$  (o/5)

۳

الف)  $(-3)^{-4} \times 3^7 = 3^{-4} \times 3^7 = 3^3$  (1)

ب)  $\left[ -(-\frac{1}{3})^{-2} \right]^{-1} = \left[ -(-3)^2 \right]^{-1} = \left[ -(3^2) \right]^{-1} = [8]^{-1} = \frac{1}{8}$  (1)

ج)  $\frac{x^{15} \cdot y^2 \cdot z^{-4}}{x^{-7} \cdot y^5 \cdot z^3} = \frac{x^{15}}{x^{-7}} \times \frac{y^2}{y^5} \times \frac{z^{-4}}{z^3} = \frac{x^{22}}{y^3 \cdot z^7}$

د)  $\frac{3^5 + (\frac{1}{3})^{-2}}{9^3 + 9} = \frac{3^5 \times 3^{-2}}{9^3} = \frac{3^3}{(3^2)^3} = \frac{3^3}{3^6} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$  (1)

۴

$$\left. \begin{aligned} 27^5 &= (3^3)^5 = 3^{15} \quad (o/25) \\ 9^5 &= (3^2)^5 = 3^{10} \quad (o/25) \\ 81^2 &= (3^4)^2 = 3^{12} \quad (o/25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9^5 < 81^2 < 27^5 \quad (o/75)$$

## نماد علمی

که در آن  $a$  عددی بین یک تا  $10$  و  $n$  عددی صحیح باشد، می‌گوییم آن عدد را به صورت نماد علمی بنویسیم.

$$a \times 10^n, (1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z})$$

مثال: عدد  $0.0003$  با نماد علمی به صورت  $3 \times 10^{-4}$  نوشته می‌شود.

مثال: عدد  $120000$  با نماد علمی به صورت  $1.2 \times 10^5$  نوشته می‌شود.

مثال: اعداد زیر را با نماد علمی بنویسید.

$$2240000 = 2.24 \times 10^6$$

$$0.000215 = 2.15 \times 10^{-4}$$

مثال: اعداد زیر را از صورت نماد علمی به صورت اعشاری برگردانید.

$$2.5 \times 10^{-3} = 0.0025$$

$$4 \times 10^3 = 4000$$

$$2/25 \times 10^7 = 22500000$$

$$10^{-2} = 0.01$$

نکته ۸: حاصل  $10^n$  برابر است با یک عدد یک که جلوی آن  $n$  تا صفر قرار بگیرد. مانند  $100000 = 10^5$ .

نکته ۹: اگر بخواهیم عددی را بر توانی از  $10$  تقسیم کنیم کافی است جای ممیز عدد داده شده را به تعداد صفرهای جلوی یک (توان  $10$ ) به سمت چپ منتقل کنیم. اگر بخواهیم عددی را در توانی از  $10$  ضرب کنیم کافی است جای ممیز را به تعداد صفرهای جلوی یک (توان  $10$ ) به سمت راست منتقل کنیم.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$3/2 + 10^3 = 3/2 + 1000 = 0.0032$$

(ممیز ۳ رقم به چپ منتقل شد.)

$$3/2 \times 10^3 = 3/2 \times 1000 = 3200/2 = 1600$$

(ممیز ۳ رقم به راست منتقل شد.)

نکته ۱۰: هرگاه عددی حقیقی را به شکل  $a \times 10^n$  بنویسیم

۶۵

### فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های ۱۰ یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های ۱۰ خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در	تقسیم بر	ضرب در
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
۱۵	۱۵	۱/۵	۱۵۰۰	۰/۱۵	۱۵۰۰۰	۰/۰۱۵	۱۵۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۱۵۰۰۰۰۰
۰/۰۲	۰/۲	۰/۰۰۲	۲	۰/۰۰۰۲	۲۰	۰/۰۰۰۰۲	۲۰۰	۰/۰۰۰۰۰۲	۲۰۰۰
۹۳	۹۳۰	۹/۳	۹۳۰۰	۰/۹۳	۹۳۰۰۰	۰/۰۹۳	۹۳۰۰۰۰	۰/۰۰۹۳	۹۳۰۰۰۰۰

همان‌طور که در جدول فوق دیده می‌شود هنگامی که می‌خواهیم عددی را در  $10^n$  ضرب کنیم، کافی است مکان ممیز را  $n$  رقم (به تعداد توان) به سمت راست منتقل و هنگامی که می‌خواهیم عددی را بر  $10^n$  تقسیم کنیم، مکان ممیز را  $n$  رقم به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

۲- سرعت نور  $300,000,000$  متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در  $100$  ساعت می‌پیماید چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به دست آمده است.

$$\text{فاصله‌ای که نور در } 100 \text{ ساعت می‌پیماید.} = 300,000,000 \times 36,000 = 10,800,000,000 \text{ ثانیه} = 360,000 \text{ ساعت}$$

ابتدا باید  $100$  ساعت را بر حسب ثانیه به دست آوریم. از آنجا که هر ساعت  $3600$  ثانیه است، نتیجه می‌گیریم که هر  $100$  ساعت  $360,000$  ثانیه است و سپس این عدد را در سرعت نور ضرب می‌کنیم تا مسافت طی شده به دست آید.

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد  $10$  نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$300,000,000 = 3 \times 10^8 \Rightarrow 3 \times 10^8 \times 36,000 = 3 \times 10^8 \times 36 \times 10^3 = 108 \times 10^{11} = 1.08 \times 10^{13}$$

$$360,000 = 36 \times 10^4$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است.

این‌گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان‌تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

۶۶

### کار در کلاس

۱- هریک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$245,000 = 2.45 \times 10^5 \quad 15,000,000 = 1.5 \times 10^7 \quad 0.005 = 5 \times 10^{-3}$$

$$0.000061 = 6.1 \times 10^{-5} \quad 14,04 = 1.404 \times 10^4 \quad 0.1275 = 1.275 \times 10^{-1}$$

۲- نمایش اعشاری زیر را بنویسید:

$$5/2 \times 10^{-3} = 0.0025 \quad 7/304 \times 10^{-5} = 0.00007304$$

$$2/28 \times 10^8 = 228,000,000 \quad 9/4612 \times 10^9 = 946,120,000$$

$$6/02 \times 10^{-7} = 0.0000006 \quad 1/1 \times 10^2 = 1100$$

۶۷

### تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{3^{-5} \times 25}{6^{-5}} = \left(\frac{3}{6}\right)^{-5} \times 25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \times 25 = 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 800$$

۶۵

نهم (دوره اول متوسطه)

۲۰۴





پاسخ ارزشیابی مستمر

پاسخ ارزشیابی مستمر

- الف)  $23000 = 2/3 \times 10^4$  (1)      ب)  $21/2 \times 10^{-4} = 2/12 \times 10^{-3}$  (1)      1  
 ج)  $0/00032 = 2/2 \times 10^{-5}$  (1)      د)  $2354 \times 10^2 = 2/254 \times 10^3 \times 10^2 = 2/254 \times 10^5$  (1)      2  
 الف)  $1/3 \times 10^4 = 13000$  (1)      ب)  $5/21 \times 10^{-7} = 0/000000521$  (1)      3

$$\frac{2/1 \times 10^{-4}}{0/42 \times 10^{-7}} = \frac{2/1 \times 10^{-1} \times 10^{-4}}{42 \times 10^{-2} \times 10^{-7}} = \frac{10^{-5}}{2 \times 10^{-9}} = \frac{1}{2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{2} \times 10^4 = 0/5 \times 10^4 = 5 \times 10^3 \text{ (0/5)}$$

$$\left. \begin{aligned} 13/1 \times 10^5 &= 1/31 \times 10^6 \text{ (0/25)} \\ 1320 \times 10^2 &= 1/320 \times 10^3 \times 10^2 = 1/32 \times 10^5 \text{ (0/25)} \end{aligned} \right\} \rightarrow 13/1 \times 10^5 < 1320 \times 10^2$$

ریشه گیری

الف)  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{ab}$   
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$   
 ب)  $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{ab}$   
 $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} \sqrt{4} \times \sqrt{25} &= \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{3} \times \sqrt{27} &= \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9 \\ \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} &= \sqrt[3]{4 \times 4} = \sqrt[3]{16} = 2 \\ \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[3]{-3} &= \sqrt[3]{(-9) \times (-3)} = \sqrt[3]{27} = 3 \\ \frac{\sqrt{-24}}{\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{-24}{3}} = \sqrt{-8} = -2 \\ \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

نکته ۱۸: توجه کنید که  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  و  $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

نکته ۱۹: اگر  $a$  عدد حقیقی مثبتی باشد داریم:  $(\sqrt{a})^2 = a$

نکته ۲۰: برای هر عدد حقیقی داریم:  $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

مثال: عبارت‌های رادیکالی زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف)  $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$   
 ب)  $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$   
 ج)  $(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2}) = 2^2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$   
 د)  $(\sqrt[3]{3})^4 = (\sqrt[3]{3})^3 \times (\sqrt[3]{3}) = 3 \times \sqrt[3]{3}$

نکته در رسم

نکته ۱۱: می‌گوییم  $a$  ریشه دوم  $b$  است هرگاه  $a^2 = b$ . مثلاً  
 ۲ ریشه دوم ۴ است، زیرا  $2^2 = 4$ . همچنین  $(-2)^2 = 4$  نیز ریشه دوم ۴ است، زیرا  $(-2)^2 = 4$ .  
 نکته ۱۲: تنها اعداد حقیقی نامنفی دارای ریشه دوم هستند، زیرا توان دوم هیچ عدد حقیقی منفی نمی‌شود.  
 نکته ۱۳: هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه دوم است. مثلاً ریشه‌های دوم عدد  $a$ ،  $\sqrt{a}$  و  $-\sqrt{a}$  هستند.  
 مثال: ریشه‌های دوم عدد ۹ عبارتند از ۳ و  $-3$ . ریشه‌های دوم عدد ۳ عبارتند از  $\sqrt{3}$  و  $-\sqrt{3}$ .  
 نکته ۱۴: اگر  $a$  عددی حقیقی باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= |a| \\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} &= |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} \\ \sqrt{(-2)^2} &= |-2| = 2 \end{aligned}$$

نکته ۱۵: می‌گوییم  $a$  ریشه سوم  $b$  است، هرگاه  $a^3 = b$ . در این صورت می‌نویسیم « $\sqrt[3]{b} = a$ » و می‌خوانیم «رادیکال  $b$  به فرجه ۳ برابر است با  $a$ ».

نکته ۱۶: هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

مثال: ریشه سوم ۲۷ برابر با ۳ است، زیرا  $3^3 = 27$ . همچنین ریشه سوم  $-125$  برابر  $(-5)$  است، زیرا  $(-5)^3 = -125$ .

نکته ۱۷: برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

نهم دوره اول متوسطه

۳۰۶



۶۸

فعالیت

۱- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید:

$$\begin{aligned} (-3)^2 &= 9 & (\sqrt{5})^2 &= 5 & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \frac{1}{3} & \left(-\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{4}{9} \\ (-\sqrt{5})^2 &= 5 & \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \frac{1}{3} & 4^2 &= 16 & (-4)^2 &= 16 \end{aligned}$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید:

عدد	۳	-۳	۴	-۴	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶		$\frac{4}{9}$		۵		$\frac{1}{3}$		۶	

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳	۴	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸	۲۷	-۲۷	۶۴	$\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{8}$	۱۲۵	$-\frac{8}{27}$	۰

به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر ۴ و ریشه سوم عدد  $-\frac{8}{27}$  عدد  $-\frac{2}{3}$  است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8} &= 2 & \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} &= -\frac{1}{2} & \sqrt[3]{125} &= 5 & \sqrt[3]{-27} &= -3 \end{aligned}$$

۶۹

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \sqrt{81} &= 9 & \sqrt{42} &= 4 & \sqrt{(-4)^2} &= \sqrt{4^2} = 4 & \sqrt[3]{-1} &= -1 \\ \sqrt[3]{\frac{27}{125}} &= \frac{3}{5} & \sqrt[3]{6^3} &= 6 & \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} &= -\frac{2}{10} & \sqrt[3]{(-7)^3} &= -7 \end{aligned}$$

۲- به کمک رابطه  $\sqrt{x^2} = |x|$  که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-6)^2} &= |-6| = 6 & \sqrt{8^2} &= |8| = 8 & \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} &= \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} \\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} &= |1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2} & \sqrt{(2-9)^2} &= |2-9| = -7+9 = 7 & \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} &= \left|1-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$  را در هریک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها حل شده است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= |x| + |y| = x + y & \text{(الف) } x \text{ و } y \text{ هر دو مثبت هستند } (x > 0, y > 0) \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= |x| + |y| = x - y & \text{(ب) } x \text{ مثبت و } y \text{ منفی است } (x > 0, y < 0) \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= |x| + |y| = -x + y = y - x & \text{(ج) } x \text{ منفی و } y \text{ مثبت است } (x < 0, y > 0) \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= |x| + |y| = -x - y & \text{(د) } x \text{ و } y \text{ هر دو منفی هستند } (x < 0, y < 0) \end{aligned}$$

### فعالیت

۷۰

با توجه به عددهای داده شده  $a$  و  $b$  جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

$a$	$\sqrt[3]{a}$	$b$	$\sqrt[3]{b}$	$ab$	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲ \times ۵ = ۱۰$
۲۷	۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{۲۷}{8}$	$\frac{۳}{۲}$	$۳ \times \frac{1}{۲} = \frac{۳}{۲}$
-۸	-۲	۲۷	۳	-۲۱۶	-۶	$-۲ \times ۳ = -۶$

با مقایسه دو ستون آخر این جدول می‌توان حدس زد که حاصل ضرب ریشه‌های سوم دو عدد حقیقی برابر است با ریشه سوم حاصل ضرب آنها، به زبان ریاضی داریم:

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$$

### کار در کلاس

۷۰

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8+27}$$

خیر، برقرار نیست.

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی، برابر با ۵ می‌باشد، در حالی که سمت راست کمتر از ۴ است.»

$$\text{سمت چپ} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = ۲ + ۳ = ۵$$

$$\text{سمت راست} = \sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{۳۵} < (\sqrt[3]{۶۴} = ۴)$$

این استدلال درست است. در این استدلال از این نکته استفاده شده است که اگر تساوی داده شده در سؤال درست باشد باید هر دو طرف آن دارای مقدارهای برابر باشند. اما محاسبه نشان می‌دهد که این طور نیست.

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید:

$$\sqrt[3]{۴} \times \sqrt[3]{۱۶} = \sqrt[3]{۴ \times ۱۶} = \sqrt[3]{۶۴} = ۴$$

$$۳\sqrt[3]{-۲} \times ۵\sqrt[3]{۴} = ۱۵\sqrt[3]{-۸} = ۱۵ \times (-۲) = -۳۰$$

$$\sqrt[3]{۱۲۸} = \sqrt[3]{۶۴} \times \sqrt[3]{۲} = ۴\sqrt[3]{۲}$$

$$\sqrt[3]{۲۰} = \sqrt[3]{۴} \times \sqrt[3]{۵}$$

$$\sqrt[3]{\frac{۱۲۵}{۶۴}} = \frac{\sqrt[3]{۱۲۵}}{\sqrt[3]{۶۴}} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{\sqrt[3]{-۵۴}}{\sqrt[3]{۲}} = \sqrt[3]{\frac{-۵۴}{۲}} = \sqrt[3]{-۲۷} = -۳$$

۷۱

### تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید:

$$\frac{۴۹}{۱۶}, \frac{1}{81}, ۱۵, ۱۴۴, ۱۲, ۱۸$$

$$\frac{۴۹}{۱۶} \rightarrow \frac{۷}{۴}, \frac{۷}{۴}$$

$$۱۵ \rightarrow \sqrt{۱۵}, -\sqrt{۱۵}$$

$$۱۲ \rightarrow \sqrt{۱۲}, -\sqrt{۱۲}$$

$$\frac{1}{81} \rightarrow \frac{1}{9}, \frac{-1}{9}$$

$$۱۴۴ \rightarrow ۱۲, -۱۲$$

$$۱۸ \rightarrow \sqrt{۱۸}, -\sqrt{۱۸}$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید:

$$۲۱۶, ۷, -۵, \frac{-1}{۲۱۶}, ۱۰$$

$$\sqrt[3]{۲۱۶} = ۶, \sqrt[3]{۷} = ۷, \sqrt[3]{-۵} = -\sqrt[3]{۵}, \sqrt[3]{\frac{-1}{۲۱۶}} = \frac{-1}{۶}, \sqrt[3]{۱۰} = \sqrt[3]{۵} \times \sqrt[3]{۲}$$

۷۰

نهم (دوره اول متوسطه)

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$\sqrt{(-1)^2} = -1$  نادرست     $\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$  درست     $\sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$  درست     $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$  درست  
 $-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$  درست     $\sqrt{1/44} = 1/2$  درست     $\sqrt{(-1)^2} = 1$  درست     $\sqrt[3]{-64} = -4$  درست

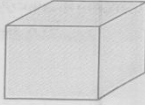
۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید:

$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36}$      $\sqrt[3]{-1} \times \sqrt{81}$      $\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$      $\sqrt[3]{-25} \times \sqrt[3]{5}$   
 ۳    ۳۰    -۹    -۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای  $a$  قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد:  
 $\sqrt[3]{a} < \sqrt{4} \rightarrow a = 7, 6, 5, \dots$

۶- رابطه  $\sqrt{(-x)^2} = x$  به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

به شرطی که  $x \geq 0$  (یعنی  $x$  نامنفی) باشد. مثلاً اگر  $x = 4$  باشد، رابطه  $\sqrt{(-4)^2} = 4$  برقرار است. اما اگر  $x = -1$  باشد، نگاه  $\sqrt{(-(-1))^2} = -1$  که درست نیست. زیرا عبارت  $\sqrt{a}$  همواره باید مقداری نامنفی باشد. اگر مساحت کل یک مکعب  $96a^2$  باشد، حجم آن را بر حسب  $a$  به دست آورید. چون مکعب از به هم چسبیدن شش وجه مربع شکل به دست می‌آید. ابتدا عبارت  $96a^2$  را بر ۶ تقسیم می‌کنیم تا مساحت یک وجه آن به دست آید.



$$\frac{96a^2}{6} = 16a^2$$

حال از آنجا که مساحت مربع از به توان ۲ رساندن اندازه یک ضلع آن به دست می‌آید، کافی است جذر عدد  $16a^2$  اندازه ضلع مربع  $\sqrt{16a^2} = 4a$  را بیابیم تا ضلع مربع به دست آید:

$$\Rightarrow (4a)^2 = 64a^2$$

۸- اگر  $x > 0$  و  $y < 0$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$  را ساده کنید و بدون قدر مطلق بنویسید.

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| \xrightarrow{x > 0, y < 0} x - (-y) = x + y$$

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید:

$$\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{5^2 \times 3 \times 2} = 5\sqrt{6}$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \times 5} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = 5^2 = 25$$

$$(\sqrt{-2})^2 = -2 \quad \text{درست}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟ بله هر دو رابطه درست هستند.

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4} \quad \text{درست}$$

$$(\sqrt{-2})^2 = (\sqrt{-2} \times \sqrt{-2} \times \sqrt{-2}) = (\sqrt{-8}) = -2$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times (-1)} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = -\sqrt{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = (2 \times 2) \times \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = 6 \times \sqrt[3]{64} = 6 \times 4 = 24$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{18 \times 60}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 60}{5}} = \sqrt[3]{216} = 6$$

ارزشیابی مستمر

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (۳ نمره)

الف)  $\sqrt[3]{4^3}$  (ب)  $-\sqrt[3]{2^6}$  (ج)  $\sqrt[3]{-125}$

د)  $\sqrt{\frac{4}{9}}$  هـ)  $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$  و)  $\sqrt{x^2}$

۲- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱/۵)

الف) هر عددی دارای دو ریشه دوم است که قرینه یکدیگرند.

ب) ریشه سوم اعداد منفی، عددی منفی است.

ج)  $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

اگر  $x > 0$  و  $y < 0$  عبارت  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$  را ساده کنید. (۱)

۳- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۲)

الف)  $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{32}$  (ب)  $\frac{\sqrt{0/4}}{\sqrt{0/1}}$

۴- عبارت‌های رادیکالی زیر را تا حد امکان ساده کنید. (۲)

الف)  $\sqrt[3]{48}$  (ب)  $-\sqrt{50}$

نیم دوره اول متوسطه

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱

الف)  $\sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$  (۵/۵)    ب)  $-\sqrt[3]{2^6} = -\sqrt[3]{(2^2)^3} = -2^2 = -4$  (۵/۵)

ج)  $\sqrt[3]{-125} = -5$  (۵/۵)    د)  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$  (۵/۵)

هـ)  $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-1$  (۵/۵)    و)  $\sqrt{x^2} = |x|$  (۵/۵)

۲ الف) نادرست چون اعداد منفی ریشه دوم ندارند و عدد صفر نیز فقط یک ریشه دوم دارد. (۵/۵)

ب) درست (۵/۵)

ج) نادرست، مثلاً اگر  $a=1$  و  $b=8$  باشد داریم: (۵/۵)

$\sqrt[3]{1} = 1$   
 $\sqrt[3]{8} = 2$   
 $\Rightarrow \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} = 3 \neq \sqrt[3]{1+8} = \sqrt[3]{9}$

۳

$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| \stackrel{x>0, y<0}{=} x - y$  (۵/۵)

۴

الف)  $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4$  (۱)

ب)  $\frac{\sqrt{0/4}}{\sqrt{0/1}} = \sqrt{\frac{0/4}{0/1}} = \sqrt{0} = 0$  (۱)

۵

الف)  $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8 \times 6} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{6} = 2\sqrt[3]{6}$  (۱)

ب)  $-\sqrt{50} = -\sqrt{25 \times 2} = -\sqrt{25} \times \sqrt{2} = -5\sqrt{2}$  (۱)

۴ جمع و تفریق رادیکال‌ها

مثال: مخرج کسرهای  $\frac{1}{\sqrt{4}}$  و  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4} \times \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{4}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{4\sqrt{4}}{\sqrt{4} \times \sqrt{4}} = \frac{4\sqrt{4}}{4} = \sqrt{4}$$

نکته ۲۴: به‌طور کلی اگر مخرج یک کسر  $\sqrt{a}$  باشد صورت و مخرج را در همان  $\sqrt{a}$  ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود، یعنی:

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

نکته ۲۵: به‌طور کلی اگر مخرج یک کسر  $\sqrt[3]{a}$  باشد، صورت و مخرج را در  $\sqrt[3]{a^2}$  ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود، یعنی:

$$\frac{b}{\sqrt[3]{a}} = \frac{b}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{b\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

مثال: مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید:

الف)  $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

ب)  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$

ج)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

نکته ۲۱: اگر قسمت رادیکالی دو عبارت رادیکالی پس از ساده شدن کاملاً یکسان باشد (یعنی هم عدد زیر رادیکال و هم فرجه رادیکال آنها مانند هم باشد)، می‌توان آن دو عبارت رادیکالی را جمع و تفریق کرد.

$$\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

نکته ۲۲: برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی، ابتدا هر یک از رادیکال‌ها را به‌طور جداگانه ساده می‌کنیم، یعنی تا جایی که امکان دارد اعداد را از زیر رادیکال خارج می‌کنیم، سپس رادیکال‌های مشابه را می‌یابیم و جمع و تفریق می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم عبارت  $\sqrt{18} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$  را تا حد امکان ساده کنیم. ابتدا تک تک رادیکال‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

حالا رادیکال‌های مشابه را با هم جمع می‌کنیم:

$$\sqrt{18} - 3\sqrt{12} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} =$$

$$3\sqrt{2} - 3 \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} =$$

$$3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} = \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

مثال: عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$3\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{16} = 3\sqrt{27 \times 2} - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{4 \times 4} =$$

$$= 3 \times 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 4 \times 2\sqrt{4} = 9\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 8\sqrt{4}$$

$$= 15\sqrt{3}$$

نکته ۲۳: اگر مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم، اصطلاحاً می‌گوییم مخرج آن کسر را گویا کرده‌ایم. برای این کار کافی است صورت و مخرج آن کسر را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم به‌طوری‌که رادیکال مخرج حذف شود.

۷۳

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطران  $2\sqrt{6}$  متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به‌دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.

حل: به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + x^2 = 24 \quad \text{و از آن جا } 2x^2 = 24$$

بنابراین مساحت این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ضلع مربع  $\sqrt{12}$  متراً  $2\sqrt{3}$  متر است.

$$x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$$



$$\text{محیط مربع} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

همچنین:



## کار در کلاس

۷۳

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{4}\sqrt{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	$\sqrt{xy}$	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{4}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{4}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$4\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7}-2\sqrt{5}$	$\frac{9}{4}\sqrt{4}+\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{5}}{2}-\frac{8}{3}\sqrt{10}$	$\frac{14}{5}\sqrt{a}-5\sqrt{b}$	$5\sqrt{xy}-5\sqrt{x}$	$7\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

## فعالیت

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.  
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.  
ابتدا در هر عبارت، رادیکال‌ها را تک تک ساده می‌کنیم، سپس روابط به دست آمده را در عبارت جایگزین می‌کنیم و جواب را به دست می‌آوریم.

الف  $\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$

$$\begin{aligned}\sqrt{72} &= \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2} \\ \sqrt{32} &= \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2} \\ \sqrt{18} &= \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} &= 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \\ \text{ب) } \sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} \\ &= 5\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

بنابراین:

۷۴

## سؤال متن

مثال ۲: حاصل  $\sqrt{3} + (\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48})$  را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر است. (چرا؟) زیرا: حاصل تقسیم هر عدد غیر صفر بر خودش برابر یک است.

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{3} = 1$$

۷۵

## کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید:

$$\begin{aligned}1) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128} &= \sqrt{7^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{8^2 \times 2} \\ &= 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} &= \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} \\ &= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0\end{aligned}$$

۷۳

نهم دوره اول متوسطه



$$3) \ 5\sqrt{2} + 3\sqrt{54} - 4\sqrt{128} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2^3 \times 3} - 4\sqrt{2^7} \times 2$$

$$= 5\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$4) \ \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4 \times 81 + 1 \times 4 \times 9 + 4 \times 9}{81}} = \sqrt{\frac{361}{81}} = \frac{\sqrt{361}}{\sqrt{81}} = \frac{19}{9}$$

$$5) \ (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 6 - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 3 = 3 + 2\sqrt{6}$$

گویا کردن مخرج کسره‌های رادیکالی

۷۵

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسره‌های زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید.

الف)  $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

ب)  $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{25}}{5}$

ج)  $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

د)  $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$

ه)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{x}{x} = 1 \quad (x > 0)$

و)  $\frac{5}{\sqrt{z^2}} \times \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{5\sqrt{z}}{z} \quad (z \neq 0)$

کافی است صورت و مخرج کسر داده شده را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا عدد رادیکالی مخرج، از حالت رادیکالی خارج شود.

۷۶

کاردرکلاس

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

ب)  $\frac{2}{\sqrt{3^2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4 \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

ج)  $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$

د)  $\frac{5}{\sqrt{3x}} = \frac{5}{\sqrt{3x}} \times \frac{\sqrt{(3x)^2}}{\sqrt{(3x)^2}} = \frac{5\sqrt{9x^2}}{3x} \quad (x \neq 0)$

۷۶

تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف)  $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72} = 2\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{36 \times 2} = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

ب)  $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{64 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ج)  $\sqrt[3]{27\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

د)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}} = \frac{-\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = -\frac{3}{4}$

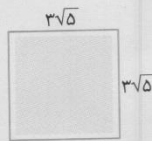
هـ)  $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{10} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{5} \times \sqrt{10} - \sqrt{5} \times \sqrt{2}$   
 $= \sqrt{20} + 2 - \sqrt{50} - \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$

و)  $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3} = 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

۲- اگر  $x < 0$  باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$2\sqrt{x^2} - x = 2|x| - x \stackrel{x < 0}{=} 2(-x) - x = -2x - x = -3x$

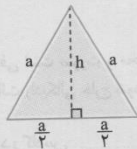
۳- محیط و مساحت مربعی به طول  $3\sqrt{5}$  سانتی متر را به دست آورید.



سانتی متر مربع  $3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 9 \times 5 = 45$

سانتی متر  $3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع  $a$  نشان می‌دهد. اندازه ارتفاع  $h$  را بر حسب  $a$  به دست آورید؛ سپس مساحت آن را بر حسب  $a$  بنویسید. طبق رابطه فیثاغورس داریم:



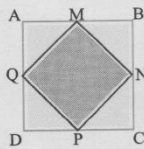
$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$\Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۵- نقاط  $M, N, P, Q$  وسط‌های اضلاع مربع  $ABCD$  هستند. اگر مساحت مربع  $ABCD$ ،  $100$  متر مربع باشد. محیط مربع  $MNPQ$  چقدر است؟



روش ۱: ابتدا طول ضلع مربع  $ABCD$  را می‌یابیم:  $\sqrt{100} = 10$   
 بنابراین  $MB = BN = 5$ ، حال طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$MN^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow MN = \sqrt{50}$

$\Rightarrow$  مساحت مربع  $MNPQ = (\sqrt{50})^2 = 50$  متر مربع

روش ۲: ابتدا ضلع مربع  $ABCD$  را می‌یابیم:  $\sqrt{100} = 10$

طول ضلع به دست آمده همان طول قطر مربع  $MNPQ$  (لوزی) است. حال طبق فرمول مساحت لوزی داریم:

مساحت لوزی  $= \frac{10 \times 10}{2} = 50$

۷۶

نهم (دوره اول متوسطه)

۶- در جاهای خالی علامت < یا > یا = بگذارید:

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \square \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 \quad 4 \square \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \square \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \quad 5 = \sqrt{25} = \sqrt{3^2+4^2} \square 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید:

الف)  $\sqrt{100} = 10$       ب)  $2\sqrt{9} = 6$       ج)  $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$       د)  $\sqrt[3]{8} = 2$

ه)  $\frac{2-5}{3-8} = \sqrt{64} = 8 = 2^2$       و)  $\frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3$       ز)  $\frac{m^6 \times m^{-2}}{m^3} = m$       ح)  $9\sqrt{-27} = \frac{12^3}{(-4)^3}$

$9\sqrt{-27} = 9(-3) = (-3)^2$

۸- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$       ب)  $\frac{2}{\sqrt{a^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{a}$

ج)  $\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

۹- آیا تساوی  $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$  همیشه درست است؟ توضیح دهید.

