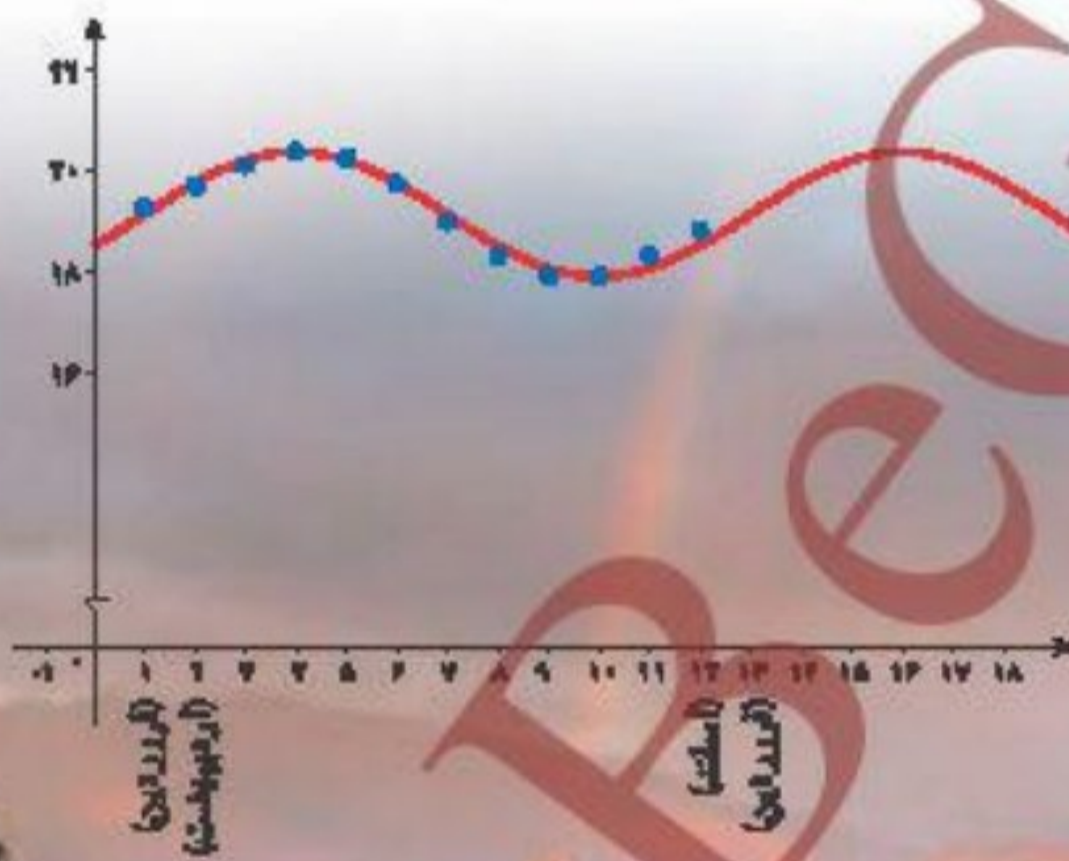


تابع

- ۱ تبدیل نمودار توابع
- ۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

فصل



پل طبیعت، تهران

بسیاری از رفتارهای طبیعی، به کمک توابع، مدل سازی می شوند. تبدیل نمودار تابع $y = 1/23 \sin(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{6}) + 19/12$ مدل ریاضی زمان های غروب آفتاب در اقصای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

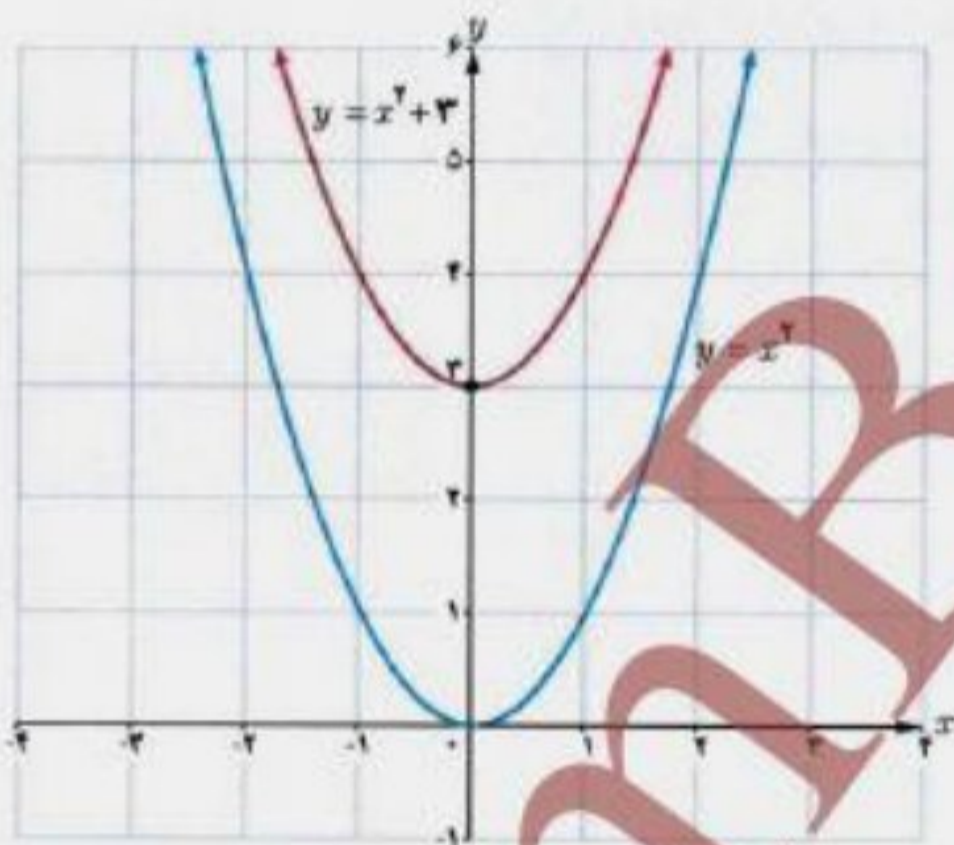
تبدیل نمودار توابع

دوس