- الف) تساوی همیشه درست است. نادرست، اعداد منفی را نمی‌توان به جای  $x$  قرار داد.  
 ب) تساوی همیشه نادرست است. نادرست، اعداد نامنفی را می‌توان به جای  $x$  قرار داد.  
 ج) اگر  $x \geq 0$  تساوی درست است. درست است.

### ارزنیابی مستمر

۱- جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. (۲ نمره)

الف)  $\sqrt{\square} = 13$       ب)  $3\sqrt{\square} = 6$       ج)  $\sqrt[3]{\square} = 1$       د)  $\frac{3^7}{3^2} = 3^{\square}$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۴)

الف)  $\sqrt{12} + 3\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - \sqrt{3}$       ب)  $3\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{3}$

ج)  $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$       د)  $\sqrt{5 + \frac{1}{64} + \frac{1}{8}}$

۳- اگر  $x < 0$  حاصل عبارت  $2\sqrt{x^2} - 3x$  را بیابید. (۲)

۴- مخرج عبارت‌های زیر را گویا کنید. (۱)

الف)  $\sqrt{\frac{3}{5}}$       ب)  $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

### پاسخ ارزنیابی مستمر

الف)  $\sqrt{\square} = 13 \Rightarrow \square = 13^2 = 169$  (۵/۵)

ب)  $3\sqrt{\square} = 6 \Rightarrow \sqrt{\square} = 2 \Rightarrow \square = 4$  (۵/۵)

ج)  $\sqrt[3]{\square} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\square} = 3 \Rightarrow \square = 27$  (۵/۵)

د)  $\frac{3^7}{3^2} = 3^{\square} \Rightarrow 3^5 = 3^{\square} \Rightarrow \square = (3^5)^3 = 3^{15}$  (۵/۵)

الف)  $\sqrt{12} + 3\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} + 3\sqrt{4 \times 2} + 2\sqrt{9 \times 2} - \sqrt{3}$   
 $= 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 12\sqrt{2}$  (1)

ب)  $3\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{2 \times 8 \times 3} - 2\sqrt[3]{27 \times 2} - 2\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2}$  (1)

ج)  $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3}$   
 $= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$  (1)

د)  $\sqrt{2 + \frac{1}{64} + \frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{128 + 1 + 40}{64}} = \sqrt{\frac{169}{64}} = \frac{13}{8}$  (1)

$2\sqrt{x^2} - 3x = 2|x| - 3x \stackrel{x < 0}{=} -2x - 3x = -5x$   
 (1) (0/5) (0/5)

الف)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$  (0/5)      ب)  $\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{4}}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{4}}{2}$  (0/5)

**آزمون کشی**

بیشتر فصل ۴      مدت: ... دقیقه

- ۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
- الف) با معکوس کردن پایه یک عدد توان دار، توان آن ..... می شود.
- ب) اگر یک عدد اعشاری را بر ۱۰۰۰ تقسیم کنیم، ممیز آن ..... رقم به عقب برمی گردد.
- ج) اگر  $x$  عددی منفی باشد، حاصل  $\sqrt{x^2}$  برابر با ..... است.
- د) اگر مساحت کل یک مکعب ۱۵۰ باشد، حجم آن ..... است.

- ۲- در جای خالی علامت  $(>)$  یا  $(<)$  قرار دهید.
- الف)  $2^{-1} \square 2^{-2}$       ب)  $(-5)^{-2} \square (-5)^{-3}$
- ج)  $(\frac{8}{15})^0 \square 1$       د)  $3^{-1} \square 0$

- ۳- عددهای زیر را با توان منفی بنویسید.
- الف)  $(\frac{1}{25})^4$       ب)  $\frac{1}{37}$

- ۴- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.
- الف)  $(\frac{2}{5})^{-2} + (\frac{5}{3})^{-2}$       ب)  $[-(-\frac{1}{2})^{-3}]^{-2}$

- ۵- حاصل عبارت  $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 4}{4^{-5} \times 15^{-5}}$  را بیابید.

- ۶- عددهای A و B را با نماد علمی بنویسید و عددهای C و D را به صورت اعشاری برگردانید.
- A = ۰/۰۰۰۳۱۵      B = ۲۸۰۰۰۰۰      C = ۳/۱ × ۱۰<sup>-۳</sup>      D = ۳ × ۱۰<sup>۷</sup>

- ۷- حاصل عبارت های زیر را بیابید.
- الف)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$       ب)  $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{4}$       ج)  $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt[3]{-3}}$       د)  $\frac{\sqrt{A} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

نهم / دوره اول متوسطه

۸- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

۹- مخرج کسر  $\frac{5}{\sqrt{3x}}$  را گویا کنید.

## پایخ سوالات امتحانی

۱ الف) قرینه (ب) سه (ج)  $|x|$  (د) ۱۲۵ (هر قسمت ۰/۲۵)

۲ (هر قسمت ۰/۲۵)

الف)  $3^{-1} \geq 3^{-2}$       ب)  $-5^{-2} \leq (-5)^{-2}$       ج)  $(\frac{-1}{15})^0 \equiv 1$       د)  $3^{-1} \geq 0$

الف)  $(\frac{0}{25})^4 = (\frac{100}{25})^{-4} = 3^{-4}$  (۰/۲۵)

ب)  $\frac{1}{3^7} = 3^{-7}$  (۰/۲۵)

الف)  $(\frac{2}{5})^{-2} + (\frac{5}{3})^{-2} = (\frac{5}{2})^2 + (\frac{3}{5})^2 = \frac{25}{4} + \frac{9}{25} = \frac{625+36}{100} = \frac{661}{100} = 6/61$  (۰/۵)

ب)  $[(-\frac{1}{3})^{-2}]^{-2} = [(-\frac{1}{3})^{-2}]^{-2} = (-\frac{1}{3})^{+4} = \frac{1}{81}$  (۰/۵)

$\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 4}{4^{-5} \times 10^{-5}} = \frac{3^0 \times 4}{60^{-5}} = (\frac{2}{3})^{-5} \times 4 = (\frac{1}{3})^{-5} \times 4 = 3^5 \times 4 = 27 \times 4 = 108$  (۰/۵)

A =  $0/000315 = 3/15 \times 10^{-4}$  (۰/۲۵)

B =  $2800000 = 2/8 \times 10^6$  (۰/۲۵)

C =  $3/1 \times 10^{-3} = 0/0031$  (۰/۲۵)

D =  $3 \times 10^7 = 30000000$  (۰/۲۵)

الف)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -\sqrt{5}-2$  (۰/۵)

ب)  $\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{-12} = -2$  (۰/۵)

ج)  $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{-3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{-3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$  (۰/۵)

د)  $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = 2$  (۰/۵)

$\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$  (۰/۲۵)

$\frac{5}{\sqrt[3]{3x}} = \frac{5}{\sqrt[3]{3x}} \times \frac{\sqrt[3]{(3x)^2}}{\sqrt[3]{(3x)^2}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$  (۰/۵)

دانش آموزان عزیز برای مطالعه آزمون پایانی دی ماه به انحصار کتاب مراجعه نمایند.



فصل ۵ - عبارات جبری

۱ - عبارات جبری و مفهوم اتحاد

کلیدز سر

با بزرگترین درجه نسبت به آن متغیر در آن عبارت. همچنین درجه نسبت به چند متغیر در یک چند جمله‌ای برابر است با بزرگترین درجه‌ی یک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای مورد نظر.

مثال: در عبارت  $3xy^3 - 2xy - 4x^2$  درجه نسبت به متغیر  $x$  برابر ۲ و درجه نسبت به  $y$  برابر ۳ است و درجه نسبت به  $x$  و  $y$  برابر با  $1+2$  یعنی ۳ است.

نکته ۸: هرگاه در یک چندجمله‌ای جملات را نسبت به یک متغیر از توان بیشتر به توان کمتر (از چپ به راست) مرتب کنیم، می‌گوییم آن چندجمله‌ای را برحسب آن متغیر به صورت استاندارد نوشته‌ایم.

مثال: اگر عبارت  $2x^2y - 3x^3 - 2x$  را برحسب  $x$  استاندارد کنیم، به صورت  $-3x^3 + 2x^2y - 2x$  درمی‌آید.

نکته ۹: برای ضرب دو چند جمله‌ای، تک تک جمله‌های عبارت اول را باید در تک تک جمله‌های عبارت دوم ضرب کنیم و در آخر عبارت را ساده کنیم.

$$(x^2 - 2)(x^2 + 4x + 4) =$$

$$x^4 - 2x^2 - 2x^3 - 8x - 8 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 8x - 8$$

نکته ۱۰: هر تساوی جبری را که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، برقرار باشد، یک اتحاد جبری نامیده می‌شود.

مثال: عبارت  $2x - 3 = -x + 1$  یک معادله است ولی یک اتحاد نیست زیرا این تساوی برای  $x = 1$  برقرار نیست.

مثال: عبارت  $x + x = 2x$  یک اتحاد است زیرا به ازای هر مقداری تساوی برقرار است.

نکته ۱۱: اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

$$(2x-y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(y) + y^2$$

$$= 4x^2 - 4xy + y^2$$

$$(x^2 + 2y^2)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(2y^2) + (2y^2)^2 =$$

$$x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$$

نکته ۱۲: هرگاه بتوانیم یک عبارت را به صورت ضرب چند عبارت دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن عبارت را تجزیه کرده‌ایم.

یکی از روش‌های تجزیه فاکتورگیری است. مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف)  $2x^2y - 4xy^2 = 2xy(x - 2y)$

ب)  $6x^2ab - 2x + 4x^2 = 2x(3xab - 1 + 2x)$

نکته ۱: به حاصل ضرب اعداد حقیقی در چند متغیر، یک جمله‌ای گفته می‌شود. هر یک جمله‌ای از دو بخش تشکیل شده است. یکی ضریب عددی و دیگری عبارت حرفی. برای مثال

در یک جمله‌ای  $\frac{2}{3}x^2y$ ، عدد  $\frac{2}{3}$  را ضریب می‌گویند و  $x^2y$  قسمت حرفی آن است.

نکته ۲: در یک جمله‌ای‌ها توان متغیرها باید عددی طبیعی باشد. همچنین متغیرها نباید زیر رادیکال یا با توان مثبت در مخرج قرار داشته باشند یا دارای قدر مطلق باشند.

مثال: عبارت‌های  $2x, -3xy, \sqrt{2x^2y}, \frac{xy}{3}$  همگی یک جمله‌ای هستند.

مثال: عبارت‌های  $\sqrt{x}, \frac{2}{x}, 2x^3, 2|x|$  یک جمله‌ای نیستند.

نکته ۳: هرگاه در دو یک جمله‌ای، قسمت حرفی آن‌ها یکسان باشد، می‌گوییم این یک جمله‌ای‌ها مشابه هستند. مثلاً دو یک جمله‌ای  $2x^2y, 3x^2y$  مشابه هستند.

مثال: دو یک جمله‌ای  $2x^2y^2$  و  $-x^2y^2$  مشابه نیستند زیرا در قسمت حرفی آن‌ها توان  $x$ ها یکسان نیست.

نکته ۴: در یک جمله‌ای‌ها توان هر متغیر را درجه آن یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌گوییم. مثلاً در یک جمله‌ای

$2x^2y^3$  درجه نسبت به  $x$  برابر ۲ و درجه نسبت به  $y$  برابر ۳ است. همچنین درجه یک جمله‌ای نسبت به تمام متغیرهایش از جمع کردن توان‌های تمام متغیرها حاصل می‌شود. مثلاً در یک جمله‌ای  $2x^2y^3$  درجه نسبت به تمام متغیرها ۵ است. زیرا  $2+3=5$ .

نکته ۵: برای ضرب دو یک جمله‌ای، ضریب‌های عددی آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و قسمت حرفی آن‌ها را نیز با استفاده از قواعد اعداد توان‌دار در هم ضرب می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم یک جمله‌ای‌های  $\frac{2}{3}xz, -2xy^2$  را در هم ضرب کنیم:

$$\left(\frac{2}{3}xz\right) \times (-2xy^2) = \left(\frac{2}{3} \times -2\right) (xy^2xz) = -\frac{4}{3}x^2y^2z$$

نکته ۶: هرگاه چند یک جمله‌ای غیرمتشابه را جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، یک چند جمله‌ای به دست می‌آید. توجه کنید که یک جمله‌ای‌ها خود چند جمله‌ای به شمار می‌روند.

مثال: عبارت  $-2xy - 3x^2 + \frac{1}{3}x$  یک سه جمله‌ای است.

نکته ۷: درجه یک چند جمله‌ای نسبت به یک متغیر برابر است

پنجم (دوره اول متوسطه)



ب)  $n^7 + 10n^2 + 25 = (n^2)^2 + 2 \times 5 \times n^2 + 5^2$

$(n^2 + 5)^2 = (n^2 + 5)(n^2 + 5)$

ج)  $25x^7 + 30x^2 + 9x^2 = x^2(25x^5 + 30x + 9)$

$= x^2((5x)^2 + 2 \times (5x)(3) + 3^2)$

$= x^2(5x + 3)^2 = x^2(5x + 3)(5x + 3)$

نکته ۱۳: یکی دیگر از روش‌های تجزیه استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای است. برای این کار ابتدا جملات عبارت داده شده را با صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای مقایسه می‌کنیم (یعنی  $a$  و  $b$  را مشخص می‌کنیم) سپس عبارت داده شده را به شکل  $(a+b)^2$  یا  $(a-b)^2$  می‌نویسیم.

مثال: تجزیه کنید.

الف)  $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times (2x) + 2^2 =$

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$

۷۹

## فعالیت

۱- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

۱)  $2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$

۲)  $(\frac{2}{3}x^2y)^3 = (\frac{2}{3})^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$

۳)  $(-3x^3)^2 (\frac{1}{5}x^2)^3 = (-3)^2 \cdot (x^3)^2 \cdot (\frac{1}{5})^3 \cdot (x^2)^3 = 9 \cdot \frac{1}{125} \cdot x^6 \cdot x^6 = \frac{9}{125}x^{12}$

۴)  $(\frac{1}{4}a^2b)(ab)(-\frac{2}{5}a^2c^5) = \frac{1}{4}(-\frac{2}{5})a^2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b \cdot c^5 = -\frac{1}{10}a^5b^2c^5$

۵)  $2(\Delta xy^2)^2 (-2x^5y^2) = 2 \cdot \Delta^2 \cdot x^4 \cdot (y^2)^2 \cdot (-2x^5y^2)$

$= (2)(2\Delta)(-2)(x^4 \cdot x^5) \cdot (y^4 \cdot y^2) = -10\Delta x^9y^6$

۶)  $(2x^2y)(3x^2y^3) + xy^3(-5x^3y) = 6x^4y^4 - 5x^4y^4 = x^4y^4$

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	۲ + ۴ = ۶
$\Delta x^2y^2z^4$	x, y, z	۲	۲	۲ + ۲ = ۴
$-12x^3u$	x و u	۳	صفر	۳
$\frac{3}{5}$	-	صفر	صفر	صفر

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف)  $3x^2 + 5 - 2x + 2x^3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

ب)  $-3bxy^3 + ax^2y - 4bx^3y^2 = -4bx^3y^2 + ax^2y - 3bxy^3$

ج)  $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^3y - 4 = 3x^3y + \frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^3 - 4$

۸۰

## کاردرکلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف)  $-5a^2 - 3ax + x^2 - [fa^2 + 5ax - (\frac{2}{3}a^2 - 8ax)] = -5a^2 - 3ax + x^2 - fa^2 - 5ax + \frac{2}{3}a^2 + 8ax$   
 $= x^2 - 16ax - 6a^2$

ب)  $(4x + 5x^2)(x^3 - x + 1) = 4x^4 - 4x^2 + 2x + 5x^5 - 5x^3 + 5x^2 = 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 2x$

ج)  $(x + x^2)(x^6 + x^2 + 1) = x^7 + x^3 + x + x^8 + x^4 + x^2 = x^8 + x^7 + x^4 + x^3 + x^2 + x$

$$\begin{aligned}
 \text{د) } (x^2 - 2x + 1)(x^2 + x^2 - 2) &= (x^2)(x^2) + (x^2)(x^2) + (x^2)(-2) \\
 &+ (-2x)(x^2) + (-2x)(x^2) + (-2x)(-2) + x^2 + x^2 - 2 = x^4 + x^4 - 2x^2 - 2x^2 - 2x^2 + 4x + x^2 + x^2 - 2 \\
 &= x^4 - x^2 - x^2 - x^2 + 4x - 2
 \end{aligned}$$

فعالیت  
 ۸۱  
 ۱- به ازای مقادیر داده شده برای  $x$ ، جدول زیر را کامل کنید:

$x$	$x^2$	$6x$	$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$
-۲	۳	-۱۲	۱	۱
۰	۰	۰	۹	۹
۵	۲۵	۳۰	۶۴	۶۴
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۹}{۴}$	۹	$\frac{۸۱}{۴}$	$\frac{۸۱}{۴}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید: نتیجه چیست؟ مقادیر هر دو ستون برابرند. حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر  $x$  ادامه دهید.

$x$	$x^2$	$6x$	$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$
-۱	۱	-۶	۴	۴
۲	۴	۱۲	۲۵	۲۵
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	۳	$\frac{۴۹}{۴}$	$\frac{۴۹}{۴}$

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حدس می‌زنیم به ازای هر عدد حقیقی دیگری که محاسبات را انجام دهیم، حاصل دو ستون آخر با هم برابر شود. حاصل عبارت جبری  $(x+3)^2$  را به دست آورید و آن را با عبارت جبری  $x^2 + 6x + 9$  مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

حاصل عبارت  $(x+3)^2$  با عبارت  $x^2 + 6x + 9$  برابر است.

بنابراین برابری  $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$  یک اتحاد است.

برابری  $3x - 3 = x + 1$  را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای  $x = 2$ ، به دست آورید.

$$3 \times 2 - 3 = 2 + 1 \Rightarrow 3 = 3$$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ خیر، زیرا به ازای هر مقدار دیگر مطمئن نیستیم تساوی برقرار باشد.

برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای  $x$  بررسی کنید.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 3 \times 0 - 3 = -3 \\ x + 1 = 0 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow -3 \neq 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 3 \times 1 - 3 = 0 \\ x + 1 = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq 2$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف)  $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

ب)  $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2) = 25x^2 + 10x + 10x + 4 = 25x^2 + 20x + 4$

ج)  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

۸۱

نهم (دوره اول متوسطه)

دوره اول

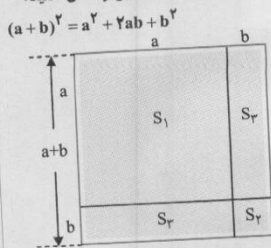
۳- با دقت در برابری  $25x^2 + 20x + 4 = (5x+2)^2$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:  
 - جمله اول سمت راست برابری یعنی  $25x^2$  چه رابطه‌ای با  $5x$  دارد؟  $25x^2$  مربع  $5x$  (توان دوم  $5x$ ) است.  
 - جمله دوم سمت راست برابری یعنی  $20x$  چه رابطه‌ای با  $2$  و  $5x$  دارد؟  $20x$  از دو برابر کردن حاصل ضرب  $2$  و  $5x$  به دست می‌آید.

- جمله سوم سمت راست برابری یعنی  $4$  چه رابطه‌ای با  $2$  دارد؟  $4$  مربع عدد  $2$  است. (توان دوم عدد  $2$  است).  
 عبارت جبری  $5x+2$  دوجمله‌ای و  $(5x+2)^2$  را مربع دوجمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دوجمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$(5x + 2)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2$$

مربع جمله دوم      دو برابر حاصل ضرب دو جمله      مربع جمله اول

برای هر دو عدد مثبت  $a$  و  $b$ ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد مقابل را نشان دهید.



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مساحت کل شکل =  $(a+b)^2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف)  $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 25x^2 - 20x + 4$

ب)  $(3x-5x)^2 = 9x^2 - 15x^2 - 15x^2 + 25x^2 = 9x^2 - 30x^2 + 25x^2 = 4x^2$

ج)  $(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده در سمت چپ آنها را بیان کنید. عبارت سمت راست برابر است با مربع جمله اول در پرانتز سمت چپ منهای دو برابر حاصل ضرب دوجمله‌ای داخل پرانتز سمت چپ به اضافه مربع جمله دوم داخل پرانتز سمت چپ تساوی.

کار در کلاس

۸۳

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف)  $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

ب)  $(4a+3b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot (4a)(3b) + (3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$

ج)  $(x^2 - \frac{1}{y})^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot (x^2) \cdot (\frac{1}{y}) + (\frac{1}{y})^2 = x^4 - \frac{2x^2}{y} + \frac{1}{y^2}$

د)  $(2xy - \frac{1}{y}x^2)^2 = (2xy)^2 - 2(2xy)(\frac{1}{y}x^2) + (\frac{1}{y}x^2)^2 = 4x^2y^2 - 2x^3y + \frac{1}{y}x^4$

ه)  $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})^2 = 2 + 6\sqrt{6} + 27 = 29 + 6\sqrt{6}$

و)  $(5 - 2\sqrt{2})^2 = 5^2 - 2(5)(2\sqrt{2}) + (2\sqrt{2})^2 = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پر کنید.

$$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول مربع جمله اول مربع جمله اول  
 مربع جمله اول =  $4a^2 = (2a)^2 \Rightarrow$  مربع جمله اول  
 $12ab = 2(2a)(3b) = 12ab^2$  دو برابر حاصل ضرب جمله

در نتیجه داریم:

$$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$$(1 + b)^2 = 1 + 2b + b^2$$

$$(1 + b)^2 = 1 + 2b + b^2$$

$$(x - \frac{1}{y})^2 = x^2 - \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^2}$$

$$(xy - \frac{1}{y})^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{y^2}$$

$$(xy)^2 = x^2y^2$$

$$(x^2 - \frac{1}{x})^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$x^2 = (x^2)^2 \Rightarrow$$
 مربع جمله اول

$$\frac{1}{x^2} = (\frac{1}{x^2})^2 \Rightarrow$$
 مربع جمله دوم

$$2(x^2)(\frac{1}{x^2}) = 2$$
 دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها

$$(6x - y)^2 = 36x^2 - 12xy + y^2$$

$$6x = (6x)^2 \Rightarrow$$
 مربع جمله اول

$$12xy = 2(6x)y \Rightarrow$$
 دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها

### ۸۳

### فعالیت

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:  
 (با توجه به خاصیت پخش)

$$8x^2 + 12x = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3 = 4x(2x + 3)$$

$$6a^2 - 18a^3 = (6a^2 \cdot a) - (6a^2 \cdot 3) = 6a^2(a - 3)$$

$$7x^2 - 14x^3 + 21x^4 = (7x^2)(x^2) - (7x^2)(2x) + (7x^2)(3) = 7x^2(x^2 - 2x + 3)$$

$$5x^2y - 10xy^2 + 15x^3y = (5xy) \cdot x - (5xy) \cdot (2y) + (5xy) \cdot (3x) = 5xy(x - 2y + 3x)$$

### ۸۴

### کار در کلاس

باتوجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه درسه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

مربع کامل مربع کامل

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$$

$$2(x)(3)$$

در این سه جمله ای دو جمله ای مربع کامل داریم که عبارتند از  $x^2$  و  $9$ . توجه کنید که جمله ای دیگر، دو برابر حاصل ضرب جذر  $x^2$  و  $9$  است. پس با استفاده از مربع دو جمله ای تجزیه می شود. ( $6x = 2(x)(3)$ )

ب)  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = (x-2)(x-2)$

توجه کنید که  $4x = 2(x)(2)$

ج)  $n^2 - 10n^2 + 25 = (n^2 - 5)^2 = (n^2 - 5)(n^2 - 5)$

توجه کنید که  $10n^2 = 2(n^2)(5)$

د)  $12ax^2 + 24axy + 12ay^2 = 12a(x^2 + 2xy + y^2) = 12a(x+y)^2 = 12a(2x+2y)(2x+2y)$

$12xy = 2(2x)(2y)$  (م.م.ب) =  $2a$

توجه کنید که  $12xy = 2(2x)(2y)$

تمرین

۱- عبارتهای جبری زیر را ساده کنید.

الف)  $(-5m)^2(-2m)^3 - (\frac{1}{4}m)^2(-2m)^3 = (25m^2)(-8m^3) - (\frac{1}{16}m^2)(-8m^3)$

$= -200m^5 + 2m^5 = -198m^5$

ب)  $7a^3 - 4b^3 + 5c^3 - (a^3 - 9b^3 - 11c^3) = 7a^3 - 4b^3 + 5c^3 - a^3 + 9b^3 + 11c^3$

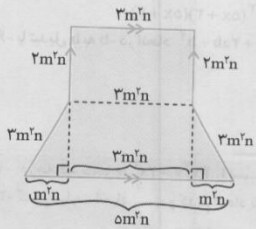
$= 6a^3 + 5b^3 + 16c^3$

ج)  $(x^m - 1)(x^m - 1) = (x^m)^2 - x^m - x^m + 1 = x^{2m} - 2x^m + 1$

د)  $x - [(y-x) - (y-1)] = x - [y - x - y + 1] = x - (-x + 1) = x + x - 1 = 2x - 1$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.

(الف)



شکل محیط  $= 3m^2n + 2m^2n + 3m^2n$

$+ 5m^2n + 3m^2n + 2m^2n = 18m^2n$

مساحت  $=$  مساحت دوزنقه  $+$  مساحت مستطیل  $=$  مساحت شکل

مستطیل  $= (2m^2n)(3m^2n) = 6m^4n^2$

حال با استفاده از رابطه فیثاغورس ارتفاع دوزنقه را می یابیم:

(ارتفاع)  $= (3m^2n)^2 - (m^2n)^2$

$= 9m^4n^2 - m^4n^2 = 8m^4n^2$

ارتفاع  $= \sqrt{8m^4n^2} = 2\sqrt{2}m^2n$

ب) قطعه ای از ضلع پایین که نامعلوم است، با توجه به رابطه فیثاغورس به صورت زیر به دست می آید:

$(\Delta xy)^2 - (2xy)^2 = A^2$

$25x^2y^2 - 4x^2y^2 = 16x^2y^2 = A^2 \Rightarrow A = 4xy$

شکل محیط  $= 2xy + 5xy + 4xy$

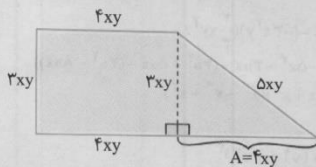
$+ 4xy + 2xy = 18xy$

مساحت دوزنقه  $=$  مساحت شکل

$= \frac{(4xy + 8xy)2xy}{2} = 12x^2y^2$

مساحت دوزنقه  $= \frac{(3m^2n + 5m^2n) \times 2\sqrt{2}m^2n}{2} = 8\sqrt{2}m^4n^2$

مساحت کل شکل  $= 6m^4n^2 + 8\sqrt{2}m^4n^2 = (6 + 8\sqrt{2})m^4n^2$



۳- طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف)  $(\Delta y - 3x)^2 = (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)(3x) + (3x)^2 = 2\Delta y^2 - 3\Delta yx + 9x^2$

ب)  $(-3a^2 - a)^2 = (-3a^2)^2 - 2(-3a^2)(a) + (a)^2 = 9a^4 + 6a^3 + a^2$

ج)  $(Ax - \frac{1}{a})^2 = (Ax)^2 - 2(Ax)(\frac{1}{a}) + (\frac{1}{a})^2 = 64x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$

د)  $(2/7)^2 + 2(2/7)(3/3) + (3/3)^2 = (2/7 + 3/3)^2 = (6)^2 = 36$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

نشان می‌دهیم حاصل سمت چپ تساوی با سمت راست تساوی برابر است:

$$\left. \begin{aligned} (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

ب)  $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

سمت چپ  $= (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف)  $2x^3 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 4x + 4) = 2x(x+2)^2 = 2x(x+2)(x+2)$

ب)  $3a^3b - 12ab^3 + a^3b^3 = ab(3a^2 - 12b^2 + a^2b^2)$

ج)  $a(x+1) + b(x+1)^2 = (x+1)[a + b(x+1)]$

د)  $a^2 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a-1)^2 = a(a-1)(a-1)$

ه)  $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy)^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2 = (xy-2)(xy-2)$

و)  $2\Delta x^2 + 3\Delta x^2 + 9x^2 = x^2(2\Delta x^2 + 3\Delta x + 9) = x^2(\Delta x + 3)^2 = x^2(\Delta x + 3)(\Delta x + 3)$

۶- با تبدیل  $b$  به  $-b$  در اتحاد  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$(a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ارزشیابی مستمر

۱- درجه عبارت  $3x^2y - 2x^3 + 1$  را نسبت به  $x$  و نسبت به  $y$  بنویسید. (۰/۵)

۲- کدام عبارت اتحاد است و کدام اتحاد نیست؟ چرا؟ (۱/۵)

الف)  $3x(x+1) = 3x^2 + 3x$       ب)  $2x^2 - 3 = x + 1$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۳ نمره)

الف)  $(-3x^2y)(\frac{1}{3}xy^2z)$

ب)  $-5a^2 - 3ax - (4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax))$

ج)  $(x+x^2)(x^2-x^3+x^4)$

۴- به کمک اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید. (۲)

ب)  $(6x^2 - 1)^2$

۵- تجزیه کنید. (۴)

الف)  $5x^2y - 10xy^2 - 15xy$

ب)  $x^2 - 4x + 4$

ج)  $x^6 + 10x^3 + 25$

د)  $2ax^2 - 12ax + 18a$



سوالنامه

## پایه نهم ارزشیابی مستمر

۱ 
$$3x^2y - 2x^2 + 1 \quad \begin{cases} 3 = x & \text{درجه نسبت به } (0/25) \\ 1 = y & \text{درجه نسبت به } (0/25) \end{cases}$$

۲ الف اتحاد است زیرا این تساوی به ازای هر مقدار حقیقی برقرار است.

$$3x(x+1) = (3x)(x) + (3x)(1) = 3x^2 + 3x \quad (0/75)$$

ب) اتحاد نیست زیرا مثلاً برای  $x=1$  تساوی برقرار نیست.

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 3 \times 1^2 - 3 = 3 - 3 = 0 & \text{(سمت چپ تساوی)} \\ x+1 = 1+1 = 2 & \text{(سمت راست تساوی)} \end{cases} \Rightarrow 0 \neq 2$$

۳ الف 
$$(-3x^2y)(\frac{1}{3}xy^2z) = 2x^2y^2z \quad (1)$$

ب 
$$-5a^2 - 3ax - (2a^2 + 5ax - (2a^2 - 8ax)) = -5a^2 - 3ax - 2a^2 - 5ax + 2a^2 + 8ax = -5a^2 - 16ax \quad (1)$$

ج 
$$(x+x^2)(x^5 - x^3 + x^2) = x^6 - x^4 + x^5 + x^7 - x^5 + x^4 = x^7 + x^4 \quad (1)$$

۴ الف 
$$(\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times (3\sqrt{2}) + (3\sqrt{2})^2$$
  

$$= 2 + 6\sqrt{4} + 18 = 20 + 6\sqrt{4} \quad (1)$$

ب 
$$(6x^2 - 1)^2 = (6x^2)^2 - 2 \times (6x^2)(1) + (-1)^2 = 36x^4 - 12x^2 + 1 \quad (1)$$

۵ الف 
$$5x^2y - 10xy^2 - 15xy = 5xy(x - 2y - 3) \quad (1)$$

ب 
$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad (1)$$

ج 
$$x^2 + 10x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2 = (x^2 + 5)(x^2 + 5) \quad (1)$$

د 
$$2ax^2 - 12ax + 18a = 2a(x^2 - 6x + 9) = 2a(x-3)^2 = 2a(x-3)(x-3) \quad (1)$$

## چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

ب 
$$-\frac{1}{25} + y^2 = y^2 - \frac{1}{25} = (y - \frac{1}{5})(y + \frac{1}{5})$$

ج 
$$49x - 4x^2 = x(49 - 4x) = x(7 - 2x)(7 + 2x)$$
  
 نکته ۱: اتحاد یک جمله مشترک به صورت زیر است:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به کمک اتحاد یک جمله مشترک، بنویسید.  
 الف 
$$(2x-2)(2x+5)$$

$$= (2x)^2 + (-2+5)(2x) + (-2 \times 5) = 4x^2 + 6x - 10$$

مثال: به کمک اتحاد یک جمله مشترک، تجزیه کنید.

الف 
$$x^2 - 4x - 5 = x^2 + (-5+1)x + (-5 \times 1)$$

$$= (x-5)(x+1)$$

ب 
$$4x^2 - 2x - 2 =$$

$$(2x)^2 + (-2+1)(2x) + (-2 \times 1) = (2x-2)(2x+1)$$

۲۲۵

نکته ۱۴: تساوی زیر به اتحاد مزدوج معروف است. این اتحاد می‌گوید برای ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آن دو جمله، مربع جمله اول را منهای مربع جمله دوم می‌کنیم.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد مزدوج بنویسید.

الف 
$$(2x-2)(2x+2) = (2x)^2 - 2^2 = 4x^2 - 4$$

ب 
$$(x^2+3y)(x^2-2y) = (x^2)^2 - (2y)^2 = x^4 - 4y^2$$

ج 
$$1001 \times 999 = (1000+1)(1000-1) = 1000^2 - 1^2$$

$$= 1000000 - 1 = 999999$$

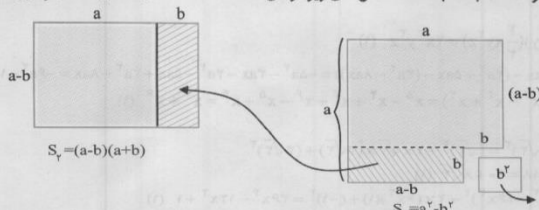
نکته ۱۵: از اتحاد مزدوج می‌توان برای تجزیه کمک گرفت.

فقط باید دو جمله مختلف‌العلامت باشند که تک‌تک جمله‌های آن را بتوان به صورت مربع نوشت.

مثال: تجزیه کنید.

الف 
$$9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$$

۱- حاصل عبارت زیر را با دو روش ارائه شده انجام داده و آنها را کامل کنید.  
 روش اول:  $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$   
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$   
 روش دوم:  $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$   
 به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.  
 $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$   
 ۲- با استفاده از ضرب عبارت‌های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.  
 $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$   
 اگر  $a$  و  $b$  مثبت و  $b < a$  باشد به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  را نتیجه بگیرید.



مساحت شکل سمت راست  $= a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ba + ba - b^2 = a^2 - b^2$   
 قسمت هاشورخورده از شکل (۱) را برداشته و به سمت راست آن اضافه می‌کنیم. شکل (۲) حاصل خواهد شد.  
 مساحت شکل ۲ را به دست می‌آوریم:  
 مساحت شکل سمت چپ  $= (a-b)(a+b)$   
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$   
 چون دو مساحت باید با هم برابر باشند پس داریم:  
 این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید.  
 حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل آن‌ها برابر است با تفاضل مربع عدد اول از مربع عدد دوم.

- ۱- تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.
- ۱)  $(1+a)(1-a) = 1 - a^2$
  - ۲)  $(2a+5)(2a-5) = 4a^2 - 25$
  - ۳)  $(t+3)(t-3) = t^2 - 9$
  - ۴)  $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$
- ۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید؟
- ۱)  $(1-x)(x+1) = (1-x)(1+x) = 1 - x^2$
  - ۲)  $(-y-2z)(-2z+y) = -(2z-y)(-2z+y) = 4z^2 - y^2$
  - ۳)  $(-7y+t)(t+7y) = (t-7y)(t+7y) = t^2 - 49y^2$
  - ۴)  $(-4y-2z)(2z-4y) = -(2z+4y)(2z-4y) = -4z^2 + 16y^2$
  - ۵)  $(x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] = x^2 - (2y-5)^2$

### فعالیت

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود. با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

۱)  $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

۲)  $4y^2 - \frac{1}{9}z^2 = (2y + \frac{1}{3}z)(2y - \frac{1}{3}z)$

۳)  $(2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - y][(2x+1) + y]$

۴)  $1 - (3a+z)^2 = [1 - (3a+z)][1 + (3a+z)] = (1-3a-z)(1+3a+z)$

۵)  $(2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(2x+1) - (3x+4)][(2x+1) + (3x+4)] = (-x-3)(5x+5)$

۶)  $x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$

### کار در کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری، به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟  
او A را همان  $2x$  و B را همان  $(7-3y)$  در نظر گرفته است.

$$\begin{aligned} (2x-7+3y)(2x+7-3y) &= \left(\frac{2x}{a} - \frac{(7-3y)}{b}\right)\left(\frac{2x}{a} + \frac{(7-3y)}{b}\right) \\ &= (2x)^2 - (7-3y)^2 = 4x^2 - (7-3y)^2 \end{aligned}$$

۲- استفاده از اتحادها، می‌تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان‌پذیر کند. به کمک اتحادها تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100-2) \times (100+2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$497 \times 503 = (500-3) \times (500+3) = 500^2 - 3^2 = 250000 - 9 = 249991$$

$$(1001)^2 = (1000+1)^2 = (1000+1)(1000+1) = (1000)^2 + 2 \times (1000) \times 1 + 1 = 1002001$$

### فعالیت

۱- به تساوی‌های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است. بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

الف)  $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + \underset{2+5}{7}x + \underset{2 \times 5}{10}$

ب)  $(x+9)(x-4) = x^2 + 9x - 4x - 36 = x^2 + \underset{9-4}{5}x - \underset{9 \times (-4)}{36}$

جمله دوم در سمت راست از حاصل ضرب جمله مشترک پرانتزهای سمت چپ تساوی در مجموع جملات غیر مشترک آنها به دست می‌آید و جمله سوم سمت راست تساوی‌ها از حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک پرانتزهای سمت چپ تساوی ایجاد می‌شود.

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می‌نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم. اعداد  $a$  و  $b$  را چگونه تشخیص دهیم؟ دو عدد را طوری پیدا می‌کنیم که مجموع آنها ضریب جمله وسط باشد و حاصل ضرب آنها جمله سوم را ایجاد کند.

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

الف)  $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

ب)  $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

ج)  $y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)$

د)  $y^2 - y - 6 = (y-3)(y+2)$

ه)  $y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3)$

۳- تجزیه عبارت  $x^2 + 10x - 24$  را چهار نفر از دانش‌آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به چهار صورت زیر انجام داده‌اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

الف) جواب نادرست:  $(x+6)(x-4)$

ب) جواب نادرست:  $(x+12)(x-2)$

ج) جواب نادرست:  $(x+6)(x+4)$

د) جواب نادرست:  $(x-12)(x+2)$

جواب نفر سوم درست است و بقیه نادرست هستند. زیرا تنها در این جواب است که حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک پرانتزها  $-24$  می‌شود و حاصل جمع آنها  $+10$  است.

۸۹

نهم (دوره اول متوسطه)

تمرین ۸۹

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) اتحاد مزدوج  $(\frac{1}{6} - x)(\frac{1}{6} + x) = \frac{1}{36} - x^2$

ب) اتحاد جمله مشترک  $(5x+4) + (5x+3) = (5x)^2 + 7(5x) + 12 = 25x^2 + 35x + 12$

ج) اتحاد مزدوج  $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) = z^2 - 3$

د) اتحاد مزدوج و مربع دو جمله‌ای  $(3x+y-z)(3x+y+z) = (3x+y)^2 - z^2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$

ه) اتحاد مزدوج  $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$

و) اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک  $(x-2)(x+2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = x^4 - x^2 - 12$

۲- در قسمت‌های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت‌های مناسب بگذارید.

الف)  $(xy-z)(xy+z) = (xy)^2 - z^2$  ج)  $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$

ب)  $(\frac{1}{3}y + \sqrt{5})(\frac{1}{3}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{9}y^2 - 5$  د)  $(x^2+7)(x^2-5) = x^4 + 2x^2 - 35$

۳- عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف)  $a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$

ب)  $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$

ج)  $x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$

د)  $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

ه)  $4ax^2 - a = a(4x^2 - 1) = a(2x-1)(2x+1)$

و)  $x^2 - 13x + 36 = (x-4)(x-9)$

ز)  $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2 = (x-6)(x-6)$

ح)  $(x+y)^2 - 9 = (x+y-3)(x+y+3)$

ط)  $bx^2 - 5bx - 5b = b(x^2 - 5x - 5) = b(x-10)(x+5)$

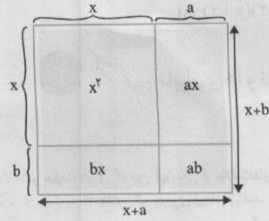
ی)  $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر  $a = b$  باشد، چه اتحادی به دست می‌آید؟ اگر  $a$  و  $b$  قرینه باشد، کدام اتحاد به دست می‌آید؟  
 اگر  $a = b$  باشد اتحاد مربع دو جمله‌ای و اگر  $a = -b$  اتحاد مزدوج به دست می‌آید.

$$a = b \Rightarrow (x+a)(x+b) = (x+a)^2$$

$$a = -b \Rightarrow (x+a)(x+b) = (x+a)(x-a)$$

۵- به کمک مساحت‌ها در شکل روبه‌رو، اتحاد جمله مشترک را به دست آورید.



مساحت کل شکل  $= (x+a)(x+b)$

مساحت کل شکل  $= (x^2 + bx + ax + ab)$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

### ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۳/۲۵ نمره)

الف)  $(\dots + 2x)(\dots) = y^2 - 4x^2$       ب)  $(\dots + \sqrt{5})(\frac{1}{3}y - \sqrt{5}) = \dots$

ج)  $(x + \dots)(x - 3) = \dots + 7x - \dots$       د)  $(\dots + x - 3)^2 = \dots + x^2 + 9 + 2xy - \dots$

۲- حاصل عبارت  $98 \times 10^2$  را به کمک اتحادها بنویسید. (۰/۷۵)

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها بنویسید. (۲)

الف)  $(2x-3)(2x+3)$       ب)  $(2x-3y+1)^2$

ج)  $(x-5)(x-2)$       د)  $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

۴- عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (۴)

الف)  $a^4 - 25$       ب)  $y^2 - 3y + 2$

ج)  $ax^2 + 4a - 4ax$       د)  $x^4 - 13x^2 + 36$

### پاسخ ارزشیابی مستمر

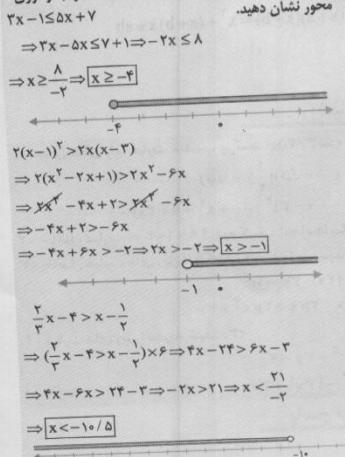
- ۱
- الف)  $(y+2x)(y-2x) = y^2 - 4x^2$  (۰/۷۵)
- ب)  $(\frac{1}{3}y + \sqrt{5})(\frac{1}{3}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{9}y^2 - 5$  (۰/۷۵)
- ج)  $(x+10)(x-3) = x^2 + 7x - 30$  (۰/۷۵)
- د)  $(y+x-3)^2 = y^2 + x^2 + 9 + 2xy - 6y - 6x$  (۱)
- ۲
- $98 \times 10^2 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 4 = 10000 - 4 = 9996$  (۰/۷۵)
- ۳
- الف)  $(2x-3)(2x+3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$  (۰/۵)
- ب)  $(2x-3y+1)^2 = (2x)^2 + (-3y)^2 + 1^2 + 2(2x)(-3y) + 2(2x)(1) + 2(-3y)(1)$   
 $= 4x^2 + 9y^2 + 1 - 12xy + 4x - 6y$  (۰/۵)
- ج)  $(x-5)(x-2) = x^2 - 7x + 10$  (۰/۵)
- د)  $(x-2)(x+2)(x^2+4) = (x^2-4)(x^2+4) = x^4 - 16$  (۰/۵)



الف)  $a^x - 2\Delta = (a^x - \Delta)(a^x + \Delta)$  (1)  
 ب)  $y^x - 2y + 2 = (y-1)(y-2)$  (1)  
 ج)  $ax^x - 4ax + 4a = a(x^x - 4x + 4) = a(x-2)^x$  (1)  
 د)  $x^x - 13x^x + 46 = (x^x - 9)(x^x - 4) = (x-3)(x+2)(x-2)(x+2)$  (1)

۲ نابرابری ها و نامعادله ها

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور نشان دهید.



نکته ۱۷: دو عبارت جبری که بین آنها یکی از علامت های  $>$  یا  $\geq$ ،  $<$  یا  $\leq$  باشد، یک نابرابری ایجاد می کنند.

مثال: هر یک از عبارت های  $-(x+1)^x \leq 0$ ،  $x+1 \geq 2$ ،  $-2 < 1$  یک نابرابری هستند.

نکته ۱۸: به دو طرف یک نامساوی می توان عددی مانند c را افزود یا این که از دو طرف آن عددی مانند c را کم کرد:

$a < b \rightarrow a + c < b + c$   
 $a < b \rightarrow a - c < b - c$

نکته ۱۹: اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی مثبت ضرب کنیم (یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم) آن نامساوی تغییر نمی کند.

$a < b \xrightarrow{c > 0} ac < bc$

نکته ۲۰: اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم (یا بر عددی منفی تقسیم کنیم)، جهت نامساوی عوض می شود.

$a < b \xrightarrow{c < 0} ac > bc$

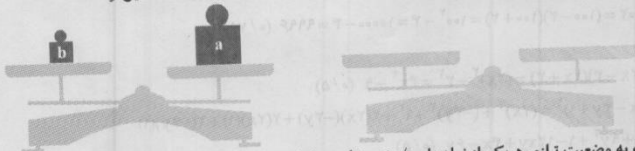
مثال: از آنجا که  $3 < 5$  آن گاه:  
 $3 + 2 < 5 + 2 \Rightarrow 5 < 7$   
 $3 - 2 < 5 - 2 \Rightarrow 1 < 3$   
 $3 \times 2 < 5 \times 2 \Rightarrow 6 < 10$

اما اگر نامساوی  $3 < 5$  را در  $(-2)$  ضرب کنیم، به نامساوی  $-6 > -10$  تبدیل می شود.

نکته ۲۱: برای حل یک نامعادله درجه اول دقیقاً مانند حل یک معادله درجه اول عمل می کنیم. اگر ضریب مجهول مثبت باشد، جهت نامساوی ثابت و اگر ضریب مجهول منفی باشد، جهت نامساوی عوض می شود.

فعالیت

روی کفه های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد. باتوجه به شکل، وزنه a از وزنه b سنگین تر است.



- باتوجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای  $>$ ،  $<$ ،  $\geq$ ،  $\leq$  را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه های a و b را با هم مقایسه کنید.

$a \geq b$ ,  $a \leq b$ ,  $b \geq a$

۹۰



در شکل بالا چنانچه وزنه‌ای  $p$  کیلوگرمی باشد به طوری که  $a = b + p$ ، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه  $p$  کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟ روی کفه‌ای که وزنه  $b$  قرار دارد.  
باتوجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف)  $x = y + 4 \Rightarrow x > y$       ج)  $a - 2 = b + 3 \Rightarrow a = b + 5 \Rightarrow a > b$

ب)  $m + 1 = n + 3 \Rightarrow m = n + 2 \Rightarrow m > n$       د)  $2m = 3n \quad (m, n > 0) \Rightarrow m > n$

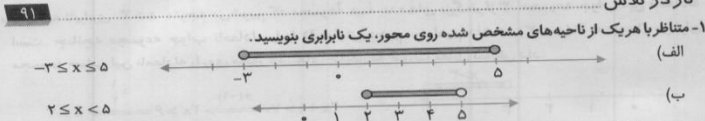
هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشد، فقط یکی از حالت‌های «بزرگتر از  $b$ » یا «کوچکتر از  $b$ » یا «برابر با  $b$ » را خواهیم داشت.

چنانچه عدد حقیقی  $a$  منفی نباشد، در این صورت  $a > 0$  یا  $a = 0$ ، در این حالت می‌نویسیم  $a \geq 0$  و می‌خوانیم  $a$  بزرگتر یا برابر با ۰ است؛ مانند  $2 \geq 0$  یا  $0 \geq 0$ .

چنانچه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که  $a$  از  $b$  کمتر نباشد، در این صورت  $a > b$  یا  $a = b$  در این حالت می‌نویسیم  $a \geq b$ .

۹۱

### کار در کلاس



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را بررسی کنید.

الف) اگر  $a + b > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هر دو مثبت هستند. نادرست  $(0 < (-2) + 3)$

ب) اگر  $ab > 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  هم علامت هستند. درست

ج) اگر  $\frac{ab}{c} < 0$  آنگاه،  $a$  و  $b$  و  $c$  منفی هستند. نادرست  $(\frac{2 \times 3}{-5} < 0)$

د) اگر  $a^2 b < 0$  آنگاه،  $b$  منفی است. درست

۳- عبارتهای کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگتر است.  $3x - 1 > 7$

• ۸ از قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگتر است.  $8 > -(2x + 3)$

### فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری‌های زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \Rightarrow 0 < 4$

$-3 < 1 \xrightarrow{-7} -3 - 7 < 1 - 7 \Rightarrow -10 < -6$

$-3 < -2 \xrightarrow{-100} -3 - 100 < -2 - 100 \Rightarrow -103 < -102$

با توجه به حاصل عبارتهای دو طرف نامساوی‌ها، نابرابری باز هم برقرار است.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید: آیا نابرابری‌ها تغییر می‌کنند؟

$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$

$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$

$-7 > -9 \xrightarrow{\times 0} 0 = 0$

$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-1)} 7 < 9$

باتوجه به حاصل ضرب‌ها مشاهده می‌کنیم که نابرابری‌ها تغییر می‌کنند.

۳- نابرابری  $2x + 1 > 7$  را در نظر بگیرید: این نابرابری شامل متغیر  $x$  است و درجه نسبت به  $x$  با ۱ برابر است: در این صورت به این نابرابری، نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌گوییم.  
در جدول زیر مقدارهای داده شده را به جای  $x$  قرار دهید: آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

نامعادله	$x = -1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 7$
$2x + 1 > 7$	$2(-1) + 1 > 7$	$2(2) + 1 > 7$	$2(3) + 1 > 7$	$2(4) + 1 > 7$	$2(7) + 1 > 7$
	↓	↓	↓	↓	↓
	$-1 > 7$	$5 > 7$	$7 > 7$	$9 > 7$	$15 > 7$
	نادرست	نادرست	نادرست	درست	درست

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ در مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.  
- دو طرف نامعادله را با ۱ جمع کنید.

$$2x + 1 - 1 > 7 - 1 \Rightarrow 2x > 6$$

- دو طرف نامعادله حاصل را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.  
 $\frac{1}{2} \times 2x > \frac{1}{2} \times 6 \Rightarrow x > 3$   
- با توجه به نابرابری  $x > 3$  متوجه می‌شویم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با  $D$  نمایش دهیم، خواهیم داشت  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$  می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به صورت مقابل نمایش داد.



۹۳

کار در کلاس

۱- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف)  $2x + 7 \geq 15 \Rightarrow 2x \geq 15 - 7 \rightarrow 2x \geq 8 \rightarrow x \geq 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

ب)  $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \rightarrow \frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \rightarrow \frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \rightarrow \frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6}$   
 $\rightarrow 2x - 3 < x - 1 \rightarrow 2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x)$

$\rightarrow x - 3 < -1 \rightarrow x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

ج)  $3(x-1) \geq 2x+1 \rightarrow 3x-3 \geq 2x+1 \rightarrow 3x-2x \geq 1+3 \rightarrow x \geq 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

د)  $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{6} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6} \Rightarrow 4(x+7) - 3x \leq 6(3-x) + 2x$   
 $\rightarrow 4x + 28 - 3x \leq 18 - 6x + 2x \rightarrow 5x + 28 \leq 18 - 4x$

$\rightarrow 5x + 4x \leq 18 - 28 \rightarrow 9x \leq -10 \rightarrow x \leq \frac{-10}{9} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-10}{9}\}$

۹۳

تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای  $<$  یا  $>$  را جایگزین کنید.

الف)  $a - b = 1$  در این صورت  $a \square b$

ب) اگر  $u - v = -2$  در این صورت  $u \square v$

ج) اگر  $2(p-1) = 2q-3$  در این صورت  $p \square q$

د) اگر  $\frac{a-b}{4} = -3$  در این صورت  $a \square b$

۲- علامت عددهای حقیقی  $a, b, c$  را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

الف) $\frac{ac}{b} < 0$	ب) $\frac{a}{bc} > 0$	ج) $ab > 0$	د) $\frac{a^2}{bc} > 0$
$b \neq 0, a < 0, c > 0$	$a > 0, b > 0, c > 0$	$a > 0, b > 0$	$a \neq 0, b > 0, c > 0$
$b \neq 0, a > 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c < 0$	$a < 0, b < 0$	$a \neq 0, b < 0, c < 0$
	$a < 0, b < 0, c > 0$		
	$a < 0, b > 0, c < 0$		

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $2(x-3) + 5 < 5 - x$

$$2x - 6 + 5 < 5 - x \Rightarrow 2x - 1 < 5 - x \Rightarrow 2x + x < 5 + 1 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$$

$$\Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

ب)  $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$

$$3 - 2x \geq 15 - 10x \Rightarrow -2x + 10x \geq 15 - 3 \Rightarrow 8x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$$

ج)  $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{3} \Rightarrow y - 3 - 4 > \frac{4y}{3} \Rightarrow y - 7 > \frac{4y}{3} \Rightarrow y - \frac{4y}{3} > 7 \Rightarrow \frac{3y - 4y}{3} > 7 \Rightarrow \frac{-y}{3} > 7 \Rightarrow -y > 21 \Rightarrow y < -21$

د)  $2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \Rightarrow 2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \Rightarrow 2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1}{3} + \frac{q}{3} \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} \leq \frac{q}{3} + \frac{q}{4} \Rightarrow \frac{5}{3} \leq \frac{4q+3q}{12} \Rightarrow \frac{5}{3} \leq \frac{7q}{12} \Rightarrow \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{7} \leq q \Rightarrow \frac{20}{7} \leq q \Rightarrow q \geq \frac{20}{7}$

۴- اگر  $a^2 > b^2$  آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت.  $a > b$  خیر برای مثال  $(-3)^2 > (-2)^2$  اما  $-3 < -2$

۵- اگر  $a, b > 0$  و  $a^2 > b^2$  نشان دهید  $a > b$  (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید.)

$$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \quad \text{اتحاد مزدوج} \quad (a-b)(a+b) > 0$$

$$\frac{a+b > 0}{(a-b)(a+b) > 0} \Rightarrow (a-b) > 0 \Rightarrow a > b$$

۶- عبارت‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم. حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتری می‌شود.

$$3x > 2x + 300 \quad (x = \text{پول علی})$$

ب) مجموع نصف عدد  $a$  و چهار برابر عدد  $b$ . حداکثر ۶ واحد است.

$$\frac{a}{2} + 4b \leq 6$$

۷- دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند که به منابع غذایی دسترسی ندارند. آنها همراه خود مواد غذایی برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان هر روز حداقل به اندازه سه برابر وزن خود کیلوکالری انرژی نیاز دارد. آنها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

$$\left. \begin{aligned} 85 \times 3 &= 255 \\ 65 \times 3 &= 195 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 255 + 195 = 450$$

این دو نفر هر روز حداقل ۴۵۰ کیلو کالری انرژی نیاز دارند. چون مجموع کیلوکالری‌ها کمتر از ۴۵۰۰ است. اگر  $x$  تعداد روزهای گذرانده شده باشد پس  $450x < 4500$ .

$$450x < 4500 \Rightarrow x < 10 \Rightarrow \text{دو نفر حداکثر } 10 \text{ روز دوام می‌آورند.}$$

## ارزشیابی مستمر

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (۵/۱نمره)  
 الف) اگر  $ab < 0$  و  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامت هستند. (ب) اگر  $a + b < 0$  و  $a$  و  $b$  هر دو منفی هستند.

۲- متناظر با هر محور یک نابرابری بنویسید. (۱/۵)

۳- اگر  $a^2 < b^2$  آیا می‌توان گفت همواره  $a < b$  است؟ (۱)  
 ۴- نامعادله‌های زیر را حل کنید. (۳)  
 الف)  $2(x-3) < 3x+1$       ب)  $\frac{2x-1}{3} - 1 < x + \frac{2}{3}$

۵- اگر  $\frac{a^2}{bc} < 0$  علامت عددهای حقیقی  $a$  و  $b$  و  $c$  را تعیین کنید. (۱)

## پاسخ ارزشیابی مستمر

- ۱ الف) درست (۵/۷۵) ب) نادرست، زیرا ممکن است یکی مثبت و دیگری منفی باشد ولی عدد منفی مقدار بیشتری داشته باشد. (۵/۷۵)  
 ۲ الف)  $-2 \leq x \leq 3$  (۵/۷۵) ب)  $x > 0$  (۵/۷۵)  
 ۳ خیر، مثلاً  $(-3)^2 < (-2)^2$  است ولی  $-3 < -2$  (۱)  
 ۴ الف)  $2(x-3) < 3x+1 \Rightarrow 2x-6 < 3x+1 \Rightarrow 2x-3x < 6+1 \Rightarrow -x < 7 \Rightarrow \boxed{x > -7}$  (۱/۵)  
 ب)  $\frac{2x-1}{3} - 1 < x + \frac{2}{3} \Rightarrow 2x-1-3 < 3x+2 \Rightarrow 2x-4 < 3x+2 \Rightarrow 2x-3x < 2+4 \Rightarrow -x < 6 \Rightarrow \boxed{x > -6}$  (۱/۵)  
 ۵ اگر  $\frac{a^2}{bc} < 0$  باشد، با توجه به اینکه همواره  $a^2 \geq 0$  پس حتماً باید  $b, c$  منفی باشد، یعنی  $b, c$  مختلف‌العلامت هستند. پس  $a$  هر علامتی می‌تواند داشته باشد و  $b$  و  $c$  مخالف صفر و مختلف‌العلامت هستند. (۱)

## آزمون کتبی

بیت فصل ۵

۰/۵  
 ۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.  
 الف) عبارت  $3x^2 - 4x^2y$  نسبت به  $x$  از درجه ۲ است.  
 ب) برابری‌ای که به ازای هر مقدار برای متغیرها برقرار باشد، یک اتحاد نام دارد.

۱/۵  
 ۲- کدام عبارت اتحاد است و کدام معادله است؟  
 الف)  $3x(x+1) = 3x^2 + 3x$  (ب)  $-2x - 3 = 3x + 2$

۲  
 ۳- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها بنویسید. (۲)  
 الف)  $(2x-1)^2$  (ب)  $(3x-4)(3x+4)$  (ج)  $(x-4)(x+2)$  (د)  $(2x+1)(2x+5)$

۲/۵  
 ۴- عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.  
 الف)  $4x^2 - 2x$  (ب)  $2x^2 + 8x + 8$   
 ج)  $x^2 - 64y^2$  (د)  $x^2 - 1$   
 ه)  $x^2 - 5x + 6$

نیم دوره اول متوسطه

۱/۵

۵- حاصل عبارت  $(x+1)^3$  را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای بنویسید.

۲

۶- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $(3x-4)x > 3x^2 - x + 3$

ب)  $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < x + \frac{1}{3}$

## پایخ سوالات استخوانی

۱ الف) نادرست (۰/۲۵)

ب) درست (۰/۲۵)

۲ الف) اتحاد است (۰/۲۵). زیرا:

$3x(x+1) = 3x^2 + 3x \Rightarrow 3x^2 + 3x = 3x^2 + 3x$  (۰/۵)

ب) معادله است. زیرا فقط به ازای  $x = -1$  تساوی برقرار است.

$-2x - 3 = 3x + 2 \Rightarrow -2x - 3x = 2 + 3 \Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = -1$  (۰/۵)

الف)  $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$  (۰/۵)

ب)  $(3x-4)(3x+4) = 9x^2 - 16$  (۰/۵)

ج)  $(x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8$  (۰/۵)

د)  $(2x+1)(2x+5) = (2x)^2 + (1+5)(2x) + 1 \times 5 = 4x^2 + 12x + 5$  (۰/۵)

الف)  $4x^2 - 2x = 2x(2x-1)$  (۰/۵)

ب)  $2x^2 + 8x + 8 = 2(x^2 + 4x + 4) = 2(x+2)^2 = 2(x+2)(x+2)$  (۰/۵)

ج)  $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x-3y)^2 = (x-3y)(x-3y)$  (۰/۵)

د)  $x^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

ه)  $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$  (۰/۵)

$(x+1)^2 = (x+1)^2(x+1) = (x^2 + 2x + 1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

الف)  $(3x-4)x > 3x^2 - x + 3 \Rightarrow 3x^2 - 4x > 3x^2 - x + 3$  (۰/۲۵)

$\Rightarrow -4x + x > 3 \Rightarrow -3x > 3 \Rightarrow x < -1$  (۰/۲۵)

ب)  $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) < x + \frac{1}{3} \times 6$  (۰/۲۵)

$4x - 3 < 6x + 2 \Rightarrow 4x - 6x < 2 + 3 \Rightarrow -2x < 5 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$  (۰/۲۵)

## فصل ۶ خط و معادله‌های خطی

### درس ۱ معادله خط

کلیدر سبز

مختصات نقطه را در معادله خط جایگذاری می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow 1+(-2)=-1 \Rightarrow -1=-1$$

نقطه روی خط قرار دارد

مثال: محل برخورد خط  $y = \frac{2}{3}x - 2$  با محورهای مختصات بیابید.

$$y=0 \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 0 - 2 = -2$$

$$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

مثال: مختصات نقطه‌ای از خط  $y = 2x - 5$  را بیابید که عرض آن  $(-2)$  باشد.

به جای  $y$  در معادله خط  $(-2)$  را جایگزین می‌کنیم:

$$-2 = 2x - 5 \Rightarrow 2x = 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

نکته ۴: خط‌های مبدا گذر (خط‌هایی که از نقطه  $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  می‌گذرند) همگی دارای معادله‌ای به شکل  $y = ax$  هستند.

مثال: خط‌ها به معادلات  $y = \sqrt{3}x$ ،  $y = -\frac{1}{3}x$ ،  $y = 2x$ ،  $y = 0/3x$  در

نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  می‌گذرند. چون نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  در همه آنها صدق می‌کند.

نکته ۱: هر معادله خط در شکل استاندارد خود به صورت  $y = ax + b$  است. هر معادله خط بی‌شمار جواب دارد.

یعنی بی‌شمار نقطه به مختصات  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  می‌توان یافت که تساوی  $y = ax + b$  را برقرار کنند.

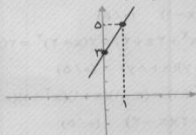
مثال: معادلات  $y = 2x$ ،  $y = x + 1$ ،  $y = 2x - 3$  و

$y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$  همگی معادلات خطی هستند، زیرا همه نقاطی که جوابهای این معادلات هستند روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

نکته ۲: برای رسم نمودار یک معادله خط کافی است دو نقطه از آن خط را بیابیم. از آنجا که از هر دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد، با رسم خط گذرنده از آن دو نقطه نمودار موردنظر به دست می‌آید.

مثال: معادله خط  $y = 2x + 3$  را رسم کنید.

ابتدا مختصات دو نقطه از این خط را می‌یابیم. سپس خط گذرنده از این دو نقطه را رسم می‌کنیم.



$x$	$0$	$1$
$y$	$3$	$5$
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

نکته ۳: برای اینکه تشخیص دهیم آیا یک نقطه روی یک خط قرار دارد یا نه می‌توانیم مختصات نقطه را در معادله خط جایگذاری کنیم. اگر تساوی برقرار شود، یعنی نقطه روی خط قرار دارد.

مثال: آیا نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  روی خط  $x + y = -1$  قرار دارد؟

۹۶

فعالیت

دوچرخه سواری با سرعت ثابت دو متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر را کامل کنید.

زمان (ثانیه) $x$	۰	۱	۱/۵	۲	۳	۳/۵	۴	۵
مسافت (متر) $y$	۰	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰

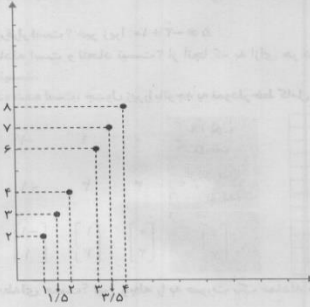
بین زمان و مسافت طی شده چه رابطه‌ای هست؟ مسافت طی شده دو برابر مدت زمان سپری شده است.



پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟  $2 \times 100 = 200$  متر

اگر x ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟  $2x$  متر

زوج عددهایی را که در جدول به دست آوردید به صورت  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  نشان دهید و نمایش هر نقطه را روی نمودار مشخص کنید. این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ همه نقطه‌ها روی یک خط راست قرار دارند. اگر این نقطه‌ها را به هم وصل کنیم چه شکلی به دست می‌آید؟ یک خط راست به دست می‌آید.



۹۷

رابطه

کار در کلاس

۱- اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین x و y هست؟ محیط مربع چهار برابر ضلع آن است. یعنی  $y$  توان دوم  $x$  است.

$$x \text{ ضلع} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 100 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 & 400 & 4x \end{bmatrix} y = 4x$$

۲- اگر طول ضلع یک مربع را با x و مساحت مربع را با y نشان دهیم، بین x و y چه رابطه‌ای هست؟ پس از کامل کردن جدول زیر، هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید. مساحت مربع، توان دوم ضلع مربع است.



ضلع x (سانتی متر)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y (سانتی متر مربع)	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵	۹
نقطه‌ها	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0/5 \\ 0/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2/5 \\ 6/25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟ خیر، این نقاط روی یک خط راست نیستند.

۹۷

### فعالیت

۱- معادله  $y = -x + 10$  چند پاسخ دارد؟ پنج پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید:

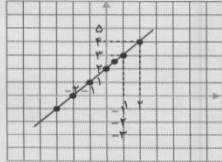
$$\begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد. به جای یکی از مجهولات (x یا y) یک عدد دلخواه در نظر می‌گیریم، در این صورت یک معادله یک مجهولی درجه اول ایجاد می‌شود که با حل آن مجهول دیگر نیز به دست می‌آید.

آیا تساوی برای  $x=2$  و  $y=5$  برقرار است؟ خیر زیرا  $5 \neq -2 + 10$

توضیح دهید چرا این تساوی معادله است و اتحاد نیست؟ از آنجا که به ازای هر دو مقدار دلخواه برای x و y تساوی برقرار نیست، پس یک اتحاد نیست.

۲- در شکل زیر نمودار یک خط داده شده است. جدول زیر را با توجه به نمودار خط کامل کنید.



طول (نقطه) x	0	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$
عرض (نقطه) y	2	3	+1	4	0	$\frac{2}{5}$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

بین طول و عرض نقطه‌ها چه رابطه‌ای هست؟ این رابطه را به صورت یک معادله بنویسید. عرض 2 واحد بیشتر طول است. یعنی  $y = x + 2$ .

۳- پنج جواب برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$3x - 4y = 12 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y = 2x - 1 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$$

توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ؟ در معادله سمت راست (پایین) راحت‌تر است. زیرا در این معادله با در نظر گرفتن یک عدد دلخواه برای x، مقدار y بلافاصله حاصل می‌شود و نیازی به حل یک معادله نیست.

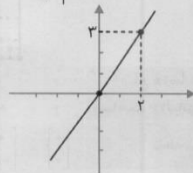
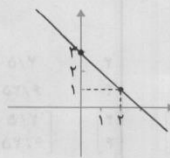
۹۹

### کار در کلاس

۱- نمودار خط‌های با معادله زیر را رسم کنید.

$$y = -x + 3 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 3 & 1 \end{array}$$

$$y = \frac{3}{2}x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$



۹۷

نهم (دوره اول متوسطه)

۲۳۸

۲ آیا خط  $y = 3x$  از مبدأ مختصات (یعنی نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ) می‌گذرد؟ چرا؟ بله - زیرا با در نظر گرفتن  $x = 0$  مقدار

$y = 0$  به دست می‌آید. یعنی  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  یک جواب معادله  $y = 3x$  و یک نقطه از نمودار آن است.

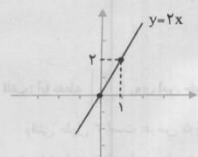
۳- اگر در معادله  $y = ax$  به جای عدد  $a$ ، عددهای مختلفی قرار دهیم، بشمار معادله خطی مثل  $y = 3x$ ،  $y = -x$ ،  $y = 2x$  و ... به دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط از مبدأ مختصات می‌گذرند؟ بله، زیرا در همگی این معادله‌ها نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  صدق می‌کند. یعنی  $0 = a \times 0$

## فعالیت

۱- در هر مورد دو نقطه از یک خط داده شده است؛ ابتدا خط را رسم کنید و سپس مانند نمونه با توجه به مختصات هر نقطه، معادله خط را حدس بزنید.

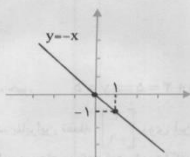
الف  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$y = 2x$



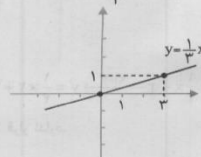
ب  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$y = -x$



ج  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$y = \frac{1}{3}x$



۲- در فعالیت ۱ برای هر مورد مختصات دو نقطه دیگر را روی هر خط به دست آورید.

$y = 2x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$y = -x \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$y = \frac{1}{3}x \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳- در قسمت (ب) کدام یک از نقطه‌ها با مختصات  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$  روی خط قرار دارد؟ نقاط  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

## کار در کلاس

۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی  $y = 2x - 1$  پیدا کنید.

با استفاده از نمودار خط



$y = 2x - 1$

$y = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

با استفاده از معادله خط

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳- را روی خط  $y = -\frac{1}{3}x + 2$  پیدا کنید.

$y = -3 \Rightarrow -3 = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow -\frac{1}{3}x = -5 \Rightarrow x = 15$

۱۰۰  
ریاضی

۲- مختصات محل برخورد خط  $y = 5x + 1$  را با محورهای مختصات پیدا کنید.

محل برخورد با محور  $x$  ها  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow$  عرض  $\Rightarrow$  محل برخورد با محور  $x$  ها

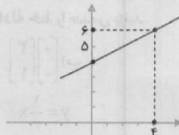
$$\Rightarrow 0 = 5x + 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

محل برخورد با محور  $y$  ها  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5 \times 0 + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۰۰

تمرین

۱- خط به معادله  $y = \frac{1}{3}x + 4$  را رسم کنید.



$$y = \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & -12 \\ \hline y & 0 \end{array}$$

الف) آیا نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  روی این خط است. خیر.  $y = \frac{1}{3}x + 4 \xrightarrow{x=2} y = \frac{1}{3} \times 2 + 4 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow y = 5$

وقتی طول ۲ است عرض ۵ باید باشد. بنابراین نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  روی این خط قرار ندارد.

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات را پیدا کنید.

محل برخورد با محور  $x$  ها  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow x = -12 \Rightarrow \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

محل برخورد با محور  $y$  ها  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \times 0 + 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

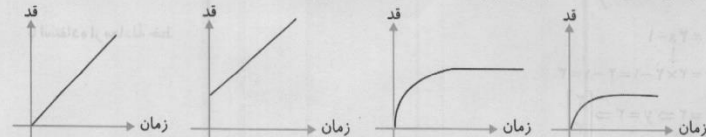
ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱- پیدا کنید.

$$x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \times (-1) + 4 = y = \frac{-1}{3} + 4 = y = \frac{11}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

۲- طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم  $x$  به آن وصل شود، طول فنر از رابطه  $y = 0.8x + 10$  پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

$$x = 5 \Rightarrow y = 0.8 \times 5 + 10 = y = 4 + 10 = 14 \text{ cm}$$

۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه بین رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید: برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور  $y$  به چه معنا است.



نمودار دوم از سمت راست - محل برخورد این نمودار با محور  $y$ ها بیانگر قد نوزاد در بدو تولد است. همچنین طبق این نمودار رشد قد انسان در سال‌های اولیه زندگی سرعت زیادی دارد. اما پس از مدتی این رشد متوقف می‌شود.

۱۰۰

نهم (دوره اول متوسطه)

دوره اول

۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید.

الف)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ب)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  ج)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$   
 $y = 3x$   $y = 2x - 1$   $y = 3x + 1$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله  $y = -x + 2$  را با محورهای مختصات بیابید.

محل برخورد با محور عرض‌ها  
 $x = 0 \Rightarrow y = -(0) + 2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

محل برخورد با محور طول‌ها  
 $y = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله  $y = -\frac{3}{5}x + 4$  را بیابید، که طول آن نقطه ۵ باشد.

$x = 5 \Rightarrow y = -\frac{3}{5} \times 5 + 4 = -3 + 4 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

۷- خط  $y = -\frac{1}{3}x + 2$  را رسم کنید. آیا نقطه  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط را پیدا کنید.



$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2 - y}{1}$$

قرار دارد.  $y = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 = -\frac{1}{3} \times (-2) + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \neq 3$

$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \times (-1) + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید.

$y = -2 \Rightarrow -2 = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow -2 - 2 = -\frac{1}{3}x \Rightarrow -4 = -\frac{1}{3}x \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}$

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$y = -\frac{1}{3}x + 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 + 2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (محل برخورد با محور عرض‌ها)} \\ y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (محل برخورد با محور طول‌ها)} \end{cases}$

### ارزشیابی مستمر

۱- معادله دو مجهولی  $2x + y = 6$  چند پاسخ دارد؟ چرا؟ ۳ پاسخ برای آن بنویسید. (۱/۵ نمره)

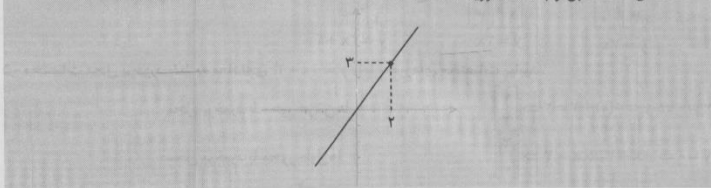
۲- خط به معادله  $y = 2x - 3$  را رسم کنید. (۱)

۳- معادله خطی بنویسید که از مبدأ مختصات و نقطه  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  بگذرد. (۱ نمره)

۴- آیا نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  روی خط به معادله  $y = 2x + 1$  قرار دارد؟ چرا؟ (۱)

۵- روی خط  $2x - 3y = 1$  نقطه‌ای را تعیین کنید که عرض آن ۱- باشد. (۱)

۶- مختصات محل برخورد نمودار خط  $y = 2x - 4$  را با محورهای مختصات بیابید. (۱/۵)  
 ۷- معادله‌ی خط مقابل را به دست آورید. (۲)



یانتخ ارز تنیایی مستمر

۱- بی‌شمار جواب دارد. زیرا برای هر مقدار دلخواهی برای  $x$  یک مقدار برای  $y$  می‌توان به دست آورد.

$$x = 1 \Rightarrow 2 \times 1 + y = 6 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$x = 0 \Rightarrow 2 \times 0 + y = 6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

$$x = -1 \Rightarrow 2 \times (-1) + y = 6 \Rightarrow y = 6 + 2 = 8 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (0/5)$$

نهم (دوره اول متوسطه)

$$y = 2x - 3 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{0}{-3} \quad \frac{1}{-1} \quad (0/5)$$



۳- هر خط گذرنده از مبدأ مختصات به شکل  $y = ax$  است.

$$y = ax \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 = a \times (-3) \Rightarrow a = \frac{-3}{-3} \Rightarrow y = \frac{3}{3}x \quad (0/5)$$

۴- بله این نقطه روی خط  $y = 2x + 1$  قرار دارد. (۱) زیرا:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow 5 = 5$$

$$2x - 3y = 1 \xrightarrow{y=1} 2x - 3(1) = 1 \Rightarrow 2x + 3 = 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \quad (0/5)$$

$$y = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{محل برخورد با محور } x : 0 = 2x - 4 \Rightarrow x = 2 \quad (0/75) \\ \text{محل برخورد با محور } y : y = 2 \times 0 - 4 \Rightarrow y = -4 \quad (0/75) \end{cases}$$

۷- این خط از مبدأ و نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  گذشته است. پس: (۰/۵)

$$y = ax \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 = a \times 3 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x \quad (0/5)$$



## ۲ شیب خط و عرض از مبدأ

نکته ۷: خط‌هایی که موازی با محور  $x$ ها باشند، دارای شیب صفر هستند و به شکل استاندارد  $y = k$  هستند.

نکته ۸: خط‌هایی که موازی با محور  $y$ ها باشند، شیب برایشان تعریف نشده است و به شکل  $x = k$  هستند.

مثال: معادله خطی بنویسید که از نقاط  $\left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]$ ،  $\left[ \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right]$ ،  $\left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right]$  بگذرد.  $y = 2$



مثال: معادله خطی بنویسید که از نقاط  $\left[ \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \right]$ ،  $\left[ \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right]$  بگذرد.  $x = -1$



نکته ۹: معادله خط نیم‌ساز ربع اول و ربع سوم  $y = x$  است و معادله خط نیم‌ساز ربع دوم و ربع چهارم  $y = -x$  است.

نکته ۱۰: اگر دو نقطه  $\left[ \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right]$  و  $\left[ \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \right]$  روی یک خط قرار داشته باشند، شیب آن خط از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه‌های  $\left[ \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right]$  و  $\left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right]$  بگذرد.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{1 - 3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + b \quad \left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right] \rightarrow 2 = -\frac{3}{2} \times 1 + b \Rightarrow$$

$$b = \frac{7}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

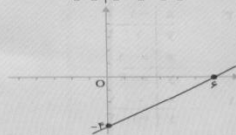
نکته ۱۱: هر گاه معادله یک خط را به شکل استاندارد  $y = ax + b$  بنویسیم، ضریب  $x$  (یعنی  $a$ ) را شیب خط می‌گوئیم. همچنین عدد  $b$  را که محل برخورد خط با محور عرض‌هاست عرض از مبدأ خط می‌نامیم.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط  $2x - 3y = 12$  را تعیین کنید و نمودار خط را رسم کنید.

$$2x - 3y = 12 \Rightarrow -3y = -2x + 12 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 4$$

$-4$  = عرض از مبدأ و  $\frac{2}{3}$  = شیب  $\Rightarrow$

$x$	$0$	$6$
$y$	$-4$	$0$
$x$	$0$	$6$
$y$	$-4$	$0$



مثال: معادله خطی بنویسید که شیب آن  $-2$  باشد و از نقطه  $\left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]$  بگذرد.

معادله کلی خط  $y = ax + b$  است. چون شیب  $(-2)$  است پس  $a = -2$

$$\Rightarrow y = -2x + b \quad \left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right] \rightarrow 2 = -2 \times 3 + b \Rightarrow b = 8$$

نکته ۱۲: هر گاه دو خط موازی باشند، شیب‌های آن دو با هم برابر است.

مثال: معادله خطی بنویسید که با خط  $y = 2x - 3$  موازی باشد و از نقطه  $\left[ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right]$  بگذرد.

چون خط موردنظر با خط  $y = 2x - 3$  موازی است پس شیب خط مورد نظر  $2$  است. ( $a = 2$ )

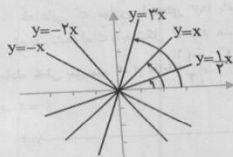
$$y = 2x + b \quad \left[ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right] \rightarrow 3 = 2 \times 1 + b \Rightarrow 2 = b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

## فعالیت

**۱۰۲**

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

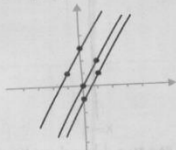
- الف)  $y = \frac{1}{4}x$       $\begin{array}{l|l} x & 0 \\ y & 0 \end{array}$
- ب)  $y = x$       $\begin{array}{l|l} x & 0 \\ y & 0 \end{array}$
- ج)  $y = 3x$       $\begin{array}{l|l} x & 0 \\ y & 0 \end{array}$
- د)  $y = -x$       $\begin{array}{l|l} x & 0 \\ y & 0 \end{array}$
- ه)  $y = -2x$       $\begin{array}{l|l} x & 0 \\ y & 0 \end{array}$



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ تفاوت آن‌ها در چیست؟ زاویه هر خط را مانند نمونه با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید. در خط‌های الف، ب و ج چه رابطه‌ای بین ضریب  $x$  و این زاویه وجود دارد؟ تفاوت آن‌ها در شیب آن‌ها (زاویه آنها با جهت مثبت محور  $x$ ) است. با تغییر ضریب  $x$  این زاویه نیز تغییر می‌کند. خط‌های د و ه چه نوع زاویه‌ای با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد؟ زاویه منفرجه می‌سازند.

۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ هر خط را با یک رنگ بکشید.

- $y = 2x + 3$       $\begin{array}{l|l} x & -1 \\ y & 1 \end{array}$
- $y = 2x$       $\begin{array}{l|l} x & 0 \\ y & 0 \end{array}$
- $y = 2x - 1$       $\begin{array}{l|l} x & 0 \\ y & -1 \end{array}$



در معادله این خط‌ها ضریب  $x$  برابر با ۲ است، که به آن شیب خط می‌گوییم. تفاوت خط‌ها در چیست؟ زاویه خط‌ها را با محور  $x$  با هم مقایسه کنید؛ چرا این خط با هم موازی هستند؟ تفاوت خط‌ها در محل برخورد خط‌ها با محور عرض‌ها ( $y$ ) است. دلیل موازی بودن این خط‌ها این است که در هر سه خط ضریب  $x$  (شیب) برابر است. بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله چه رابطه‌ای می‌بینید؟ محل برخورد خط با محور عرض‌ها، همان عدد ثابتی است که در معادله خط‌ها مشاهده می‌شود.

## کار در کلاس

**۱۰۳**

۱- در هر یک از معادله‌های زیر شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$y = 2x - 4$

$y = -\frac{2}{3}x$

$y = -3x + 1$

شیب = ۲

شیب =  $-\frac{2}{3}$

شیب = -۳

عرض از مبدأ = -۴

صفر = عرض از مبدأ

عرض از مبدأ = +۱

۲- معادله خطی بنویسید که:

الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۱- باشد.  $y = -2x - 1$

ب) شیب آن  $\frac{1}{4}$  باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.  $y = \frac{1}{4}x + 3$

ج) با خط  $y = 2x + 1$  موازی باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  بگذرد.  $y = 2x + 4$

۲- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه  $\left[ \frac{1}{2} \right]$  بگذرد.

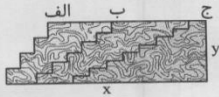
$$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times \frac{1}{2} + b \rightarrow b = 0$$

معادله خط  $\rightarrow y = 2x$

### فعالیت

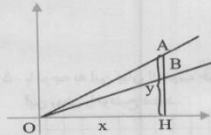
۱۰۳

۱- در این تصویر مقابل سه نوع راه پله می بینید؛ در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می روید یکسان است.



- کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟ راه پله سمت چپ (الف)
- کدام یک تعداد پله بیشتری دارد؟ راه پله سمت راست (ج)
- بالا رفتن از کدام یک راحت تر است؟ راه پله سمت راست (ج)

۲- در محورهای مختصات مقابل، کدام خط شیب بیشتری دارد؟ خط بالایی (OA) نقطه های A و B طول ثابتی دارند ولی عرض آن ها متفاوت است.



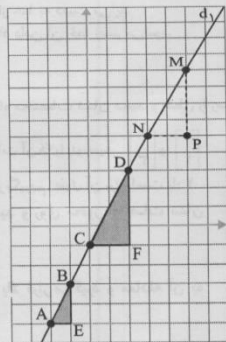
کدام یک از دو نسبت زیر بزرگ تر است؟ چرا؟ این دو نسبت چه ارتباطی با شیب خطها دارد؟  $\frac{AH}{OH} > \frac{BH}{OH}$   
 چون مقدار AH از BH بیشتر است و مخرجها مساوی است، کسر مربوط به خطی که شیب بیشتری دارد بزرگ تر است. این دو نسبت همان شیب خطها هستند.

۳- روی خط  $d_1$  به معادله  $y = 2x - 1$  دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر گرفته ایم. با توجه به مثلث قائم الزاویه ایجاد شده، شیب خط را به دست آورده ایم.  $d_1$  شیب خط  $= \frac{EB}{EA} = \frac{2}{1} = 2$

برای دو نقطه C و D نیز با توجه به مثلث رسم شده، شیب خط را پیدا کنید.  
 دو نقطه دلخواه دیگر روی خط در نظر بگیرید و با رسم یک مثلث قائم الزاویه شیب خط را دوباره پیدا کنید.

$d_1$  شیب خط  $= \frac{DF}{CF} = \frac{2}{1} = 2$

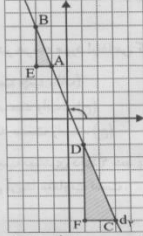
$d_1$  شیب خط  $= \frac{MP}{PN} = \frac{2}{1} = 2$



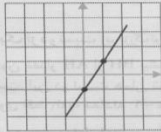
۴- خط  $d_4$  با محور طول، زاویه بزرگتر از  $90^\circ$  می‌سازد؛ پس شیب خط منفی می‌شود. با توجه به مثلث‌های رسم شده مقدار شیب خط  $d_4$  را پیدا کنید.

شیب خط  $d_4 = -\frac{EB}{EA} = -\frac{3}{1} = -3$

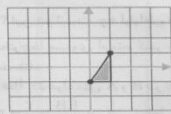
خط  $d_4$  محور عرض‌ها را در نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  قطع کرده است یا عرض از مبدأ آن ۱ است. معادله خط  $d_4$  را بنویسید.  $y = -3x + 1$



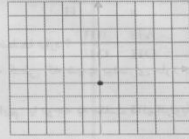
۵- با توجه به این بیان از شیب خط در زیر مراحل رسم معادله خط  $y = 2x - 1$  با روش دیگری مشخص شده است؛ این روش را توضیح دهید.



۱- خط از این نقطه می‌گذرد



۲- با توجه به مقدار شیب نقطه دیگری پیدا می‌شود



۳- با داشتن دو نقطه خط رسم می‌شود

- ۱- ابتدا با توجه به عرض از مبدأ خط داده شده که عدد  $(-1)$  است این عدد را روی محور عرض‌ها مشخص می‌کنیم.
- ۲- حال چون شیب خط  $\frac{2}{1}$  است. به ازای هر یک واحد که به سمت راست برویم می‌بایست ۲ واحد به بالا حرکت کنیم. به این ترتیب نقطه دیگری از خط به دست می‌آید.
- ۳- با وصل کردن این دو نقطه و امتداد دادن آن خط رسم می‌شود.

۱۰۵

### فعالیت

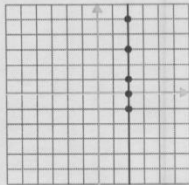
۱- نقطه‌های  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  را در دستگاه مختصات نشان دهید و خطی را رسم کنید که از این دو نقطه می‌گذرد. روی

خط، دو نقطه انتخاب کنید و مختصات آن‌ها را بنویسید.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

اگر نقطه دیگری روی این خط در نظر بگیریم، طول آن برابر است با: ۲ یک نقطه دلخواه به طول ۲ بنویسید و روی محور مختصات نشان

دهید:  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

تمام نقطه‌ها به طول ۲ روی خط بالا قرار می‌گیرد و معادله آن به صورت  $x = 2$  است.



۲- صورت کلی معادله‌های خطی به صورت  $ax + by = c$  است.

الف) با توجه به مقادیر نوشته شده، معادله خط را بنویسید؛ کدام خط از مبدأ می‌گذرد؟

$$a = 2, b = 3, c = 4 \rightarrow 2x + 3y = 4$$

$$a = -1, b = 2, c = 0 \rightarrow -x + 2y = 0$$

خط  $-x + 2y = 0$  از مبدأ می‌گذرد.

ب) با توجه به خط‌های داده شده، مقادیر  $a, b$  و  $c$  را پیدا کنید.

$$-3x + 2y = 2 \rightarrow a = -3, b = 2, c = 2$$

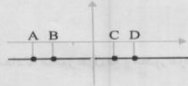
$$y = 2x + 1 \rightarrow 2x - y = -1 \rightarrow a = 2, b = -1, c = -1$$

ج) برای خط  $x = 2$  مقادیر  $a, b$  و  $c$  را بنویسید.

$$ax + by = c \rightarrow x = 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \Rightarrow a = 1, b = 0, c = 2$$

۳- مختصات نقطه‌های مشخص شده را روی خط بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ عرض همه این نقاط  $-1$  است.

معادله خط رسم شده را بنویسید.  $y = -1$

در فرم کلی معادله‌های خطی به جای  $a, b$  و  $c$  چه عددی قرار دهیم تا معادله خط رسم شده به دست آید؟

$$ax + by = c$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 1 \quad -1$$

۴- مانند نمونه برای خط‌های داده شده شیب و عرض از مبدأ را پیدا کنید.

$$2y - 4x = 8 \rightarrow 2y = 4x + 8 \rightarrow y = 2x + 4$$

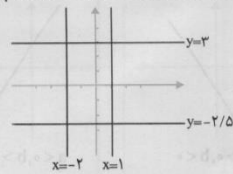
عرض از مبدأ شیب

$$3x - 2y = 6 \Rightarrow -2y = -3x + 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = \frac{3}{2} \\ \text{عرض از مبدأ} = -3 \end{cases}$$

$$x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 3y = -x + 9 \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -\frac{1}{3} \\ \text{عرض از مبدأ} = 3 \end{cases}$$

کاردر کلاس

معادله‌های خط‌های رسم شده را در دستگاه مختصات مقابل کنار هم بنویسید.

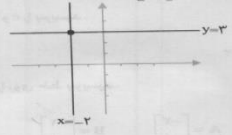


۲- از برخورد دو خط  $y = -3$  و  $x = 2$  کدام نقطه به دست می‌آید؟ نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$  به دست می‌آید.

۳- معادله خطی بنویسید که موازی محور  $x$ ها باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد.  $y = 1$

۱۰۶

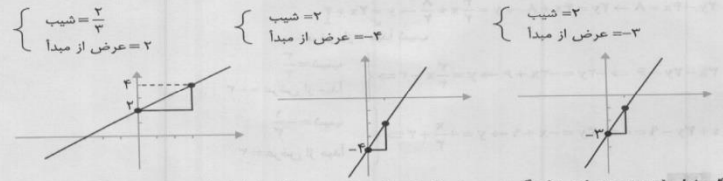
تمرین  
۱- خط‌های  $y = 3$  و  $x = -2$  را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟ محل برخورد دو خط نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$  است و زاویه بین آنها ۹۰ درجه است.



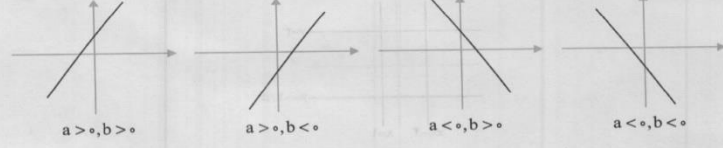
۲- معادله محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟  
 مبدأ مختصات  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  = محل برخورد  $\Rightarrow$   $y = 0 \Rightarrow$  معادله محور طول  
 $x = 0 \Rightarrow$  معادله محور عرض

۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

$3y - 2x = 6$	$4x - 2y = 8$	$2x - y = 3$
$3y = 2x + 6$	$-2y = -4x + 8$	$-y = -2x + 3$
$y = \frac{2}{3}x + 2$	$y = 2x - 4$	$y = 2x - 3$



۴- خط  $y = ax + b$  را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



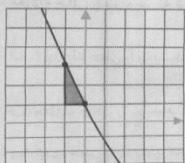
۱۰۶

شماره دوره اول متوسطه

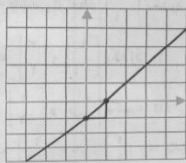
۲۴۸



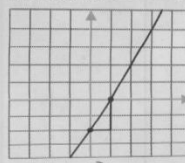
۵- معادله خط‌های زیر را بنویسید.



شیب = -2  
عرض از مبدأ = 1  $\Rightarrow y = -2x + 1$



شیب = 1  
عرض از مبدأ = -1  $\Rightarrow y = x - 1$



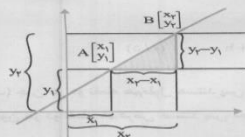
شیب = 2  
عرض از مبدأ = -2  $\Rightarrow y = 2x - 2$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط  $2y - 4x = 5$  موازی باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

$2y - 4x = 5 \Rightarrow 2y = 4x + 5 \Rightarrow y = 2x + \frac{5}{2}$  شیب = 2

معادله خط  $\rightarrow y = \frac{a}{b}x + b \Rightarrow y = 2x + b \Rightarrow -1 = 2 + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow y = 2x - 3$

۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



شیب خط  $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

با توجه به شکل دو نقطه A و B روی خط قرار دارند. مثلث قائم‌الزویه‌ای که وتر آن AB باشد، دارای دو ضلع زاویه قائمه به طول‌های  $(y_2 - y_1)$  و  $(x_2 - x_1)$  است. بنابراین داریم:

شیب خط  $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

شیب  $a = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$

معادله خط  $\Rightarrow y = \frac{a}{b}x + b \Rightarrow y = -3x + b \Rightarrow 2 = -9 + b \Rightarrow b = 11 \Rightarrow y = -3x + 11$

آرزو شیبایی مستمر

۱- شیب و عرض از مبدأ خط  $3y - 2x = 6$  را بیابید. (۱ نمره)

۲- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن -۲ و عرض از مبدأ آن ۱ باشد. (۱)

۳- مقدار m را طوری تعیین کنید که خط  $3y - x = m$  از نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  بگذرد. (۱)

- ۴- معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲- باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد. (۲)
- ۵- الف) معادله خطی را بنویسید که از نقاط  $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  بگذرد. (۱)  
 ب) معادله خطی را بنویسید که از نقاط  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$  بگذرد. (۱)
- ۶- معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بگذرد. (۲)

یافتن از شیبایی مستمر

۱  $3y - 2x = 6 \Rightarrow 3y = 2x + 6 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2 \quad (0/5)$

۲  $y = ax + b \quad \begin{matrix} a = -2 \\ b = 1 \end{matrix} \Rightarrow y = -2x + 1 \quad (0/5)$

۳  $3y - x = m \quad \begin{matrix} a = -1 \\ b = -1 \end{matrix} \Rightarrow 3 \times (-2) - 1 = m \Rightarrow m = -7 \quad (0/5)$

۴  $y = ax + b \quad \begin{matrix} a = -2 \\ b = 1 \end{matrix} \Rightarrow y = -2x + 1 \Rightarrow 1 = (-2) \times (-2) + b \quad (0/5)$

۵ الف) چون هر دو نقطه هم‌محلول هستند پس معادله خط به شکل  $x = 3$  است. (۱)  
 ب) چون هر دو نقطه هم‌عرض هستند پس معادله خط به شکل  $y = -2$  است. (۱)

۶ شیب خط  $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad (1)$

$\Rightarrow y = 3x + b \quad \begin{matrix} a = 3 \\ b = -7 \end{matrix} \Rightarrow 1 = 3 \times 2 + b \quad (0/5)$

$\Rightarrow b = -7 \Rightarrow y = 3x - 7 \quad (0/5)$

دستگاه معادله‌های خطی

نکته ۱۱: هرگاه به دنبال جواب مشترکی برای دو یا چند معادله باشیم، می‌گوییم می‌خواهیم دستگاه متشکل از آن معادلات را حل کنیم. یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات خطی رسم نمودارها و یافتن نقاط تقاطع آنها است. مثال: با رسم نمودارهای دو خط زیر، جواب مشترک آنها را بیابید.

$d_1: y = 2x + 1$	$\begin{array}{r l} x & -1 \\ y & 1 - 1 \end{array}$
$d_2: 2x - y = 0$	$\begin{array}{r l} x & 1 \\ y & 0 - 3 \end{array}$

نکته ۱۱: دو خط یا با یکدیگر موازی‌اند یا اینکه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. اگر دو خط موازی باشند و عرض از مبدأ آنها یکی باشد می‌گوییم این دو خط بر هم منطبق هستند. اگر دو خط بر هم منطبق باشند در بی‌شمار نقطه اشتراک دارند. دو خط موازی و غیرمنطبق در هیچ نقطه‌ای اشتراک ندارند و دو خط متقاطع تنها در یک نقطه مشترک‌اند.

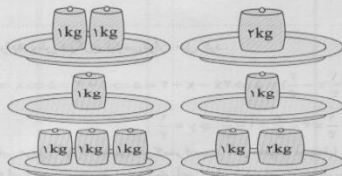
نیم دوره اول هنرستان

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 2 + 5 &= 5 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

ج

$$\begin{aligned} x &= x \\ x + 2x &= 2x \\ 3x &= 3x \end{aligned}$$



از این مثال‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم، یک تساوی جدید به دست می‌آید. با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده است. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \\ & 2x = 4 \\ & \boxed{x = 2} \quad x + y = 3 \end{aligned}$$

$$2 + y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در حل این دستگاه از این نکته استفاده شده است که اگر دو تساوی را با هم جمع کنیم، همان‌طور برقرار است.

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad & 2 \times \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \\ & \Delta x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{x = 2} \quad \text{و} \quad x + 2y = 4 \\ & 2 + 2y = 4 \end{aligned}$$

$$2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در حل این دستگاه ابتدا طبق نکته اول ضرایب معادله اول را در ۲ ضرب کرده‌ایم. سپس دو طرف دو تساوی را طبق نکته دوم با هم جمع کرده‌ایم.

۱۱۰

کار در کلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = -12 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \\ & 2y = -6 \Rightarrow \boxed{y = -3} \quad x - y = 3 \Rightarrow x - (-3) = 3 \Rightarrow \boxed{x = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 15y = -2 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 6x + 9y = 21 \end{cases} \Rightarrow 19y = 19 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow 2x + 2y = 7 \Rightarrow 2x + 2 = 7 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 2.5} \end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y = -5 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = -15 \Rightarrow x = 15 \\ 2x + 2y = 3 \Rightarrow 20 + 2y = 3 \Rightarrow 2y = -17 \Rightarrow y = -\frac{17}{2} \end{cases}$$

۱۱۱

فعالیت

۱- دستگاه معادله‌های خطی زیر را به روش دیگری نیز می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow 2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5 \Rightarrow 2x - x + 2 = 5 \Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی‌متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش‌آموز حل شده است. روش‌های هر کدام را توضیح داده، کامل کنید.

روش ۱: طول مستطیل و عرض مستطیل:  $2x - 3$   
 محیط  $= 2(x + 2x - 3) = 24 \Rightarrow 2x + 4x - 6 = 24 \Rightarrow 6x - 6 = 24 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$  عرض:  $5$  ، طول  $= 2x - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$

روش ۲:  $y$ : طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل  
 $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 7 \Rightarrow x = 5 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$

روش ۳:  $y$ : طول مستطیل و  $x$ : عرض مستطیل  
 $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \Rightarrow 2(x + 2x - 3) = 24 \Rightarrow 2x + 4x - 6 = 24 \Rightarrow 6x - 6 = 24 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow x = 5$

بین روش‌های اول و سوم چه شباهتی هست؟ در هر دو روش از جایگزینی متغیر در یکی از معادله‌ها استفاده شده است. کار در کلاس

۱۱۲

دستگاه‌های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

۱)  $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ 2(3y + 7) - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ 6y + 14 - 7y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 7 \\ -y = 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 3(-1) + 7 = 4 \Rightarrow x = 4$

۲)  $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 6 \\ 2x + \frac{1}{3}(3x - 6) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 6 \\ 2x + x - 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 6 \\ 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow y = 3 \times \frac{10}{3} - 6 = 4 \Rightarrow y = 4$

۱۱۱

نیمه دوره اول متوسطه

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$1) \begin{cases} 2(x-y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x-y) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3y = 4 \\ 3x - 4x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$2x \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$5y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5} \Rightarrow 2x + \frac{18}{5} = 4 \Rightarrow 2x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x-1) - 2(y-1) = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$2x \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$5x = 10 \Rightarrow x = 2 \quad 2 + y = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$3) 2x - y - 2 = 3x + y - 1$$

این تساوی زمانی برقرار است که دو عدد ۲ و ۳ در دو طرف تساوی صفر باشد. چرا که در این صورت حاصل دو طرف تساوی برابر با یک می‌شوند.

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow x + y - 1 = 0 \Rightarrow 1 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$$

۳- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط  $x - y = 1$  و  $x + y = 1$  بگذرد و شیب آن  $-\frac{2}{3}$  باشد.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

ابتدا محل برخورد دو خط داده شده را می‌یابیم.

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 + y = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

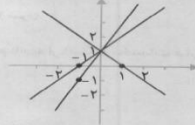
نقطه برخورد  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

۴- در معادله  $y = ax + 1$  اگر به جای  $a$  عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله خط‌های زیادی به دست می‌آید. به ازای  $a = 1$  و  $a = 2$  و  $a = -1$  این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارد؟

$$a = 1 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow \begin{matrix} x & 0 & -1 \\ y & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$a = 2 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow \begin{matrix} x & 0 & -1 \\ y & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$a = -1 \Rightarrow y = -x + 1 \Rightarrow \begin{matrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \end{matrix}$$



ویژگی مشترک: همه‌ی این خط‌ها از نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  می‌گذرند.

۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. باهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد.)

x: تعداد گاوها  
y: تعداد شترمرغها

$$\begin{cases} -2x + x + y = 20 \\ 4x + 2y = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 4x + 2y = 56 \end{cases}$$

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8, \quad x + y = 20 \xrightarrow{x=8} 8 + y = 20 \Rightarrow y = 12$$

در این مزرعه ۱۲ شترمرغ و ۸ گاو وجود دارد.  
۶- دستگاه معادله خطی زیر را از روش حذفی و ترسیمی حل کنید.  
آیا این دستگاه جواب دارد؟ روش حذفی:

$$\begin{cases} -2x + 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y = -13 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$0 = -9 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \Rightarrow \text{نادرست}$$

روش ترسیمی:

$$\begin{aligned} 2x - 3y = 7 &\Rightarrow \frac{x}{y} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ 4x - 6y = 5 &\Rightarrow \frac{x}{y} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$



طبق نمودار مشخص است که دو خط نقطه مشترکی ندارند. پس دستگاه جواب ندارد.  
شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید که چرا نقطه مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی آید.

$$2x - 3y = 7 \Rightarrow -3y = -2x + 7 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

$$4x - 6y = 5 \Rightarrow -6y = -4x + 5 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} \rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

چون شیب دو خط با هم برابر است پس دو خط موازی اند و دو خط موازی هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند. پس نقطه مشترکی هم ندارند.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال است و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است سن هریک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 26 \end{cases}$$

$$2x = 96 \Rightarrow x = 48 \Rightarrow 48 + y = 70 \Rightarrow y = 22$$

ارزشیابی مستمر

۱- آیا نقطه  $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$  جواب دستگاه  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$  می باشد یا خیر؟ (۲ نمره)

۲- با رسم خطها معین کنید جواب دستگاه  $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$  در کدام ناحیه از دستگاه مختصات قرار می گیرد. (۲)

۳- دستگاه  $\begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$  را به روش حذفی حل کنید. (۲)

۴- دستگاه  $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$  را به روش جایگزینی حل کنید. (۲)

۵- مجموع سن علی و پدرش ۵۰ سال و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است. سن هریک را بیابید. (۲)



پاسخ ارزشیابی مستمر

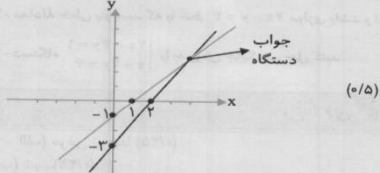
۱. بله، زیرا این نقطه در هر دو معادله خط صدق می‌کند یعنی روی هر دو خط قرار دارد.

$$2x + y = 4 \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix} \rightarrow 2 \times 1 + 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \quad (1)$$

$$x - 3y = -5 \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix} \rightarrow 1 - 3 \times 2 = -5 \Rightarrow -5 = -5 \quad (1)$$

$$3x - 2y = 6 \rightarrow \begin{matrix} x & 0 & 2 \\ y & -3 & 0 \end{matrix} \quad (0/5)$$

$$x - y = 1 \rightarrow \begin{matrix} x & 0 & 1 \\ y & -1 & 0 \end{matrix} \quad (0/5)$$



جواب دستگاه در ناحیه اول قرار دارد. (0/5)

$$\begin{cases} 5x - 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -15x + 10y = 5 \\ 15x + 9y = 33 \end{cases} \quad (0/5)$$

$$19y = 28 \Rightarrow y = 2 \quad (0/5)$$

$$-3x + 2y = 1 \begin{matrix} y=2 \\ \rightarrow -3x + 2 \times 2 = 1 \end{matrix} \rightarrow -3x + 4 = 1 \quad (0/5)$$

$$\rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = 1 \quad (0/5)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -2y + 3 \quad (0/5)$$

$$2x - y = 3 \begin{matrix} x = -2y + 3 \\ \rightarrow 2(-2y + 3) - y = 3 \end{matrix} \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow -4y + 6 - y = 3 \Rightarrow -5y = -3 \Rightarrow y = 1 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow x = -2 \times 1 + 3 \Rightarrow x = 1 \quad (0/5)$$

سن پدر علی = x

سن علی = y

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 26 \end{cases} \quad (0/5)$$

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 26 \end{cases} \quad (0/5)$$

$$2x = 76 \Rightarrow x = \frac{76}{2} = 38 \Rightarrow y + 38 = 50 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow \text{علی ۱۲ سال و پدرش ۳۸ سال دارد.} \quad (0/5)$$

آزمون تطبیقی

بش فصل ۶

.....: تاریخ

.....: نوبت

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) در خط‌های مبدأ گذر ..... برابر با صفر است.

ب) ثبت تفاضل عرض‌های دو نقطه از یک نقطه به تفاضل طول‌های همان دو نقطه را ..... خط می‌گوییم.

ج) معادله‌ی خط‌گذرنده از نقاط  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$  برابر با ..... است.

د) اگر دو خط برهم منطبق باشند دستگاه شامل معادلات آنها دارای ..... جواب است.

۲- ثبت و عرض از مبدأ خط به معادله  $3x - 4y = 12$  را بیابید.

۳- معادله خطی بنویسید که با خط  $2x - y = 3$  موازی باشد و از نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  بگذرد.

۴- دستگاه  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$  را به روش جایگزینی حل کنید.

پایخ آزمون تطبیقی

۱ الف) عرض از مبدأ (۰/۲۵)  
 ب) شیب (۰/۲۵)  
 ج)  $x = 2$  (۰/۲۵)  
 د) بی‌شمار (۰/۲۵)

۲  $3x - 4y = 12 \Rightarrow -4y = -3x + 12$  (۰/۲۵)

$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$  (۰/۲۵) شیب  $= \frac{3}{4}$  (۰/۲۵)  
 عرض از مبدأ  $= -3$  (۰/۲۵)

۳ ابتدا شیب خط  $2x - y = 3$  را می‌یابیم و آن را به عنوان شیب خط مورد نظر در نظر می‌گیریم.  
 $2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow$  شیب  $= 2$  (۰/۵)

$y = ax + b$  شیب  $= 2$   
 $\Rightarrow y = 2x + b$  (۰/۵)  $\Rightarrow -1 = 2 \times 2 + b \Rightarrow b = -5$  (۰/۵)

۴  $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow{x = -2y + 4} \begin{cases} 2(-2y + 4) - 2y = 1 \\ -2y + 4 = 1 \end{cases}$   
 $\Rightarrow -4y + 8 - 2y = 1 \Rightarrow -6y = -7 \Rightarrow y = \frac{7}{6}$  (۰/۲۵)  
 $\Rightarrow x = -2 \times \frac{7}{6} + 4 = -\frac{7}{3} + 4 = \frac{5}{3}$  (۰/۲۵)

نام آموزگار: .....  
 نام دانش آموز: .....

## فصل ۷ عبارتهای گویا

### ۱ معرفی و ساده کردن عبارتهای گویا

تجزیه  $a^2 - a - 2 = 0$

$$(a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

نکته: برای ساده کردن یک عبارت گویا ابتدا صورت و مخرج آن را تجزیه می‌کنیم سپس عوامل مشترک در صورت و مخرج را با هم ساده می‌کنیم.  
مثال: عبارتهای گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

۱۱۵ ریاضی

الف)  $\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 4} = \frac{(a-2)(a-3)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-3}{a+2}$

ب)  $\frac{xy^2 - y^3}{x^2 - xy + y^2} = \frac{y^2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{y^2}{x+y}$

ج)  $\frac{a-1}{1-a} = \frac{a-1}{-(a-1)} = -1$

د)  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}$

ه)  $\frac{b^2 - 5b - 14}{b^2 + b - 2} = \frac{(b-7)(b+2)}{(b+2)(b-1)} = \frac{b-7}{b-1}$

و)  $\frac{3a-6}{a^2-3a+2} = \frac{3(a-2)}{(a-2)(a-1)} = \frac{3}{a-1}$

نکته: به کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد یک عبارت گویا گفته می‌شود.

مثال: عبارتهای  $\frac{\sqrt{x}}{5} \cdot \frac{1}{x}$ ،  $\frac{3x}{y+\sqrt{2}}$ ،  $\frac{3x-1}{x+1}$  همگی عبارتهای گویا هستند.

مثال: عبارتهای  $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ ،  $\frac{2^x+1}{y-3}$ ،  $\frac{\sqrt{x}}{x+3}$ ،  $\frac{\sqrt{xy}}{x^2+1}$  و  $|x-2|$  هیچ کدام عبارت گویا به شمار نمی‌روند.

نکته: حوزه تعریف (یا دامنه) یک عبارت گویا مجموعه مقادیری از متغیر است که به ازای آن‌ها، آن عبارت گویا تعریف شده است. برای یافتن حوزه تعریف یک عبارت گویا باید مقادیری از متغیر را که به ازای آن‌ها مخرج کسر صفر می‌شود، حذف کنیم.

مثال: در عبارت گویای  $\frac{y}{x-3}$  عدد  $x=3$  باعث می‌شود که مخرج این عبارت گویا صفر شود. بنابراین این عبارت گویا به ازای  $x=3$  تعریف نشده است.

مثال: عبارت گویای  $\frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}$ ، به ازای دو عدد  $x=2$  و  $x=-2$  تعریف نشده است.

مثال: عبارت گویا  $\frac{2a}{a^2-a-2}$  به ازای چه مقادیری از  $a$  تعریف نشده است؟

باید ببینیم مخرج این کسر به ازای چه اعدادی صفر می‌شود. ابتدا آن را تجزیه می‌کنیم.

سؤال متن ۱۱۴ عبارتهای زیر گویا نیستند. (چرا؟) چون هیچ کدام از آن‌ها از تقسیم دو چند جمله‌ای به دست نیامده‌اند.

$\sqrt{xy}$  و  $\frac{\sqrt{x}}{x+y}$  و  $|x-y|$  و  $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

کاردر کلاس ۱۱۵ کدام یک از عبارتهای زیر گویا است؟

$\frac{y}{x-1}$ ،  $\frac{x+6}{3}$ ،  $\frac{ah}{y}$ ،  $\frac{\sqrt{3+x}}{5}$ ،  $\frac{\sqrt{xy}}{4\delta}$ ،  $\frac{|x+y|}{x}$   
 $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ،  $\frac{x-5}{\sqrt{3+1}}$ ،  $\frac{1}{x}$ ،  $\frac{mn+n^2}{\delta-n}$ ،  $1\bar{2}$ ،  $\frac{3-a}{2+x}$

115

**فعالیت**

مقدار عددی عبارت  $\frac{x+5}{x-3}$  را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید:

$x$	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{3}{-5}$	3	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{5}{3}$	-1	0

116

**کار در کلاس**

هر یک از عبارتهای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف)  $\frac{18x+5}{x}$

ب)  $\frac{y+x}{x} \Rightarrow x=0$

ج)  $\frac{2b+1}{2b-1} \Rightarrow 2b-1=0 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

د)  $\frac{x}{x+4}$

ه)  $\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

و)  $\frac{a+5}{a^2-5a+6} = \frac{a+5}{(a-3)(a-2)} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \Rightarrow a=3 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \end{cases}$

به ازای هر مقداری تعریف شده است

به ازای هر مقداری تعریف شده است.

116

**فعالیت**

توضیح دهید که هر یک از عبارتهای گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

در هر یک از عبارتهای زیر ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم و سپس عامل‌های مشترک را ساده می‌کنیم.

الف)  $\frac{18y^3}{6-y^5} = \frac{3}{1-y^2}$

ب)  $\frac{x+3}{x+1} \cdot \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}$  از اتحاد مربع دو جمله‌ای و جمله مشترک استفاده شده است. (از اتحاد مزدوج استفاده شده است.)

ج)  $\frac{y^2-9}{3y+9} = \frac{(y-3)(y+3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$       د)  $\frac{2x^2y^3}{x^2y^3} = \frac{2b^4}{5a}$       ه)  $\frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$

117

**کار در کلاس**

عبارتهای گویای زیر را ساده کنید.

الف)  $\frac{m^2-16}{4-m} = \frac{(m-4)(m+4)}{4-m} = \frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)} = -(m+4)$

ب)  $\frac{6m+18}{7m+21} = \frac{6(m+3)}{7(m+3)} = \frac{6}{7}$

ج)  $\frac{a^2-5a-14}{a^2+a-2} = \frac{(a-7)(a+2)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-7}{a-1}$

د)  $\frac{x^2-y^2}{y-x} = \frac{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)}{-(x-y)} = -(x^2+y^2)(x+y)$

115

تیم (دوره اول متوسطه)

۲- عبارت  $\frac{a+ax}{a}$  به دو شکل ساده شده؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف)  $\frac{a+ax}{a} = a+x$  نادرست است (بدون تجزیه کردن نمی توان ساده کرد)

ب)  $\frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$  درست

۱۱۷

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

الف)  $\frac{\Delta x}{3ab^2} \Rightarrow a=0$  یا  $b=0$

ب)  $\frac{2y}{y(2y-6)} \Rightarrow y=0$  یا  $2y-6=0 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{2}=3$

ج)  $\frac{2P}{P^2-P-12} = \frac{2P}{(P-3)(P+3)} \Rightarrow P=3$  یا  $P=-3$

د)  $\frac{2x+5}{x+5} \Rightarrow x=0$

ه)  $\frac{x^2-1}{x+5} \Rightarrow x=-5$

و)  $\frac{a+3}{2a+1} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید:

الف)  $\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{3-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2}$

ب)  $\frac{3x^2+8x}{12x+24} = \frac{3x(x+3)}{3x(x+3)} = \frac{x}{3}$

ج)  $\frac{24x^2}{12x^2-6x} = \frac{24x^2}{3x(2x-1)} = \frac{4x}{2x-1}$

د)  $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{y(y-3)(y+1)}{y(y+1)} = y-3$

ه)  $\frac{1-t^2}{t^2+1} = \frac{(1-t)(1+t)(1+t^2)}{1+t^2} = (1-t)(1+t)$

و)  $\frac{16x^2-9y^2}{8x-6y} = \frac{(4x-3y)(4x+3y)}{2(4x-3y)} = \frac{4x+3y}{2}$

ز)  $\frac{6a^2b^2}{Fab^2} = \frac{3a^2}{2b^2}$

ح)  $\frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2(a+4)}{(a+4)(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$

۳- عبارت هایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است معلوم کنید.

الف)  $\frac{2y+3}{2y-3}$

ب)  $\frac{2y-3}{3-2y} = \frac{2y-3}{-(2y-3)} = -1$

ج)  $\frac{2y+3}{3+2y} = \frac{2y+3}{2y+3} = 1$

د)  $\frac{2y+3}{-2y-3} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1$

۴- هریک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

۱) $\frac{a-y}{a+y}$	۲) $\frac{a+y}{a-y}$	۳) $\frac{a-y}{a-y}$	۴) $\frac{a+y}{a+y}$	۵) $\frac{y-a}{a+y}$
۶) $\frac{-a-y}{-a-y}$	۷) $\frac{-a-y}{y-a}$	۸) $\frac{a-y}{-a-y}$	۹) $\frac{y-a}{-a-y}$	۱۰) $\frac{-a+y}{-a+y}$

۵- در جای خالی چه عبارتی را باید نوشت؟

الف)  $\frac{1-Z}{Z} = \frac{(1-Z)(Z^y+1)}{Z^y+Z(Z^y+1)}$

ب)  $\frac{3x}{x-3} = \frac{3x(x+2)}{x^2-x-6}$

ج)  $\frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} \frac{(3y+2)}{(3y+2)}$

د)  $\frac{(x-5)(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-5)} = x+1$

۶- از عبارتهای زیر، هر کدام را که با عبارت  $\frac{z(x+y)}{t}$  برابر است، مشخص کنید.

الف)  $\frac{z}{t}(x+y)$  ✓

د)  $z \times \frac{x+y}{t}$  ✓

ب)  $\frac{zx+y}{t} \times$

ه)  $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$  ✓

ج)  $\frac{1}{t} \times z(x+y)$  ✓

و)  $\frac{zx}{t} + y \times$

ارزشیابی مستمر

کدام عبارت گویا و کدام گویا نیست؟ (۱ نمره)

الف)  $\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{3x}}$  (الف)      ب)  $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$  (ب)      ج)  $-5$  (ج)      د)  $\frac{y^2+1}{x-1}$  (د)

۲- مقادیری را تعیین کنید که به ازای آن‌ها عبارتهای گویای زیر تعریف نشده‌اند؟ (۱)

الف)  $\frac{2x-1}{4x-8}$  (الف)      ب)  $\frac{6x^2+1}{x^2+3x+2}$  (ب)

۳- عبارتهای گویای زیر را ساده کنید. (۴)

الف)  $\frac{18y^2x}{24x^2y}$  (الف)      ب)  $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$  (ب)      ج)  $\frac{x-3x^2}{9x^2-1}$  (ج)      د)  $\frac{a^2-b^2}{b-a}$  (د)

۴- حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید. (۱)

الف)  $\frac{2y+3}{-3-2y}$  (الف)      ب)  $\frac{x^2+1}{1+x^2}$  (ب)

۵- جای خالی، را با عبارت مناسب پر کنید. (۲)

الف)  $\frac{x^2+x}{y+1} = \frac{x^2+1}{y+1}$  (الف)      ب)  $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{\square}{x+2}$  (ب)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) گویا است      ب) گویا نیست      ج) گویا است      د) گویا نیست (هر قسمت ۰/۲۵)

۲ این عبارت به ازای  $x=2$  تعریف شده نیست. (۰/۵)      الف)  $\frac{2x-1}{4x-8} \Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$

۳ الف)  $\frac{6x^2+1}{x^2+3x+2} \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow (x+2)(x+1)=0$  (۰/۵)      ب)  $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=2$  و  $x=-2$  تعریف شده نیست.

۴ الف)  $\frac{2y+3}{-3-2y} = \frac{2y+3}{-(3+2y)} = -\frac{2y+3}{3+2y}$       ب)  $\frac{x^2+1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$

۵ الف)  $\frac{x^2+x}{y+1} = \frac{x^2+1}{y+1} \Rightarrow x^2+x-1 = x^2+1-1 \Rightarrow x = -1$       ب)  $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{x^2-9}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$

پهلو (دوره اول متوسطه)

۲۶۲



$$\frac{\frac{3}{4} \frac{y^2}{x} \frac{1}{1}}{\frac{3}{4} \frac{y^2}{x} \frac{1}{1}} = \frac{3y^2}{4x} \quad (1)$$

$$\text{ب) } \frac{x^2-2}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3} \quad (1)$$

$$\text{ج) } \frac{x-2x^2}{4x^2-1} = \frac{x(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{-x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{-x}{2x+1} \quad (1)$$

$$\text{د) } \frac{a^2-b^2}{b-a} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{-(a-b)(a^2+b^2)} = \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{-(a-b)(a^2+b^2)} \quad (o/\Delta)$$

$$= -(a+b)(a^2+b^2) \quad (o/\Delta)$$

$$\text{الف) } \frac{2y+3}{-3-2y} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1 \quad (o/\Delta)$$

$$\text{ب) } \frac{x^2+1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \quad (o/\Delta)$$

$$\text{الف) } \frac{x^2+x}{\square} = \frac{x^2+1}{y+1} \Rightarrow \frac{x(x^2+1)}{xy+x} = \frac{x^2+1}{y+1} \quad (1)$$

$$\text{ب) } \frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{\square}{x+2} \Rightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2} \quad (1)$$

## محاسبات عبارت‌های گویا

$$\text{۳) } \frac{a^2-b^2}{b} + \frac{(a-b)^2}{2ab} = \frac{a^2-b^2}{b} \times \frac{2ab}{(a-b)^2} =$$

$$\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{b} \times \frac{2ab}{(a-b)^2} =$$

$$= \frac{2a(a^2+ab+b^2)}{a-b}$$

نکته ۵: برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا دقیقاً همانند جمع و تفریق اعداد کسری عمل می‌کنیم. یعنی ابتدا برای عبارت‌هایی که قرار است جمع یا تفریق شوند مخارج مشترک می‌گیریم سپس با نوشتن کسری مساوی با کسرهایی داده شده آن‌ها را جمع و تفریق می‌کنیم.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd} \quad (b, d \neq 0)$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \frac{2x-1}{x+2} - \frac{3x}{x+2} = \frac{(2x-1)-(3x)}{x+2} = \frac{-x-1}{x+2}$$

نکته ۴: برای ضرب و تقسیم دو عبارت گویا دقیقاً مانند ضرب و تقسیم دو عدد کسری رفتار می‌کنیم. البته باید صورت و مخارج عبارت‌ها را تجزیه کنیم تا در صورت ساده شدن بتوانیم آن‌ها را با هم ساده کنیم.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (d, b, c \neq 0)$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$1) \frac{\frac{1}{x} \frac{1}{y} \frac{1}{z}}{\frac{1}{x} \frac{1}{y} \frac{1}{z}} = \frac{a}{a} = 1$$

$$2) \frac{x+2}{x^2-2x} \times \frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2} =$$

$$\frac{x+2}{x(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{1}{x}$$

$$\text{الف) } \frac{a-a^2}{a+1} = \frac{a-a^2}{a+1} = \frac{a-a^2}{a+1} + \frac{-a^2}{a+1} = \frac{a-a^2-a^2}{a+1} = \frac{a-2a^2}{a+1}$$

$$\frac{1}{(a-1)(a+1)} \times \frac{(a+1)}{a} = \frac{1}{a(a-1)}$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} = \frac{\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{y(x-y) - x(x+y)}{x(x-y) + y(x+y)}$$

صورت و مخرج را در  $(x^2 - y^2)$  ضرب می‌کنیم

$$\frac{(x^2 - y^2) \times (\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y})}{(x^2 - y^2) \times (\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y})} = \frac{y(x-y) - x(x+y)}{x(x-y) + y(x+y)}$$

$$\frac{y(x-y) - x(x+y)}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{yx - y^2 - x^2 - xy}{x^2 - xy + yx + y^2} = \frac{-x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1$$

۱۱۹

**فعالیت**  
توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل و حاصل عبارت را ساده کنید. برای انجام ضرب‌ها صورت و مخرج عبارت‌های گویا را تجزیه می‌کنیم و سپس ساده می‌کنیم و برای انجام تقسیم‌ها نیز با معکوس کردن کسر دوم آن‌ها را به ضرب تبدیل کرده و ضرب را انجام می‌دهیم.

$$\text{الف) } \frac{\frac{xy^2}{x^2z^2} \times \frac{16z^2}{3y^2}}{\frac{2yz}{3x}} = \frac{2yz}{3x}$$

$$\text{ب) } \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$$

$$\text{ج) } \frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{x-6}{(x-6)(x-6)} \times \frac{(x-6)(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$$

$$\text{د) } \frac{fx^2}{3xy} + \frac{8x}{y^2} = \frac{fx^2}{3xy} \times \frac{y^2}{y^2} + \frac{8x}{y^2} = \frac{fy^2}{3x} + \frac{8x}{y^2}$$

$$\text{ه) } \frac{a^2 - fa - 5}{a^2 - fa} + \frac{a^2 + 3a + 2}{a - f} = \frac{a^2 - fa - 5}{a^2 - fa} \times \frac{a - f}{a^2 + 3a + 2} = \frac{(a-5)(a+1)}{a(a-f)} \times \frac{a-f}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a(a+2)}$$

۱۲۰

کاردر کلاس  
حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4} = \frac{(a-2)(a+1)}{a+3} \times \frac{a+3}{(a+2)(a-2)} = \frac{a-1}{a-2}$$

$$\text{ب) } \frac{2x-1}{x+2} + \frac{-2x^2}{x^2-4} = \frac{(2x-1)(x-2) + (-2x^2)}{x^2-4} = \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - 2x^2}{x^2-4} = \frac{-5x+2}{x^2-4}$$

$$\text{ج) } \frac{x-1}{2x^2-2x} + \frac{3}{2x+2} = \frac{x-1}{2x(x-2)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

$$\frac{(x-1) \times 2(x+2) + 3(2x(x-2))}{6x(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2 + 4x - 2 - 6x^2 + 12x}{6x(x-2)(x+2)} = \frac{9x^2 - 6x - 9}{6x(x-2)(x+2)}$$

نکته: هرگاه صورت و مخرج یک عبارت گویا خود شامل عبارت‌های گویا باشند می‌گوئیم این عبارت گویا، یک عبارت گویای مرکب است. برای ساده کردن این عبارت‌ها صورت و مخرج را جداگانه حساب کرده سپس صورت و مخرج را بر هم تقسیم می‌کنیم یا اینکه می‌توانیم صورت و مخرج را در یک عبارت مناسب ضرب کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند و سپس محاسبه را انجام دهیم.  
مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱۱۹

لیم دوروزن آل متوسطه

۲۶۴

ب)  $\frac{a^y b + ab^y}{a} \times \frac{3ab}{(a+b)^y} = \frac{ab(a+b)}{a} \times \frac{3ab}{(a+b)^y} = \frac{3ab^2}{(a+b)^{y-1}}$

ج)  $\frac{x^y + 3x + 2}{x+2} + \frac{x+1}{x+5} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+5)} + \frac{x+5}{x+5} = x+5$

د)  $\frac{4x^2}{3xy^2} + \frac{8x}{9y^5} = \frac{4x^2 \cdot 3y^3}{3xy^2 \cdot 9y^3} + \frac{8x \cdot 3y^3}{9y^5 \cdot 3y^2} = \frac{4x^2 y^3}{3xy^5} + \frac{8xy^3}{9y^7} = \frac{4x^2 y^3}{3xy^5} + \frac{8xy^3}{9y^7}$

۱۲۰

فعالیت

توضیح دهید که هریک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است. هر جا لازم است حل را کامل. و مانند نمونه یک جمع و تفریق عددی مشابه آن را ارائه کنید.

الف)  $\frac{3x+7}{x+2} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7+2x-3}{x+2} = \frac{5x+4}{x+2}$

ب)  $\frac{3x+7}{x+2} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{3x+7-(2x-3)}{x+2} = \frac{3x+7-2x+3}{x+2} = \frac{x+10}{x+2}$

۳	+	۴	=	۷
۵	+	۵	=	۱۰
۳	-	۴	=	-۱
۵	+	۵	=	۱۰

ج)  $\frac{a^y - 2a}{a^y - 4} + \frac{a - 2}{a + 2} = \frac{a^y - 2a + (a - 2)(a^y - 4)}{(a^y - 4)(a + 2)}$

۷	+	۹	=	۷+۱۸	=	۲۵
۱۰	+	۵	=	۱۰	=	۱۰
۷	+	۳	=	۹۸+۳۵	=	۱۳۳
۳۰	+	۳۸	=	۴۲۰	=	۴۲۰

د)  $\frac{a^2 - 2a + a^2 - 4a + 2}{a^2 - 4} = \frac{2a^2 - 6a + 2}{a^2 - 4} = \frac{2(a^2 - 3a + 1)}{(a-2)(a+2)}$

ه)  $\frac{a+1}{a} - \frac{3a+2}{a(a+2)} = \frac{(a+1)(a+2) - (3a+2)}{a(a+2)} = \frac{a^2 + 3a + 2 - 3a - 2}{a(a+2)} = \frac{a^2}{a(a+2)} = \frac{a}{a+2}$

۱۲۱

کار در کلاس

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{x^y}{x-y} + \frac{y^y}{y-x} = \frac{x^y - y^y}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$

ب)  $\frac{6}{x} + \frac{4}{-x} = \frac{6-4}{x} = \frac{2}{x}$

ج)  $\frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} - \frac{x+2}{x+2} = \frac{2x^2 - 16 - (x+2)(x-2)}{x^2 - 4} = \frac{2x^2 - 16 - x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 12}{x^2 - 4}$

د)  $\frac{y}{(x-2)(x+1)} + \frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{y(x+2) + x(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{yx + 2y + x^2 - 2x}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{x^2 + 5x + 2y}{(x-2)(x+2)(x+1)}$

ه)  $\frac{y}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{yx(x-y) + 3y(x+1)}{3xy(x-y)^2} = \frac{yx^2 - yxy + 3xy + 3y}{3xy(x-y)^2} = \frac{yx^2 + xy + 3y}{3xy(x-y)^2}$

۱۲۱

**فعالیت**

توضیح دهید که هریک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن کسر مرکب با روش دیگر چه تفاوتی دارد؛ هر جا لازم است حل را کامل کنید. ( $x \neq 0$ )

در حل قسمت «الف» صورت و مخرج در  $x^2$  ضرب شده‌اند تا عبارت صورت و مخرج ساده‌تر شود سپس صورت و مخرج را تجزیه و ساده کرده‌ایم.

$$\text{الف) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

۱)

$$\text{ب) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} + \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} =$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

در حل قسمت (ب) ابتدا برای صورت و مخرج، مخرج مشترک  $x^2$  گرفته شده است سپس عبارت صورت بر عبارت مخرج تقسیم شده است.

$$\text{الف) } \frac{\frac{y}{a} - \frac{y}{a+1}}{\frac{y}{a+1} - \frac{y}{a}} = \frac{a(a+1)(\frac{y}{a} - \frac{y}{a+1})}{a(a+1)(\frac{y}{a+1} - \frac{y}{a})} = \frac{y(a+1) - ya}{ya - y(a+1)} = \frac{ya + y - ya}{ya - ya - y} = \frac{y - a}{-a - y}$$

۲)

$$\text{ب) } \frac{\frac{a}{a+1} - \frac{a}{a}}{\frac{a}{a+1} - \frac{a}{a}} = \frac{a(a+1) - ya}{ya - y(a+1)} = \frac{a(a+1) - ya}{ya - ya - y} = \frac{a(a+1) - ya}{-a - y}$$

$$\frac{y - a}{a(a+1)} + \frac{-a - y}{a(a+1)} = \frac{y - a - a - y}{a(a+1)} = \frac{-2a}{a(a+1)} = \frac{-2}{a+1} \quad a \neq 0, a \neq -1$$

۱۲۲

**کار در کلاس**

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است.)

$$\text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} = \frac{\frac{nm - nm - n^2}{n-m}}{\frac{n^2 - m^2 + m^2}{n^2 - m^2}} = \frac{-n^2}{n-m} \times \frac{n^2 - m^2}{n^2 - m^2} = \frac{-n^2}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2 - m^2}$$

$$= \frac{-n^2}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2 - m^2} = \frac{-n^2}{n-m} \times \frac{(n-m)(n+m)}{n^2 - m^2} = \frac{-n(n+m)}{n^2 - m^2}$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} = \frac{\frac{y(x-y) - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{-y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \times \frac{(x+y)(x-y)}{x^2 + y^2} = -1$$

۱۲۱

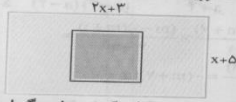
تیم (دوره اول متوسطه)

۲۶۶

۱۲۲

فعالیت

طول ضلع مربع در داخل مستطیل، نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل  $\frac{5}{۲۶}$  باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.



حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله، پاسخ به دست می‌آید.

مساحت مربع =  $\frac{x+5}{۲}$       مساحت مستطیل =  $(x+5)^2$       مساحت مستطیل =  $(2x+3)(x+5)$

$$\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\left(\frac{x+5}{۲}\right)^2}{(2x+3)(x+5)} = \frac{5}{۲۶}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{4(2x+3)(x+5)} = \frac{5}{۲۶} \Rightarrow \frac{x+5}{4x+6} = \frac{5}{۱۳} \Rightarrow ۱۳x = ۳۵ \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow \text{طول} = 2x+3 = 2 \times 5 + 3 = 13$$

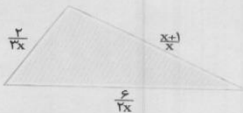
$$\text{عرض} = x+5 = 5+5 = 10$$

با توجه به این که نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل یک عبارت گویا شده است، ابتدا این عبارت گویا تا حد امکان ساده شده، سپس یک معادله تشکیل شده است، که با حل آن مقدار  $x$  و در نتیجه طول و عرض مستطیل به دست می‌آید.

۱۲۳

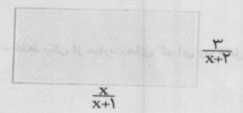
کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را برحسب  $x$  به دست آورید و آن را ساده کنید. ( $x > 0$ )



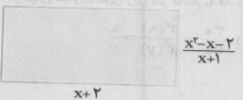
$$\text{محیط} = \frac{2}{3x} + \frac{x}{3} + \frac{x+1}{x} = \frac{4+18+6x+6}{6x}$$

$$= \frac{28+6x}{6x} = \frac{14+3x}{3x}$$



$$\text{محیط} = 2 \times \left( \frac{3}{x+2} + \frac{x}{x+1} \right) = 2 \times \left( \frac{3(x+1) + x(x+2)}{(x+2)(x+1)} \right) = 2 \times \left( \frac{x^2 + 5x + 3}{(x+2)(x+1)} \right)$$

$$= \frac{2x^2 + 10x + 6}{(x+2)(x+1)}$$



۲- مساحت مستطیل زیر را برحسب  $x$  به دست آورید. ( $x > 2$ )

$$\text{مساحت} = (x+2) \times \frac{x^2-x-2}{x+1}$$

$$= (x+2) \times \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = (x+2)(x-2) = x^2 - 4$$

۱۳۳

تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (در همه تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف)  $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16} = \frac{(a-4)(a+4)}{a+4} \times \frac{a+2}{(a-4)(a-4)} = \frac{a+2}{a-4}$

ب)  $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{m^2-1}{m+1} = \frac{(m-7)(m+7)}{m+1} \times \frac{(m+1)(m+1)}{m-1} = \frac{(m-7)(m+7)(m+1)}{m-1}$

ج)  $\frac{x^2-3x+4}{4x^2y-8xy} \div \frac{x^2+x-6}{6x^2+18} = \frac{(x-3)(x+4)}{4xy(x-2)} \times \frac{6x^2(x+3)}{(x-2)(x+3)} = \frac{3(x^2+3)}{2xy(x+3)}$

د)  $\frac{1-c^2}{b^2} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2} = \frac{(1-c)(1+c)}{b^2} \times \frac{b^2}{(c-1)(c-1)} = \frac{c+1}{-b(c-1)}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف)  $\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y(x-y)^2}{x^2-y^2} = \frac{x(x^2-y^2) - y(x-y)^2}{x^2-y^2} = \frac{x^3-xy^2 - y(x^2-2xy+y^2)}{x^2-y^2} = \frac{x^3-xy^2 - yx^2 + 2xy^2 - y^3}{x^2-y^2} = \frac{x^3 - yx^2 - xy^2 + 2xy^2 - y^3}{x^2-y^2} = \frac{x^2(x-y) + y^2(x-y)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{1}{x+y}$

ب)  $\frac{x+y}{ax-bx} + \frac{y+a}{by-ay} = \frac{y(x+y) - x(y+a)}{xy(a-b)} = \frac{xy + y^2 - xy - ax}{xy(a-b)} = \frac{y^2 - ax}{xy(a-b)}$

ج)  $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)(a-b) - a^2 + b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab - b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$

د)  $\frac{4+x^2-2x}{y+x} - y-x = \frac{4+x^2-2x - y(y+x) - x(y+x)}{y+x} = \frac{4+x^2-2x - y^2 - xy - xy - x^2}{y+x} = \frac{4 - y^2 - 2xy - x^2}{y+x} = \frac{-(y^2 + 2xy + x^2) + 4}{y+x} = \frac{-(y+x)^2 + 4}{y+x}$

۳- فقط یکی از عبارات‌های گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$\frac{a^2+5}{a^2} , \frac{a^2+3}{3} , \frac{a^2+b^2}{a^2} , \frac{a^2-5a}{a} = \frac{a(a-5)}{a} = (a-5)$

۴- از میان عبارات‌های زیر، هر کدام را که مساوی عبارت  $\frac{x}{y}$  است، معلوم کنید.

الف)  $\frac{x+3}{y+3}$

ب)  $\frac{3-x}{3-y}$

ج)  $\frac{3x}{3y} = \frac{x}{y}$

د)  $\frac{x^2}{y^2}$

ه)  $\frac{a^2x}{a^2y} = \frac{a^2(x)}{a^2(y)} = \frac{x}{y}$

۱۳۳

لیحه (روزه اول نوبت)



۵- عبارت  $\frac{-x+3}{x+5}$  با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟  
 با عبارت (ب) برابر است.

الف)  $\frac{x+3}{x+5}$     ب)  $\frac{x-2}{x+5}$     ج)  $\frac{x-3}{x+5}$     د)  $\frac{3-x}{x+5}$

۶- کدام یک از عبارت‌های زیر به درستی ساده شده است؟

الف)  $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5$  غلط  
 ب)  $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$  درست

۷- اگر  $A = a^2 - b^2$  و  $B = a^2 + b^2$  و  $C = 2ab$ ، حاصل عبارت  $\frac{A^2 - B^2}{C^2}$  را به دست آورید.

روش اول:  

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2} = \frac{(A-B)(A+B)}{C^2} = \frac{(a^2 - b^2 - a^2 - b^2)(a^2 - b^2 + a^2 + b^2)}{(2ab)^2} = \frac{(-2b^2)(2a^2)}{4a^2b^2} = -1$$

روش دوم:  

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{4a^2b^2} = \frac{-4a^2b^2}{4a^2b^2} = -1$$

۸- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح کنید. (همه عبارت‌های جبری تعریف شده فرض می‌شود.)

الف)  $\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{ab}$  (نادرست)  $\Rightarrow \frac{a-b}{b-a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$   
 ب)  $\frac{x^2}{x^2} = x^2$  (نادرست)  $\Rightarrow \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$   
 ج)  $\frac{a}{\Delta} \cdot \frac{y-b}{\Delta} = \frac{a-y-b}{\Delta}$  (نادرست)  $\Rightarrow \frac{a}{\Delta} \cdot \frac{y-b}{\Delta} = \frac{a-y+b}{\Delta}$   
 د)  $\frac{a-b}{b-a} = 1$  (اگر  $a=b$ ) (نادرست)  $\Rightarrow \frac{a-b}{b-a} = -1$   
 ه)  $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+b}$  (نادرست)  $\Rightarrow \frac{1}{a-b} = \frac{b-a}{b-a}$   
 و)  $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$  (نادرست)  $\Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b$   
 ز)  $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$  (نادرست)  $\Rightarrow \frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{c(a+b)}{c(1+d)} = \frac{a+b}{1+d}$   
 ح)  $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b}$  (درست)  $\Rightarrow \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

طول مستطیل =  $2x - 1$  و عرض =  $x$   
 مساحت مستطیل =  $x(2x-1)$     محیط مستطیل =  $2(2x-1+x) = 6x-2$   
 نسبت =  $\frac{6x-2}{x(2x-1)}$

۲۶۹

۱۰- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف)  $\frac{a-a^2}{a^2-1} = \frac{a-a^2}{a^2-1} = \frac{a-a^2}{a^2-1} + \frac{-a^2}{a+1} \Rightarrow \frac{a(1-a)}{(a-1)(a+1)} \times \frac{a+1}{-a^2} = \frac{1}{a}$

ب)  $\frac{1}{\frac{x-y}{x^2-9y^2}} = \frac{x+y-2x+2y}{x^2-y^2} = \frac{2y-x}{x^2-y^2}$

ج)  $\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2x(x-1) + (x+1) - 2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$

دو عبارت گویا بنویسید که:

الف) حاصل ضرب آنها  $\frac{a-y}{a+y}$  شود.

ب) حاصل جمع آنها  $\frac{a-y}{a+y}$  شود.

۱۲- عرض مستطیل مقابل را بر حسب  $x$  به دست آورید. مساحت مستطیل  $9x^2 - 9$  است.

مساحت = عرض مستطیل  $\times$  عرض مستطیل

$A = x^2 - 9$

عرض مستطیل  $= (x^2 - 9) + \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} = x^2 - 9 + \frac{x - 3}{x^2 - x - 12} = (x - 3)(x + 3) \times \frac{(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = (x - 3)$

۲۷۰

## ارزشیابی مستمر

۱- ضربها و تقسیمهای زیر را انجام دهید. (۴ نمره)

الف)  $\frac{18xy^2}{35x^2} \times \frac{21x^3}{2y} =$

ب)  $\frac{4y^2}{3ab} + \frac{2yx}{9a^2b} =$

ج)  $\frac{a^2-4a-5}{a^2+3a+2} \times \frac{a-4}{a^2-4a} =$

د)  $\frac{x^2y+y^2x}{y} + \frac{(x+y)^2}{xy} =$

۲- حاصل جمعها و تفریقهای زیر را به دست آورید. (۳)

الف)  $\frac{x^2-2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} =$

ب)  $\frac{4}{a^2+a-20} + \frac{2}{a^2+6a+5} =$

۳- حاصل عبارت  $\frac{3}{x-y} + \frac{1}{x+y}$  را بیابید. (۱/۵)

۴- عرض مستطیلی را به دست آورید که طول آن  $\frac{1}{x-2}$  و مساحت آن  $\frac{x}{x^2-2x}$  باشد. (۱/۵)

## پاسخ ارزشیابی مستمر

الف)  $\frac{18xy^2}{35x^2} \times \frac{21x^3}{2y} = \frac{27x^2y}{5}$  (۱)

ب)  $\frac{4y^2}{3ab} + \frac{2yx}{9a^2b} = \frac{6ay^2}{x}$  (۱)

ج)  $\frac{a^2-4a-5}{a^2+3a+2} \times \frac{a-4}{a^2-4a} = \frac{(a-5)(a+1)}{(a+1)(a+2)} \times \frac{a-4}{a(a-2)} = \frac{a-5}{a(a+2)}$  (۱)

د)  $\frac{x^2y+y^2x}{y} + \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x^2(x+y)}{(x+y)(x+y)} + \frac{x}{(x+y)(x+y)} = \frac{x^2}{x+y}$  (۱)

الف)  $\frac{x^2-2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x^2-2-x(x+1)}{x^2-1} = \frac{-2-x}{x^2-1}$  (۱/۵)

ب)  $\frac{4}{a^2+a-20} + \frac{2}{a^2+6a+5} = \frac{4(a+1)+2(a-4)}{(a+5)(a-4)(a+1)} = \frac{2a+4+2a-8}{(a+5)(a-4)(a+1)} = \frac{4a-4}{(a+5)(a-4)(a+1)}$  (۱/۵)

۳  $\frac{3}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{3(x+y)+(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{4x+2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x+2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x-y}$  (۱/۵)

۴ طول + مساحت = عرض  $\Rightarrow$  عرض = مساحت  $\div$  طول  $= \frac{x}{x^2-2x} \div \frac{1}{x-2} = \frac{x}{x(x-2)} \times \frac{x-2}{1} = 1$

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

نکته ۴: جدول درستی

گام ۳) خارج قسمت مرحله قبل را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و زیر مقسوم می‌نویسیم و آن را از مقسوم کم می‌کنیم. (منها می‌کنیم).  
گام ۴) اگر درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر نبود، مراحل ۱ تا ۳ را بار دیگر تکرار می‌کنیم. تا جایی پیش می‌رویم که درجه باقیمانده از مقسوم‌علیه کمتر شود.  
مثال: تقسیم زیر را انجام دهید و باقیمانده را مشخص کنید.

نکته ۷: برای تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای، آن‌ها را مانند یک کسر نوشته و سپس به کمک قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها، این کسر را ساده می‌کنیم.  
مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید.

استاندارد

$$(x^3 - 3x^2 + x^2) \div (x+1)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + x^2 + (x+1) \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \\ -2x^2 + 2x^2 + (x+1) \\ \underline{-(2x^2 + 2x)} \\ 0x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-(2x + 2)} \\ -1 \end{array}$$

$$3x^2yz + 9xy^2z = \frac{3x^2yz}{3} + \frac{9xy^2z}{3} = \frac{x^2yz}{1} + \frac{3xy^2z}{1} = \frac{x^2yz + 3xy^2z}{1}$$

نکته ۱۰: اگر باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای Q صفر باشد، می‌گوییم چندجمله‌ای P بر چندجمله‌ای Q بخش‌پذیر است.  
مثال: آیا چندجمله‌ای  $3x^3 - 2x - 1$  بر چندجمله‌ای  $3x + 1$  بخش‌پذیر است؟ چرا؟  
بله، زیرا طبق تقسیم مقابل معلوم می‌شود که باقیمانده تقسیم برابر صفر است.

مثال: تقسیم مقابل را انجام دهید.

$$(14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2) \div (2x^2y^2z)$$

$$\frac{14x^3yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{7x}{y} - \frac{3}{xyz} + \frac{3z}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 2x - 1 \mid 3x + 1 \\ \underline{-(3x^3 + x)} \\ -2x - 1 \\ \underline{-(2x + 1)} \\ 0 \end{array}$$

نکته ۹: برای تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای، گام‌های زیر را برمی‌داریم:  
گام ۱) مقسوم و مقسوم‌علیه را به صورت استاندارد (بر اساس توان بیشتر به کمتر متغیر) مرتب می‌کنیم.  
گام ۲) جمله اول مقسوم را بر جمله اول مقسوم‌علیه تقسیم کرده و در خارج قسمت می‌نویسیم.

۱۱۶

فعالیت  
توضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است: جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.

الف)  $\frac{7a^3 + 5a^2 - 8a}{7a^2} = \frac{7a^3}{7a^2} + \frac{5a^2}{7a^2} - \frac{8a}{7a^2} = \frac{7}{1}a + \frac{5}{7} - \frac{8}{7a}$

ب)  $\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^3yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{7x}{y} - \frac{3}{xyz} + \frac{3z}{2}$

ج)  $(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2} = -2y + 1 - \frac{3}{y}$

برای انجام هر یک از این تقسیم‌ها ابتدا تک تک جمله‌های صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، سپس کسرها را ساده می‌کنیم.

نام دوره اول متوسطه

کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

۱۲۷

الف) 
$$\frac{-\frac{3}{2}a^3b^2c^2}{\frac{2}{3}ab^2c^2} = \frac{-2a^2c}{2b^2}$$

ب) 
$$\frac{24x^6y - 2z + 3xyz}{x^2z} = \frac{24x^6y}{x^2z} + \frac{2z}{x^2z} + \frac{3xyz}{x^2z} = \frac{24x^4y}{z} + \frac{2}{x^2} + \frac{3y}{x}$$

فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر و حل را کامل کنید.  
باقیمانده این تقسیم چیست؟  $9x + 1$

الف) 
$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3x^2 + x + 7 \overline{) 3x^2 - 2} \\ \underline{\pm 4x^2} \phantom{- 2} \\ -3x^2 + 9x + 7 \\ \underline{\pm 3x^2} \phantom{+ 7} \\ 9x + 1 \end{array}$$

ب) 
$$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 24 \overline{) x - 8} \\ \underline{\pm x^2} \phantom{- 8} \\ 3x - 24 \\ \underline{\pm 3x} \phantom{- 24} \\ -24 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.  
رابطه‌های تقسیم:

$$\begin{aligned} (5x^2 + 6)(2x^2 - 3) + 2x - 1 \\ = 10x^4 - 15x^2 + 12x^2 - 18 + 2x - 1 \\ = 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \end{aligned}$$

و درجه چند جمله‌ای  $2x - 1$  از درجه  $2x^2 - 3$  کمتر است.

$$\begin{array}{r} 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \overline{) -3 + 2x^2} \\ \underline{\pm 10x^4} \phantom{+ 2x^2} \\ \phantom{10x^4} \pm 15x^2 \\ \underline{\pm 15x^2} \phantom{+ 2x} \\ \phantom{10x^4} \phantom{\pm 15x^2} \pm 19 \\ \underline{\pm 19} \\ 2x - 19 \end{array}$$

کار در کلاس

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) 
$$\begin{array}{r} 6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \overline{) 2 - x} \\ \underline{\pm 6x^3} \phantom{- 19x^2} \\ \phantom{6x^3} \phantom{- 19x^2} \pm 12x^2 \\ \underline{\pm 12x^2} \phantom{+ 16x} \\ \phantom{6x^3} \phantom{- 19x^2} \phantom{\pm 12x^2} \pm 16x - 4 \\ \underline{\pm 16x} \phantom{- 4} \\ \phantom{6x^3} \phantom{- 19x^2} \phantom{\pm 12x^2} \phantom{\pm 16x} -4 \end{array}$$

ب) 
$$\begin{array}{r} -x^3 - 12 + 8x \overline{) x + 6} \\ \underline{\pm x^3} \phantom{- 12} \\ \phantom{-x^3} \phantom{- 12} \pm 8x \\ \underline{\pm 8x} \phantom{- 12} \\ \phantom{-x^3} \phantom{- 12} \phantom{\pm 8x} -12 \\ \underline{\pm 12} \\ \phantom{-x^3} \phantom{- 12} \phantom{\pm 8x} \phantom{\pm 12} 0 \end{array}$$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) 
$$\frac{-\frac{1}{9}x^3y^3z^3}{\frac{1}{9}xy^2z^2} = -\frac{1}{9}xy^2z^2$$

ب) 
$$\frac{2a^2y - a^2y^2 + 15xy}{-5y^2} = \frac{2a^2y}{-5y^2} - \frac{a^2y^2}{-5y^2} + \frac{15xy}{-5y^2} = \frac{-2a^2}{5y} + \frac{a^2}{5} - \frac{3x}{y}$$

ج)  $(x^3 - 27) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 27 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{\pm x^3 \mp 3x^2} \phantom{+ 0} \\ 2x^2 - 27 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 2x^2 \mp 6x} \phantom{+ 0} \\ 4x - 27 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 4x \mp 12} \phantom{+ 0} \\ -15 \phantom{+ 0} \end{array}$$

د)  $(3y^3 - 10y - 24) \div (3y - 4)$

$$\begin{array}{r} 3y^3 - 10y - 24 \quad | \quad 3y - 4 \\ \underline{\pm 3y^3 \mp 4y^2} \phantom{+ 0} \\ -4y^2 - 10y - 24 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 4y^2 \mp 16y} \phantom{+ 0} \\ 6y - 24 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 6y \mp 24} \phantom{+ 0} \\ -32 \phantom{+ 0} \end{array}$$

ه) 
$$\frac{2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{2x^2 - x^2 + x^2 - x + 1} \quad | \quad \frac{x+3}{2x^2 - x^2 + x^2 - x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad | \quad 2x^2 - x^2 + x^2 - x + 1 \\ \underline{\pm 2x^5 \mp 2x^4} \phantom{+ 0} \\ -3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 3x^4 \mp 3x^3} \phantom{+ 0} \\ x^2 - 2x + 3 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm x^2 \mp 3x} \phantom{+ 0} \\ -x^2 - 2x + 3 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm x^2 \mp 3x} \phantom{+ 0} \\ x + 3 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm x \mp 3} \phantom{+ 0} \\ 0 \end{array}$$

۵۲ خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

۱- 
$$\frac{-3x^5 + 4x^4 + x^3 + 5}{1 - x^2}$$

$$\begin{array}{r} -3x^5 + 4x^4 + x^3 + 5 \quad | \quad 1 - x^2 \\ \underline{\pm 3x^5 \mp 3x^3} \phantom{+ 0} \\ +7x^4 + x^3 + 5 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 7x^4 \mp 7x^2} \phantom{+ 0} \\ 8x^3 + 5 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 8x^3 \mp 8x} \phantom{+ 0} \\ 8x^2 + 5 \phantom{+ 0} \\ \underline{\pm 8x^2 \mp 8x} \phantom{+ 0} \\ 5 \phantom{+ 0} \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم به صورت زیر می‌باشند:

۱- درجه عبارت باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه  $(-x^2 + 1)$  کمتر است.  

$$(-x^2 + 1)(-4x^3 + 3x + 4) + (-x^2 - 3x + 9) = -4x^5 - 3x^4 + x^3 + 5 - 2$$



۲- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر  $2x^3 + 15x^2 + 28x$  است. اگر ارتفاع این جعبه  $x$  و طول آن  $x+4$  باشد، عرض آن را به دست آورید.

ارتفاع  $\times$  عرض  $\times$  طول = حجم مکعب مستطیل  
 $\Rightarrow \frac{x(x+4)}{x^2+4x} + (2x^3 + 15x^2 + 28x)$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 15x^2 + 28x \quad | \quad x^2 + 4x \\ \pm 2x^2 \pm 8x \\ \hline 7x^2 + 28x \\ \pm 7x^2 \pm 28x \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow \text{عرض} = 2x + 7$$

۳- اگر چند جمله‌ای  $20x^3 + 23x^2 - 10x + a$  بر  $2x^2 + 3x + 3$  بخش پذیر باشد،  $a$  را به دست آورید.  
 باید باقی مانده تقسیم  $20x^3 + 23x^2 - 10x + a$  بر  $2x^2 + 3x + 3$  برابر با صفر باشد.

$$\begin{array}{r} 20x^3 + 23x^2 - 10x + a \quad | \quad 2x^2 + 3x + 3 \\ \pm 20x^2 \pm 30x \pm 60 \\ \hline 3x^2 - 40x + a - 60 \\ \pm 3x^2 \pm 45x \pm 90 \\ \hline -16x + a - 30 \\ \pm 16x \pm 12 \\ \hline +12 + a \end{array} \Rightarrow 12 + a = 0 \Rightarrow a = -12$$

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت  $2x^2 - 9x + 9$  را بر هر یک از عبارت‌های زیر به دست آورید.

$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad   \quad x + 2 \\ \pm 2x^2 \pm 4x \\ \hline -15x + 9 \\ \pm 15x \pm 30 \\ \hline 21 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad   \quad x - 2 \\ \pm 2x^2 \pm 4x \\ \hline -13x + 9 \\ \pm 13x \pm 26 \\ \hline 35 \end{array}$
$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad   \quad 2x - 3 \\ \pm 2x^2 \pm 6x \\ \hline -15x + 9 \\ \pm 15x \pm 45 \\ \hline 36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad   \quad 2x + 3 \\ \pm 2x^2 \pm 6x \\ \hline -15x + 9 \\ \pm 15x \pm 45 \\ \hline 54 \end{array}$

طبق باقیمانده‌های به دست آمده، چند جمله‌ای  $2x^2 - 9x + 9$  بر  $(x-2)$  و  $(2x-3)$  بخش پذیر است:

$$2x^2 - 9x + 9 = (2x - 3)(x - 3)$$

## ارزشیابی مستمر

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید. (۲ نمره)

الف)  $\frac{21x^2y - 14xy^2 + 28x^2y^2}{42xy}$

ب)  $\frac{4x^3 + 3x}{2x^2}$

۲- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و برای هر یک رابطه تقسیم را بنویسید. (۳)

الف)  $(3x - 4x^2 + 1) + (x - 2)$

ب)  $2x^3 - 4x + 1 \mid 3 + x$

۳- آیا چند جمله‌ای  $x^3 - 1$  بر چند جمله‌ای  $x^2 + x + 1$  بخش پذیر است؟ (۱)

۴- مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای  $2x^3 + x^2 - 4x + m$  بر  $x - 1$  بخش پذیر باشد. (۲)

۵- مساحت یک متوازی‌الاضلاع  $3x^2 - 2x - 5$  و ارتفاع آن  $3x - 5$  می‌باشد. قاعده این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید. (۲)

## پاسخ ارزشیابی مستمر

الف)  $\frac{21x^2y - 14xy^2 + 28x^2y^2}{42xy} = \frac{21x^2y}{42xy} - \frac{14xy^2}{42xy} + \frac{28x^2y^2}{42xy}$  (۰/۵)

$$= \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{2xy}{3}$$
 (۰/۵)

ب)  $\frac{4x^3 + 3x}{2x^2} = \frac{4x^3}{2x^2} + \frac{3x}{2x^2} = 2x + \frac{3}{2x}$  (۱)

$$\begin{array}{r} -4x^2 + 3x + 1 \mid x - 2 \\ -(-4x^2 + 8x) \quad -4x - 5 \\ \hline -5x + 1 \\ -(-5x + 10) \\ \hline -9 \end{array}$$
 (۱)

رابطه تقسیم  $\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } (x-2) < \text{درجه } (-9) \quad (0/25) \\ -4x^2 + 3x + 1 = (x-2)(-4x-5) + (-9) \quad (0/25) \end{array} \right.$  (ب)

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 4x + 1 \mid x + 3 \\ -(2x^3 + 6x^2) \quad 2x^2 - 6x + 14 \\ \hline -6x^2 - 4x + 1 \\ -(-6x^2 - 18x) \\ \hline 14x + 1 \\ -(14x + 42) \\ \hline -41 \end{array}$$
 (۱)

رابطه تقسیم  $\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } (x+3) < \text{درجه } (-41) \quad (0/25) \\ 2x^3 - 4x + 1 = (x+3)(2x^2 - 6x + 14) + (-41) \quad (0/25) \end{array} \right.$

نیم دوره اول متوسطه

۲۷۶

۳ اگر باقیمانده تقسیم  $(x^3 - 1)$  بر  $(x^2 + x + 1)$  برابر صفر باشد، بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} x^3 - 1 \\ -(x^2 + x + 1) \\ \hline -x^2 - x - 1 \\ -(-x^2 - x - 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} |x^2 + x + 1 \\ x - 1 \end{array} \quad (o/5)$$

چند جمله ای  $x^3 - 1$  بر چند جمله ای  $x^2 + x + 1$  بخش پذیر است. (o/5)  
 ۴ باید باقی مانده تقسیم  $2x^2 + x^2 - 4x + m$  بر  $x - 1$  را برابر صفر قرار دهیم. (o/5)

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x^2 - 4x + m \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline 3x^2 - 4x + m \\ -(3x^2 - 3x) \\ \hline -x + m \\ -(-x + 1) \\ \hline m - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} |x - 1 \\ 2x^2 + 2x - 1 \end{array} \quad (1)$$

۵ باید مساحت را بر ارتفاع تقسیم کنیم تا قاعده پهن دست آید.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x - 5 \\ -(3x^2 - 5x) \\ \hline 3x - 5 \\ -(3x - 5) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} |3x - 5 \\ x + 1 \end{array} \quad (1) \Rightarrow \text{قاعده} = x + 1$$

آزمون تلفیقی

بهت نسل ۷

در عبارت های زیر دور عبارت های گویا خط بکشید.

الف)  $\frac{3x^2 - 1}{x + 5}$  ب)  $\frac{4x^2 - 3}{\sqrt{x}}$  ج)  $\frac{2x - 1}{3}$  د)  $\frac{\sqrt{3x}}{2y - 1}$

عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

الف)  $\frac{3x - x^2}{x^2 - 9}$  ب)  $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4x + 4}$

۱ مشخص کنید عبارت گویای  $\frac{2}{x^2 - 3x + 2}$  به ازای چه مقادیری برای  $x$  تعریف نشده است؟

۲ حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

الف)  $\frac{a^2 - 4a - 5}{a^2 - 4a} + \frac{a^2 + 3a + 2}{a - 4}$  ب)  $\frac{2x^2 - 16}{x^2 - 4} - \frac{x + 4}{x + 2}$

۳ عبارت گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

- ۶- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.
- الف)  $\frac{4x^2yz - 3oxy^2z - 1ox^2y^2z^2}{4x^2yz^2}$
- ب)  $9x^3 - 4x + 1 \mid x$
- ۷- اگر چند جمله‌ای  $3x^2 - 2x + a$  بر چند جمله‌ای  $x + 2$  بخش پذیر باشد، مقدار  $a$  را بیابید.

## پایخ آزمون کنش فصل ۷

- الف)  $\frac{3x^2-1}{x+1}$  (۰/۲۵) ،  $\frac{\sqrt{3x}}{2y-1}$  (۰/۲۵) ۱
- الف)  $\frac{3x-x^2}{x^2-9} = \frac{x(3-x)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x+3}$  (۰/۵) ۲
- ب)  $\frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$  (۰/۵)
- ۳ به ازای  $x=1$  و  $x=2$  تعریف نشده است.  $\frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{2}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow x \neq 1, x \neq 2$  (۰/۵)
- الف)  $\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} + \frac{a^2+3a+2}{a-2} = \frac{(a+1)(a-5)}{a(a-2)} \times \frac{a-2}{(a+1)(a+2)} = \frac{a-5}{a(a+2)}$  (۰/۵) ۴
- ب)  $\frac{2x^2-16-(x+2)(x-2)}{x^2-4} = \frac{2x^2-16-x^2-2x+8}{x^2-4} = \frac{x^2-2x-8}{x^2-4} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$  (۰/۵) ۵
- ۱-  $\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = \frac{x^2-x-6}{x^2} = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2}$  (۰/۲۵) (۰/۲۵)
- ۱-  $\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{4x+3}{x^2} = \frac{x^2-4x-6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2-4x-6}$  (۰/۲۵)
- $= \frac{(x-3)(x+2)}{x^2} \times \frac{x^2}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$  (۰/۵)
- الف)  $\frac{4x^2yz - 3oxy^2z - 1ox^2y^2z^2}{4x^2yz^2} = \frac{4x^2yz}{4x^2yz^2} - \frac{3oxy^2z}{4x^2yz^2} - \frac{1ox^2y^2z^2}{4x^2yz^2} = \frac{1}{z} - \frac{3oy}{4xz} - \frac{1}{4z}$  (۰/۵) ۶
- ب)
- $9x^3 - 4x + 1 \mid x + 1$
- $-(9x^3 + 9x^2)$   $9x^2 - 4x + 5$  (۰/۵)
- $-9x^2 - 4x + 1$
- $-(-9x^2 - 9x)$
- $5x + 1$
- $-(5x + 5)$
- $-4$  (۰/۵)



بیم (نوبه اول متوسطه)

کلاس پایه ۷

۷ باید باقی مانده تقسیم  $3x^2 - 2x + a$  بر  $x + 2$  برابر با صفر باشد.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x + a \quad | \quad x + 2 \\ -(3x^2 + 6x) \\ \hline -8x + a \\ -(-8x - 16) \\ \hline a + 16 \end{array} \quad (o/25)$$

$$a + 16 = 0 \Rightarrow a = -16 \quad (o/25)$$

## ۸ فصل ۸ حجم و مساحت

### ۱ کره حجم و مساحت کره

پایه در سن

حجم  $\rightarrow V = \pi R^2 h = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi$

مساحت جانبی  $\rightarrow S = 2\pi R h = 2\pi \times 2 \times 5 = 20\pi$

نکته: مجموعه نقاطی از فضا را که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی به نام مرکز مقدار ثابت باشد کره و آن مقدار ثابت را شعاع کره می‌گویند. حجم و مساحت کره از رابطه زیر به دست می‌آید: (R شعاع کره است)

حجم کره  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

مساحت کره  $S = 4\pi R^2$

مثال: حجم و مساحت کره‌ای به شعاع ۶ را بیابید.

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi$

$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 6^2 = 144\pi$

مثال: شعاع کره‌ای را بیابید که حجم و مساحت آن با هم برابر باشند.

طرفین را بر  $\pi R^2$  تقسیم می‌کنیم

$V = S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{4}{3}R = 4 \Rightarrow R = 3$

نکته ۱: طبق آنچه در سال‌های گذشته آموختیم، حجم‌های منشوری (منشور و استوانه) با فرمول زیر قابل محاسبه هستند. ارتفاع  $\rightarrow S \cdot h = V \leftarrow$  حجم منشور یا استوانه

نکته ۲: اگر شعاع قاعده یک استوانه R و ارتفاع آن h باشد، حجم استوانه را می‌توان با فرمول زیر نیز بیان کرد.

نکته ۳: مساحت جانبی منشور و استوانه از رابطه زیر به دست می‌آید. البته می‌توان بدون استفاده از این فرمول و با محاسبه مساحت وجه‌های جانبی و جمع کردن آن‌ها نیز مساحت جانبی را حساب کرد.

ارتفاع  $\rightarrow p \cdot h =$  مساحت جانبی منشور یا استوانه

نکته ۴: اگر شعاع قاعده یک استوانه R و ارتفاع آن h باشد، مساحت جانبی استوانه با فرمول زیر به دست می‌آید.

مساحت جانبی استوانه  $= 2\pi R h$

مثال: حجم و مساحت جانبی استوانه‌ای زیر را حساب کنید.



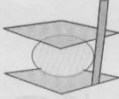
### ۱۳۱ فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید؛ دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گویند. با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید



کره مجموعه نقاطی از فضا است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک اندازه هستند. به این اندازه شعاع کره می‌گوییم.

- ۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت راه محاسبه حجم کره را پیدا کنیم.
- یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.
  - مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی قطر کره را اندازه بگیرید.



- مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.



در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره  $R$  باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را برحسب  $R$  نشان دهید.

ارتفاع استوانه:  $2R$

شعاع قاعده استوانه:  $R$

حجم استوانه:  $\pi R^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$



• توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را ببرید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر کنید و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آب از آن خارج نشود، با ۲ نیم کره فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟ ۲ برابر حجم نیم کره است.

ب) حجم استوانه، چند برابر حجم کره است؟  $1/5$  برابر حجم کره است.

ج) بنابراین حجم کره  $\frac{2}{3}$  برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع  $R$  را به دست آورید.

$$\text{حجم کره} = \frac{2}{3} \times (\text{حجم استوانه}) = \frac{2}{3} \times 2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

۱۳۳

کار در کلاس

کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است.

الف) حجم کره را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{شعاع کره} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حجم استوانه} = \pi R^2 h \\ \text{ارتفاع} = 10 \\ \text{شعاع قاعده} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow V = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi$$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$\text{حجم فضای بین کره و استوانه} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = 250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{750\pi - 500\pi}{3} = \frac{250}{3}\pi$$

۱۳۴

پیدا کردن مرکز کره

تمرین

۲۸۰



۲- حجم نیم کره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر را به دست آورید.

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{2000}{3} \pi$$

۱۳۳

### فعالیت

۱- مانند شکل مقابل، نیم کره ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره ها قرار گیرد و آن را بپوشاند. این دو دایره کاغذی را هرطور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حد امکان، کاغذها روی هم قرار نگیرد و سطح نیم کره نیز دیده نشود!



آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بپوشانید؟ بله، به طور تقریبی، توانستیم روی نیم کره را بپوشانیم. در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید. از آنجا که سطح رویه کره مسطح نیست، پوشاندن آن با یک سطح مسطح مثل کاغذ دشوار است و اگر کاغذ برش نخورد، نمی توان با تقریب خوبی سطح رویه نیم کره را بپوشانید. اگر تعداد پرش ها را زیاد کنیم می توانیم دقت کار را افزایش دهیم.

۲- ثابت می شود که مساحت رویه یک نیم کره با شعاع  $R$ ، دو برابر مساحت دایره ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).



الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با:  $2\pi R^2$   
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع  $R$  برابر است با:  $4\pi R^2$

۱۳۳

### کار در کلاس

۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع ۱۰ سانتی متر را پیدا کنید.

$$\text{مساحت رویه نیم کره} = 2\pi R^2 = 2 \times \pi \times 10^2 = 200\pi$$

۲- می خواهیم یک نیم کره چوبی توپریه شعاع ۱۰ سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

$$2\pi R^2 + \pi R^2 = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت رویه نیم کره} = \text{مساحت کل نیم کره}$$

$$= 2\pi \times 10^2 + \pi \times 10^2 = 3\pi \times 10^2 = 300\pi$$

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپریه شعاع ۱۰ سانتی متر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟ در محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی می بایست مساحت قاعده نیم کره را نیز در نظر بگیریم در حالی که عرق چین سطح این قاعده را ندارد.

۱۳۴

### تمرین

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را برحسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

$$\text{قطر کره زمین} = 1.28 \times 10^4 \text{ km}$$

$$\text{شعاع کره زمین} = \frac{1.28 \times 10^4}{2} = 6400 = 6.4 \times 10^3 \text{ km}$$

ب) قطر و شعاع کره زمین را برحسب متر با نماد علمی بنویسید.

می دانیم هر کیلومتر برابر است با ۱۰۰۰ متر بنابراین داریم:

$$\text{قطر کره زمین} = 1.28 \times 10^4 \times 1000 = 1.28 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\text{شعاع کره زمین} = 6.4 \times 10^3 \times 1000 = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

$$4\pi R^2 = 4\pi \times (6.4 \times 10^6)^2 = 4\pi \times 4.096 \times 10^{13} = 5.144 \times 10^{14} \text{ متر مربع}$$

می‌دانیم هر ۱۰۰۰۰۰۰ متر مربع برابر است با یک کیلومتر مربع بنابراین:

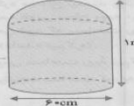
$$\frac{5.144 \times 10^{14}}{10^6} = 5.144 \times 10^8 \text{ کیلومتر مربع}$$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱,۶۴۸,۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

$$\frac{\text{مساحت کره زمین}}{\text{مساحت ایران}} = \frac{5.144 \times 10^8}{1.648 \times 10^7} = 31.2$$

بنابراین ایران تقریباً  $\frac{1}{31.2}$  کره زمین مساحت دارد. که  $\frac{3.2}{100}$  درصد مساحت کره زمین است.

یک کپسول گاز از شرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول ۶ سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد. حجم کپسول را بر حسب مترمکعب به دست آورید.



حجم نیم کره + حجم استوانه = حجم کپسول  
 $\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi (3)^3 + \pi (3)^2 (1) = 36\pi + 9\pi = 45\pi$   
 ارتفاع کپسول =  $\frac{45\pi}{\pi} = 45$  متر مکعب

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم. چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ احتیاج داشته باشد.

سطح قاعده + سطح نیم کره + سطح جانبی استوانه = سطح کل کپسول  
 $2\pi R^2 + 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R^2 + 2\pi R h = 4\pi R^2 + 2\pi R h$   
 $= 4\pi (3)^2 + 2\pi (3)(1) = 36\pi + 6\pi = 42\pi$   
 متر مربع  $= \frac{42\pi}{\pi} = 42$  متر مربع

گرم  $42 \times 100 = 4200$  گرم  
 پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتی متر را از آب پرو آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

حجم آب درون لیوان = حجم آب درون پیمانه  $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 \times x$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 \times x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \times 24 = 8 \text{ cm}$$

نیم کره و استوانه

## ارزشیابی مستمر

۱- کره مجموعه نقاطی از فضا است که فاصله آنها از نقطه ثابتی به نام ..... به یک اندازه است. (۱ نمره)  
به این اندازه ثابت ..... می‌گویند.

۲- حجم کره‌ای به شعاع ۴ را بیابید. (مقدار  $\pi$  را برابر ۳ در نظر بگیرید). (۲)

۳- مساحت یک نیم کره توپر فولادی به شعاع ۱۰ را بیابید. (مقدار  $\pi$  را برابر ۳ در نظر بگیرید). (۲)

۴- حجم یک کره با مساحت آن برابر است. اندازه قطراین کره را بیابید. (۲)

۵- یک مخزن مطابق شکل از به هم پیوستن یک نیم کره و یک استوانه ساخته شده است. اگر شعاع قاعده استوانه ۱۰ باشد و ارتفاع استوانه ۵۰ باشد، حجم مخرج را بیابید. (۲) ( $\pi = 3$ )



## پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ مرکز کره (۰/۵) - شعاع کره (۰/۵)

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (0/5) \quad \frac{R=3}{\pi=3} \rightarrow V = \frac{4}{3} \times 3 \times 3^3 = 256 \quad (1/5)$$

$$S = \frac{1}{2}(4\pi R^2) \quad \frac{R=10}{\pi=3} \rightarrow S = \frac{1}{2}(4 \times 3 \times 10^2) = 600 \quad (1)$$

$$S = \pi R^2 = 3 \times (10)^2 = 300 \quad (0/5)$$

$$S_{\text{کل}} = 600 + 300 = 900 \quad (0/5)$$

$$V = S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 3\pi R^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{3} = 1 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow \text{قطر } d = 6 \quad (1)$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = 3 \times 10^2 \times 50 = 15000 \quad (0/5)$$

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3}\pi R^3 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 3 \times 10^3 = 2000 \quad (1)$$

$$\text{حجم کل} = 15000 + 2000 = 17000 \quad (0/5)$$

حجم هرم و مخروط

کلید در سبز

مساحت قاعده  $S = 3^2 = 9$   
 ارتفاع  $h = 10$   

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 9 \times 10 = 30 \text{ cm}^3$$

نکته ۹: مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن دایره‌ای شکل بوده و پای ارتفاع آن روی مرکز دایره قرار می‌گیرد.



نکته ۱۰: حجم یک مخروط همانند حجم یک هرم محاسبه می‌شود. اگر شعاع قاعده مخروط R و ارتفاع مخروط h باشد داریم:

مثال: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۶ چند برابر حجم مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۲ است؟

طبق داده‌های مسئله  $R = 2$  و  $h = 6$  و  $R' = 3$  و  $h' = 2$  که به ترتیب شعاع قاعده و ارتفاع استوانه و مخروط هستند.

حجم استوانه  $= \pi R^2 h = \pi \times 2^2 \times 6 = 24\pi$

حجم مخروط  $= \frac{1}{3} \pi R'^2 h' = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 2 = 6\pi$

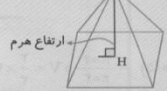
حجم استوانه ۴ برابر حجم مخروط است.  $\Rightarrow \frac{24\pi}{6\pi} = 4$

نکته ۶: هرم یک شکل فضایی است که وجه زیرین آن یک چند ضلعی است که قاعده نام دارد و بقیه وجه‌های آن مثلثی شکل هستند که از یک طرف به قاعده و از طرف دیگر به نقطه‌ای به نام رأس هرم محدود می‌شوند.

فاصله رأس هرم تا قاعده را ارتفاع هرم می‌گویند.



نکته ۷: اگر قاعده هرم یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی هرم هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گویند. در این صورت اگر قاعده مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع هرم روی مرکز تقارن قرار می‌گیرد.



نکته ۸: حجم هر هرم که مساحت قاعده آن S و ارتفاع آن h باشد برابر است با یک سوم مساحت قاعده ضرب در ارتفاع. یعنی:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

مثال: حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع ۳ و ارتفاع ۱۰ را بیابید.

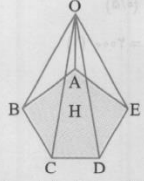
۱۳۵

نیم دوره اول متوسطه

۱۳۵

سؤال متن

یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونه دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید. کلاه جشن تولد، میوه درخت کاج، وزنه شاقول، میخ کفاشی (توجه کنید که مخروط‌ها هم جزء حجم‌های هرمی هستند) در هرم مقابل، نام رأس: O



شکل وجه‌ها: مثلث  
 نام قاعده: ABCDE

تعداد وجه‌ها: ۶  
 شکل قاعده: پنج ضلعی

دوره اول

۱۳۵

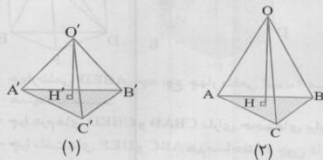
فعالیت

۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه‌ی برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل، نام رأس: O ارتفاع: OH شکل قاعده: مستطیل شکل وجه‌های جانبی: مثلث متساوی‌الساقین تعداد وجه‌ها: ۵



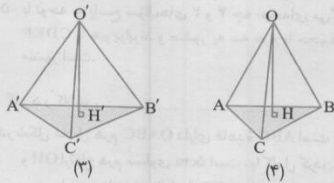
۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در شکل‌های (۱) و (۲) مثلث‌های قاعده هم‌نهشت هستند.

۱۳۶  
ریاضی



$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل‌های (۳) و (۴) ارتفاع‌ها برابر است.



$$O'H' = OH \text{ و } S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' < V$$

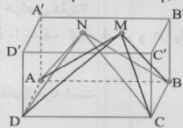
ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ حجم هرم به مساحت قاعده و ارتفاع آن وابسته است.  
ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه حدسی می‌زنید؟ از ارتفاع و قاعده مثلث استفاده می‌کردیم - حدس می‌زنیم که باید ارتفاع و قاعده هرم را در هم ضرب کنیم.  
د) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟ حجم آن‌ها برابر است.

۱۳۶

کاردرکلاس

در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ چون مساحت قاعده و ارتفاع‌های دو هرم با هم برابر است.

به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟ بی‌شمار هرم



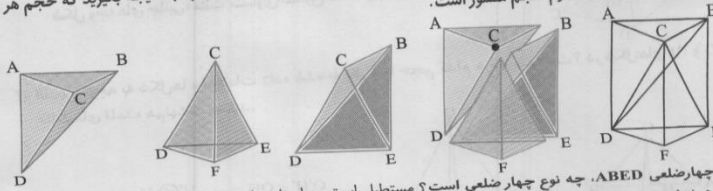
۲۸۵

فعالیت

۱۳۷

در شکل زیر، منشور با دو قاعده  $\triangle ABC$  و  $\triangle DEF$  را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم، آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ بله.

با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



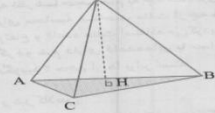
- ۱- چهارضلعی ABED، چه نوع چهارضلعی است؟ مستطیل است. چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحتند؟ چون همبند هستند.
- ۲- چرا هرم های CBED و CBAD دارای حجم های برابر هستند؟ چون دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند.
- ۳- چرا مثلث های ABC و DEF هم مساحتند؟ چون قاعده های منشور هستند.
- ۴- چرا هرم های CDEF و DABC دارای حجم های برابر هستند؟ چون دارای قاعده و ارتفاع برابر هستند.
- ۵- با توجه به پاسخ سؤالات ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟ نتیجه می گیریم حجم هر سه هرم CBED و CBAD و CDEF با هم برابرند و منشور به سه هرم با حجم های برابر تقسیم شده است. بنابراین حجم هر یک سوم حجم منشور است.

۱۳۷

تیم (دوره اول متوسطه)

کاردرکلاس

در شکل مقابل هرم OABC دارای قاعده  $\triangle ABC$  است که در آن  $AC = 6\text{ cm}$  و  $BC = 1\text{ cm}$  و زاویه  $\angle ACB = 90^\circ$  و OH ارتفاع هرم مساوی ۵cm است. با کامل کردن عبارتهای زیر حجم هر سه هرم را به دست آورید.



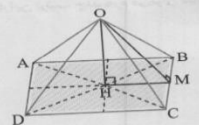
$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{6 \times 1}{2} = 3\text{ cm}^2$$

و از آنجا حجم هر سه هرم را به دست می آوریم:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 3 \times 5 = 5\text{ cm}^3$$

فعالیت

در شکل زیر، هرم منظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه های جانبی آن همگی مثلث های متساوی الساقین و طول ساق های آنها ۱cm و M وسط BC است.



- الف) پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟  
 OM ارتفاع مثلث OBC است و BC را نصف کرده است و در واقع وتر مثلث قائم الزاویه OHM است.
- ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم الزاویه است.



ج) اگر طول ضلع قاعده، 12 cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس، در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.  
 $OM^2 + BM^2 = BO^2 \Rightarrow OM^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow OM^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow OM = 8$

د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ قائم الزاویه است. طول MH، 6 سانتی متر است.  
 ها به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث O.MH، طول OH را به دست آورید.

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow 8^2 = 6^2 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = 64 - 36 = 28$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

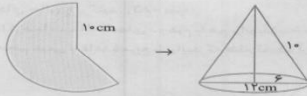
و) حجم هرم OABCD را به دست آورید.  
 $\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 12^2 \times 2\sqrt{7} = 96\sqrt{7} \text{ cm}^3$   
 ۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چند ضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و ... حال تعداد ضلع‌های این چند ضلعی را بیشتر و بیشتر کنید. چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ به دایره نزدیک‌تر می‌شود. هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ به مخروط نزدیک می‌شود.

۱۳۹



کار در کلاس

۱۳۹  
 ○ علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10 cm مخروطی به قطر قاعده 12 cm ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.  
 $(\text{ارتفاع مخروط}) = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$   
 $\text{ارتفاع مخروط} = \sqrt{64} = 8$   
 $\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ cm}^3$

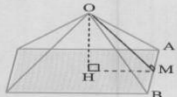


تصریح

۱۳۹  
 ۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد 6 و 5 سانتی متر و ارتفاع آن 10 سانتی متر باشد.  
 $\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 5 \times 6 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$



۱۳۹  
 ۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن 4 cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های 4 cm باشد.



$$OA^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + OM^2$$

$$\Rightarrow OM^2 = 16 - 4 = 12$$

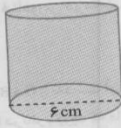
$$\Rightarrow OM = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow 12 = 2^2 + OH^2$$

$$OH^2 = 12 - 4 = 8 \Rightarrow OH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$$

۱- طرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل که شعاع قاعده آن ۶cm است، خالی می کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟



حجم آب درون استوانه = حجم آب درون مخروط

$$\frac{1}{3}\pi R_1^2 h = \pi R_2^2 x \Rightarrow \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 12 = \pi \times 6^2 \times x \Rightarrow$$

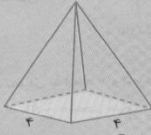
$$64 = 36x \Rightarrow x = \frac{64}{36}$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{9}$$

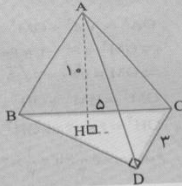
$R_1$  = شعاع قاعده مخروط  
 $R_2$  = شعاع قاعده استوانه  
 $h$  = ارتفاع مخروط  
 $x$  = ارتفاع استوانه

ارزشیابی مستمر

- ۱- جای خالی را پر کنید. (۵/۵ نمره)  
 «اگر مساحت قاعده های دو هرم با هم برابر باشد حجم هر می بیشتر است که ... آن بیشتر باشد.»
- ۲- حجم هرمی با قاعده مربع را بیابید که ضلع قاعده آن ۴ و ارتفاع آن ۶ باشد. (۲)



- ۳- اگر حجم یک مخروط برابر  $24\pi$  باشد و ارتفاع آن برابر ۸ باشد شعاع قاعده مخروط را بیابید. (۲)
- ۴- اگر حجم یک استوانه و یک مخروط با ارتفاع های برابر، مساوی باشد، نسبت شعاع قاعده استوانه به شعاع قاعده مخروط را بیابید. (۲)
- ۵- حجم هرم مقابل را بیابید. (۲/۵)  $(AH = 10, BC = 5, DC = 3)$



نیم (دوره اول متوسطه)

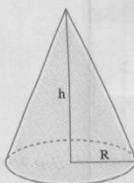
۲۸۸

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ ارتفاع (۵/۵)

۲

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Sh \\ S &= 4 \times 4 = 16 \\ h &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 = 32 \quad (1)$$



(۵/۵)

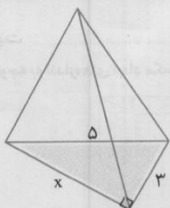
$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi R^2 h \\ V &= 24\pi \\ h &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 24\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times 8 \quad (1)$$

$$\Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3 \quad (۵/۵)$$

۴ ارتفاع‌های مخروط و استوانه برابر است پس ارتفاع هر دو را برابر h در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} \text{حجم استوانه} &= V_1 \\ \text{حجم مخروط} &= V_2 \\ \text{شعاع قاعده استوانه} &= R_1 \\ \text{شعاع قاعده مخروط} &= R_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_1 &= V_2 \Rightarrow \pi R_1^2 h = \frac{1}{3} \pi R_2^2 h \quad (1) \\ \Rightarrow R_1^2 &= \frac{1}{3} R_2^2 \\ \Rightarrow \frac{R_1^2}{R_2^2} &= \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad (1) \end{aligned}$$

۵ چون قاعده یک مثلث قائم‌الزاویه است، مساحت قاعده را از ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه به دست می‌آوریم.



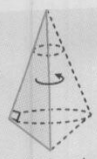
$$V = \frac{1}{3}Sh \quad (۵/۵)$$

$$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \quad (1)$$

$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \Rightarrow V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 10 = 20 \quad (1)$$

## ۲. لایحه سطح و حجم

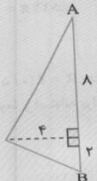
چکیده درس



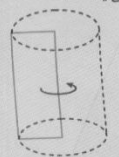
نکته ۱۱: برابری سطح کل دو شکل، برابری حجم آن دو شکل را نتیجه نمی‌دهد. همین‌طور از برابری حجم دو شکل نمی‌توان برابری سطح کل آن دو شکل را نتیجه گرفت.  
نکته ۱۲: از دوران یک مستطیل حول یکی از ضلع‌هایش یک استوانه به‌دست می‌آید.

نکته ۱۵: از دوران یک نیم دایره حول قطرش یک کره ایجاد می‌شود.  
مثال: حجم حاصل از دوران شکل مقابل را حول ضلع AB به‌دست آورید.

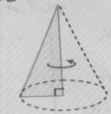
اگر جسم مقابل را حول AB دوران دهیم دو مخروط به هم چسبیده با شعاع قاعده ۴ به‌دست می‌آید که ارتفاع یکی ۸ و ارتفاع دیگری ۲ است.



$$\left. \begin{aligned} \text{حجم مخروط بالایی} &= \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 8 = \frac{128}{3} \pi \\ \text{حجم مخروط پایینی} &= \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 2 = \frac{32}{3} \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حجم کل} = \frac{128}{3} \pi + \frac{32}{3} \pi = \frac{160}{3} \pi$$



نکته ۱۳: از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه‌اش یک مخروط به‌دست می‌آید.



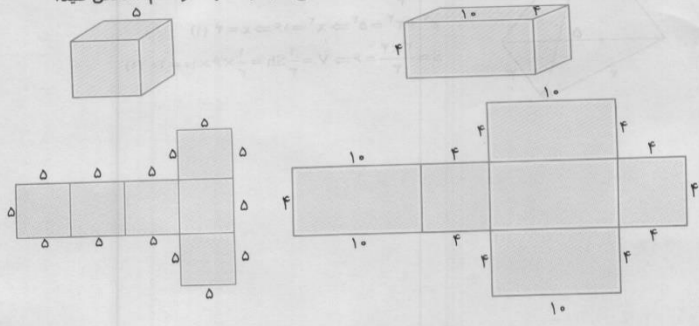
نکته ۱۴: از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن شکلی پدید می‌آید که مانند دو مخروط به هم چسبیده است.

۱۴۰

نیم دوره اول متوسطه

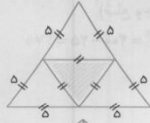
### فعالیت

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.



۲۹۰

۲- مساحت گستردهٔ هریک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.



مساحت یک وجه  $\times 4 =$  مساحت گسترده  
 (ارتفاع وجه)  $= 5^2 - (\frac{5}{2})^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$

ارتفاع وجه  $= \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

مساحت گسترده  $= 4 \times \frac{5 \times \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = 4 \times \frac{25\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$



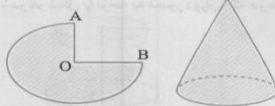
مساحت وجه  $\times 4 +$  مساحت قاعده  $=$  مساحت گسترده  
 (ارتفاع وجه)  $^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$   
 ارتفاع وجه  $= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

مساحت گسترده  $= 4^2 + 4 \times \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 16 + 16\sqrt{3}$

(الف)



۳- دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را برداشته‌ایم؛ با کمک آن یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟



طول کمان AB  $= \frac{3}{4} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{3}{4} \times 2\pi \times 10 = 15\pi$

چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعدهٔ مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.  
 طول کمان AB برابر است با محیط دایره قاعده مخروط است.

شعاع قاعده مخروط  $= \frac{15\pi}{2\pi R} = 15\pi \Rightarrow 2\pi R = 15\pi \Rightarrow R = \frac{15}{2} \text{ cm}$

۱۴۱

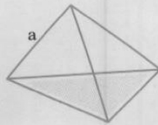
کار در کلاس

۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید که طول همهٔ یال‌های آن a است.

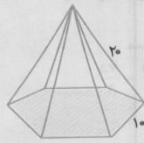
مساحت یک وجه  $\times 4 =$  مساحت کل هرم

$= 4 \times (\frac{\sqrt{3}}{4} a \times a) \times \frac{1}{2}$

$= \sqrt{3} a^2 \text{ cm}^2$



۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت جانبی هرم را پیدا کنید.



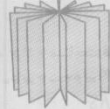
$$\begin{aligned} \text{ضلع وجه} &= (\text{نصف ضلع قاعده})^2 + (\text{ارتفاع یک وجه})^2 \\ 20^2 &= 10^2 + (\text{ارتفاع وجه})^2 \\ 400 - 100 &= 300 = (\text{ارتفاع وجه})^2 \\ \text{ارتفاع وجه} &= \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{مساحت جانبی هرم} = 6 \times \frac{10 \times 10\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

### فعالیت

۱۴۱

۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟



استوانه به دست می‌آید.  
شعاع قاعده شکل حاصل: ۳  
ارتفاع شکل حاصل: ۱۰  
حجم شکل حاصل را پیدا کنید.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi \text{ cm}^3$$

۲- اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول مشخص شده در شکل، دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید. مخروط به دست می‌آید.

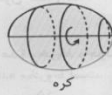


$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16\pi$$

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل را توصیف کنید.



استوانه

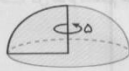


کره



### کار در کلاس

حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.



$$\begin{aligned} \text{حجم کره} &= \frac{2}{3} \pi R^3 \\ &= \frac{2}{3} \pi \times 5^3 \\ &= \frac{2}{3} \pi \times 125 = \frac{250}{3} \pi \end{aligned}$$

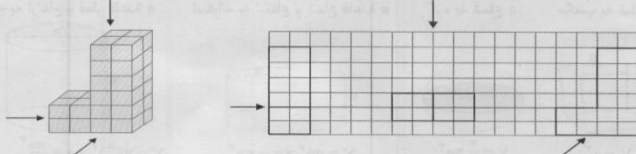
نیم دوره اول متوسطه



## فعالیت

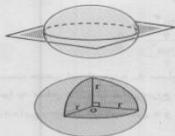
۱۴۲

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت‌های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟  
 الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی + شش ضلعی منتظم  
 ب) هرم منتظم با قاعده مربع + مربع  
 ج) هرم منتظم با قاعده مثلث + مثلث متساوی‌الاضلاع

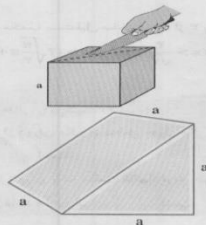
۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟  
 $\frac{1}{8}$  از حجم کره برداشته شده است.

## کاردرکلاس

۱- یک اسفنج مکعب شکل به ضلع  $a$  را مانند شکل مقابل بریده‌ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع‌های آن را پیدا کنید.



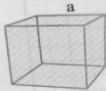
سطح بریده شده به شکل یک مستطیل است. دو وجه جانبی مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند که طول ساق‌های آن همان ضلع مکعب است، یعنی  $a$ . ابعاد مستطیل دیده شده در سطح بریده شده به صورت زیر است:

عرض =  $a$   
 طول = قطر مکعب، که قطر مکعب  $\sqrt{2}a$  است.

## تمرین

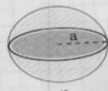
۱۴۳

حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و با هم مقایسه کنید.  
 استوانه به ارتفاع و قطر قاعده  $a$     کره به شعاع  $a$     مکعب به ضلع  $a$   
 استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده  $a$



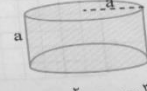
$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$



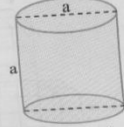
$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$



$$V = \pi a^2 \times a = \pi a^3$$

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$$



$$V = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right) a = \frac{3\pi a^2}{2}$$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح  $\left(\frac{V}{S}\right)$  را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

مکعب:  $\frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$

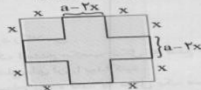
استوانه قطور:  $\frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$

کره:  $\frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$

استوانه باریک:  $\frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{3\pi a^2}{2}} = \frac{a}{6}$

در کره نسبت حجم ایجاد شده به سطح به کار رفته بیشترین مقدار را دارد.

از یک مغوا به ضلع  $a$  گوشه‌های مربع شکل به ضلع  $x$  را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین  $a$  و  $x$  باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع  $x$  داخل این جعبه جای داد.



حجم کره به شعاع  $x$   $= \frac{4}{3}\pi x^3$

حجم مکعب مستطیل ساخته شده  $= (a-2x)^2 x$

باید حجم مکعب مستطیل ساخته شده از ۴ برابر حجم کره بیشتر باشد.

$$(a-2x)^2 x > 4 \times \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow (a-2x)^2 > \frac{16}{3}\pi x^2 \Rightarrow a-2x > \sqrt{\frac{16}{3}\pi} x \Rightarrow a > (2 + \sqrt{\frac{16}{3}\pi} + 2)x$$

ارزش‌نمایی مستمر

۱- جای خالی را پر کنید. (۲ نمره)

- الف) از دوران یک مستطیل حول یکی از ضلع‌های آن یک ..... تولید می‌شود که شعاع قاعده آن برابر ..... است.
- ب) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه آن یک ..... شعاع قاعده آن برابر ..... است.

شماره دوره اول متوسطه

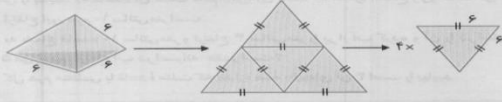
۲- مساحت کل یک هرم منتظم با قاعده مثلث (چهار وجهی منتظم) به ضلع قاعده ۶ را بیابید. (۲)



۳- حجم حاصل از دوران یک نیم دایره به شعاع ۶ را حول قطرش به دست آورید. (۲)  
 ۴- اگر یک مکعب به ضلع ۴ را به طور قائم از روی قطر قاعده اش برش بزنیم سطح مقطع به دست آمده به چه شکلی است؟ مساحت آن را بیابید. (۲)

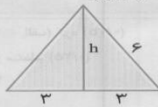
پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) استوانه (۰/۵) - اندازه ضلع دیگر مستطیل (۰/۵) ب) مخروط (۰/۵) - اندازه ضلع دیگر زاویه قائمه (۰/۵)  
 ۲



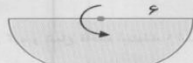
(۰/۵)

با توجه به شکل های رسم شده کافی است مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ را بیابیم.



$$h^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (۰/۵)$$

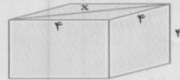
$$S = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \Rightarrow \text{کل } S = 4 \times 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \quad (۰/۵)$$



$$V = \frac{2}{3} \pi \times r^3 \quad (۰/۵)$$

$$V = \frac{2}{3} \times \pi \times 6^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 216 = 288\pi \quad (۱/۵)$$

۴ سطح مقطع به دست آمده یک مستطیل است که طول آن قطر قاعده و عرض آن ضلع مکعب است. (۰/۵)



$$x^2 = 4^2 + 4^2 = x^2 \quad (۰/۵)$$

$$x^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad (۰/۵)$$

$$\text{مساحت} = 4\sqrt{2} \times 4 = 16\sqrt{2} \quad (۰/۵)$$

آزمون تشریحی

موضوع: فصل ۸

تاریخ: ...

دست: ...

---

۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) مجموعه نقاطی از فضا که از نقطه ثابتی به نام مرکز به اندازه ثابتی فاصله دارند ..... نام دارد.

ب) حجم هرم مخروط ..... حجم استوانه متناظر با آن است.

ج) هرمی که قاعده آن چند ضلعی منتظم و وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الساقین باشند هرم ..... می‌گویند.

د) از دوران یک مستطیل حول هر کدام از اضلاعش یک ..... ایجاد می‌شود.

۲- مساحت روبرو یک کره برابر با  $10\pi$  است. حجم این کره را حساب کنید.

۳- کره‌ای را در استوانه‌ای به قطر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر محاط کرده‌ایم. حجم فضای بین کره و استوانه را بیابید.

۴- حجم هرمی را بیابید که قاعده آن مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشد که اندازه اضلاع زاویه قائمه آن ۳ و ۴ سانتی‌متر است و ارتفاع این هرم ۱۰ سانتی‌متر است.

۵- مخروطی به شعاع قاعده ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۳ سانتی‌متر را پر از آب کرده و آن را در استوانه‌ای به شعاع قاعده ۵ می‌ریزیم. ارتفاع آب در استوانه چقدر است؟

۶- مساحت کل هرم منتظمی با قاعده مثلث که اندازه همه یال‌های آن ۴ است را بیابید.

پاسخ آزمون تشریحی

الف) کره  $(0/25)$

ب)  $\frac{1}{3}$   $(0/25)$

ج) منتظم  $(0/25)$

د) استوانه  $(0/25)$

۲-  $2\pi r^2 = 10\pi \Rightarrow r^2 = 2.5 \Rightarrow r = 1.5$   
 $(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$

۳-  $u = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{125}{3}\pi(0/5)$

۴-  $\pi r^2 h = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi (0/5)$

۵-  $\frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi \times 1^2 = \frac{4}{3}\pi(0/5)$

۶-  $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 4 = \frac{64}{3}\pi(0/5)$

۳- شعاع کره و شعاع قاعده استوانه ۱ است.  $(0/5)$

۴-  $\frac{6\pi - 4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} (0/5)$

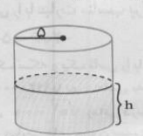
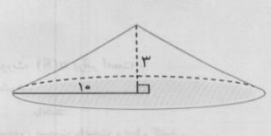
مساحت قاعده  $= \frac{3 \times 4}{2} = 6$  (۱)

حجم هرم  $= \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 6 \times 10 = 20$  (۱)

بیم دوره اول متوسطه

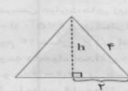
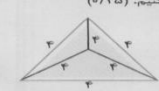
۲۹۶

۵

$V = \pi r^2 h = \pi \times 5^2 \times h = 25\pi h$  (۵/۷۵)      مخروط  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times h = 100\pi h$  (۵/۷۵)  
 $\Rightarrow 25\pi h = 100\pi h \Rightarrow h = 4$  (۵/۷۵)

هر وجه این هرم یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ است. پس کافی است مساحت یک وجه را پیدا کرده و در ۴ ضرب کنیم. (۵/۷۵)

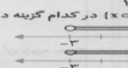
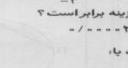
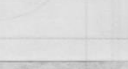

$\Rightarrow h^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow h^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12}$  (۵/۷۵)  
 مساحت مثلث =  $\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$  (۵/۷۵)  
 مساحت کل =  $4 \times 2\sqrt{12} = 8\sqrt{12}$  (۵/۷۵)

سؤال نهمی استقانی

آزمون: دینی (تیرت اول)      دست: ...

۱- در سؤال‌های زیر گزینه صحیح را مشخص کنید.

الف) در جمله‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره به طور تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چند احتمال دارد این مهره سبز نباشد؟  
 (۱)  $\frac{5}{12}$       (۲)  $\frac{7}{12}$       (۳)  $\frac{3}{12}$       (۴)  $\frac{4}{12}$

ب) مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$  در کدام گزینه درست نشان داده شده است؟  
 (۱)       (۲)   
 (۳)       (۴) 

ج) عدد  $4 - \frac{2}{1} \times 1$  با کدام گزینه برابر است؟  
 (۱)  $21$       (۲)  $2$       (۳)  $21$       (۴)  $21 - 2$

د) حاصل  $\frac{\sqrt{10} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}}$  برابر است با:  
 (۱)  $\sqrt{4}$       (۲)  $2$       (۳)  $2\sqrt{5}$       (۴)  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

۲۹۷

۶

۲- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف)  $5\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$  .....  
 ب) اگر یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب کنیم در این صورت  $n(S)$  برابر است با .....  
 ج) عدد  $1120000$  با نماد علمی به صورت ..... نوشته می‌شود.  
 د) تساوی  $a - \sqrt{a^2} = -a$  زمانی درست است که  $a$  عددی ..... باشد.

۳- هر یک از عبارات‌های ستون سمت چپ را به یک عبارت از ستون سمت راست وصل کنید.


$Q \cap R$	$\emptyset$
$Q \cup Q'$	$Q'$
$S - Q$	$R$
$W \cap N$	$N$

۴- درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $5^3$  از  $25^2$  بزرگ‌تر است.  
 ب) ریشه دوم ۱۶ همان  $\sqrt{16}$  است.  
 ج) هر مجموعه دلخواه حداقل دو زیرمجموعه دارد.  
 د) بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۵- عبارت مقابل را بدون قدرمطلق بنویسید.  
 $||- \sqrt{2}| + |\sqrt{3} - \sqrt{4}| =$

۶- مجموعه  $A - (B \cup C)$  را در نمودار ون هاشور بزنید.



۷- بین دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{3}{4}$  سه عدد گویا پیدا کنید.

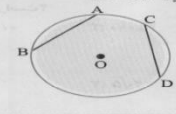
۸- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{1, 7, 6, 3\}$  و  $C = \{2, 3, 6\}$  مجموعه زیر را با عضوهای مشخص کنید.  
 $(A - B) \cap (B \cup C)$

۹- حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\frac{\frac{2}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

۱۰- ثابت کنید هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۱۱- در شکل مقابل  $AB = CD$ . ثابت کنید  $AB = CD$ .



۲۹۸

۱۲- مثلث ABC با مثلث DEF متشابه است. x را بیابید.

۱۳- حاصل عبارت مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۱۴- عبارت‌های زیر را ساده کنید.  $(x > 0, y < 0)$

۱۵- مخارج هر یک از کسرها را زیر هم بنویسید.

۱/۵

۲

۳



پایخ سزالات استخانی

۱ الف) گزینه ۲ (ب) گزینه ۳ (ج) گزینه ۱ (د) گزینه ۲ (هر مورد ۰/۵)

۲ الف)  $7\sqrt{6}$  (ب) ۱۲ (ج)  $1/13 \times 10^2$  (د) نامشیت (هر مورد ۰/۲۵)

۳ (هر مورد ۰/۲۵)

۴ الف) درست (ب) نادرست (ج) نادرست (د) درست (هر مورد ۰/۲۵)

۵

۶

۷

۲۹۹

۲۹۹



$$(A-B) \cap (B \cup C) = \{2, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 6, 7\} = \{2\} \quad (0/5)$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{1, 7, 6, 3\} = \{2, 4, 5\} \quad (0/5)$$

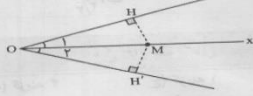
$$B \cup C = \{1, 7, 6, 3\} \cup \{2, 3, 6\} = \{1, 2, 3, 6, 7\} \quad (0/5)$$

$$\frac{\frac{2}{5} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{10}} = \frac{-\frac{13}{30} + \frac{1}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{-\frac{13}{30} + \frac{10}{30}}{\frac{13}{30}} = \frac{-\frac{3}{30}}{\frac{13}{30}} = -\frac{1}{13}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{5}{6} = \frac{12 - 25}{30} = \frac{-13}{30} \quad (0/5)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{10 + 6}{30} = \frac{16}{30} \quad (0/5)$$

زاویه O را رسم کرده و نیمساز Ox را برای آن می کشیم. نقطه دلخواه M را روی Ox در نظر گرفته و از آن دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم می کنیم. (0/25)



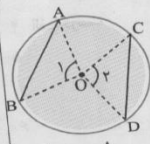
$$OM = OM \quad (\text{وتر مشترک}) \quad (0/25)$$

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (\text{نیمساز Ox است}) \quad (0/25)$$

(وتر و یک زاویه تند) (0/25)

$$\triangle OHM \cong \triangle OH'M \Rightarrow HM = H'M \quad (0/25)$$

از O (مرکز دایره) به نقاط A و B و C و D وصل می کنیم.



$$OA = OC \quad (\text{شعاع}) \quad (0/25)$$

$$OB = OD \quad (\text{شعاع}) \quad (0/25)$$

$$AB = CD \quad (\text{فرض}) \quad (0/25)$$

(قضی ضری)

$$\triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (\text{زاویه های مرکزی هستند}) \quad \overline{AB} = \overline{CD} \quad (0/25)$$

$$\frac{4}{x-1} = \frac{6}{x+7} \Rightarrow 4x + 28 = 6x - 6 \Rightarrow -2x = -34 \Rightarrow x = 17 \quad (0/25)$$

(0/5)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{1}{4} \times 16 = 4$$

نیم (دور تا از متوسطه)

دور تا از

۱۴

الف)  $4\sqrt{54} - \sqrt{24} + 3\sqrt{6} = 4\sqrt{9 \times 6} - \sqrt{4 \times 6} + 3\sqrt{6} = 12\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 13\sqrt{6}$   
 (۵/۵) (۵/۵)

ب)  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$   
 (۵/۵) (۵/۵)

۱۵

الف)  $\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$   
 (۵/۵) (۵/۵)

ب)  $\frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{4}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{4 \times \sqrt{4}}{4} = 2\sqrt{4}$   
 (۵/۵) (۵/۵)

### سؤال های استقالاتی

آزمون خرداد ماه نوبت دوم

۱- در سؤال های زیر گزینه صحیح را مشخص کنید.

الف) حاصل عبارت  $0/23 + 0/32$  در کدام گزینه دیده می شود؟  
 ۱)  $0/5$       ۲)  $0/36$       ۳)  $0/5$       ۴)  $0/64$

ب) ساده شده عبارت  $| -a+1 | + | a |$  در صورتی که  $a \geq 2$  باشد کدام است؟  
 ۱)  $1$       ۲)  $2a+1$       ۳)  $2a-1$       ۴)  $-2a+1$

ج) شیب و عرض از مبدأ خط به معادله  $3x - 2y = 1$  به ترتیب کدام است؟  
 ۱)  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{2}$       ۲)  $\frac{1}{2}$  و  $-\frac{3}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$  و  $-\frac{3}{2}$       ۴)  $-\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{2}$

د) کدام گزینه صحیح نیست؟  
 ۱)  $Z \cap Q = Z$       ۲)  $Q \cup Q' = R$       ۳)  $N \subseteq Q'$       ۴)  $Q \cup W = Q$

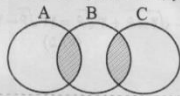
۲- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) دو عدد  $\frac{4}{3}$  و  $\frac{4}{3}$  برابر یا  $\frac{4}{3}$  است.  
 ب)  $(9x^2 - \frac{1}{4}) = (3x - \frac{1}{2})(3x + \dots)$   
 ج) نقطه ای به طول ۳ روی خط  $y = 2x - 1$  قرار دارد. در این صورت عرض این نقطه ..... است.  
 د) عبارت  $\frac{3}{2x-4}$  به ازای عدد ..... تعریف نشده است.

۳- درستی یا نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید.

الف)  $\sqrt{aby^2} = \sqrt{aby}$  یک جمله ای است.  
 ب) اگر خطی افقی باشد، شیب آن تعریف نشده است.  
 ج) اگر  $x$  و  $y$  دو عدد باشند که  $x < y$ ، آن گاه برای هر عدد منفی  $a$  داریم  $\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$ .  
 د) اعداد گنگ وقتی به صورت اعشاری نوشته می شوند، رقم های اعشاری آن ها متناوب است.

۴- در شکل مقابل قسمت هاشورخورده را با نمادهای ریاضی  $\cup$  و  $\cap$  و - بیان کنید.



۵- حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف)  $Q \cap Q = \dots$       ب)  $\mathbb{R} - Q' = \dots$   
 ج)  $Z \cup N = \dots$       د)  $W - N = \dots$

۶- حاصل عبارت زیر را بیابید.

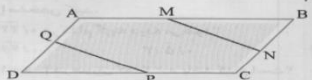
الف) حاصل عبارت مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$3\sqrt{12} - 2\sqrt{8} - 4\sqrt{18} - 2\sqrt{27} =$$

$$\frac{3-5 \times 4^2 \times (-4)-5}{2^4}$$

۸- عدد  $A$  را با نماد علمی بنویسید.  $A = 3100000$

۸- در شکل مقابل متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است و  $M$  و  $N$  و  $P$  و  $Q$  وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع هستند. ثابت کنید  $MN = PQ$ .



۹- حاصل عبارت‌های زیر را با کمک اتحادها بنویسید.

الف)  $(2x + 3)^2$       ب)  $(3x - 4)(3x + 4)$

۱۰- تجزیه کنید.

الف)  $3x^2 - 9x + 6$       ب)  $49x^2 - 25$

۱۱- نامعادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور مشخص کنید.

$$\frac{-2}{3}x - 4 < \frac{-2}{5}(x - 4)$$

۱۲- معادله خطی بنویسید که از نقطه  $\left[ \begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$  بگذرد و با خط  $3x - y = 2$  موازی باشد.

۱۳- خط به معادله  $2x - y = 3$  را رسم کنید.

۱۴- دستگاه  $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$  را به روش جایگزینی حل کنید.

۱۵- ثلث عدد  $81 \times 27 \times 5^0$  را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

۱۶- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف)  $\frac{3}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} =$       ب)  $\frac{x^2-2x}{3x(x+1)} + \frac{x^2-4x+4}{x^2+3x+2}$

نیم دوره اول متوسطه

۳۰۲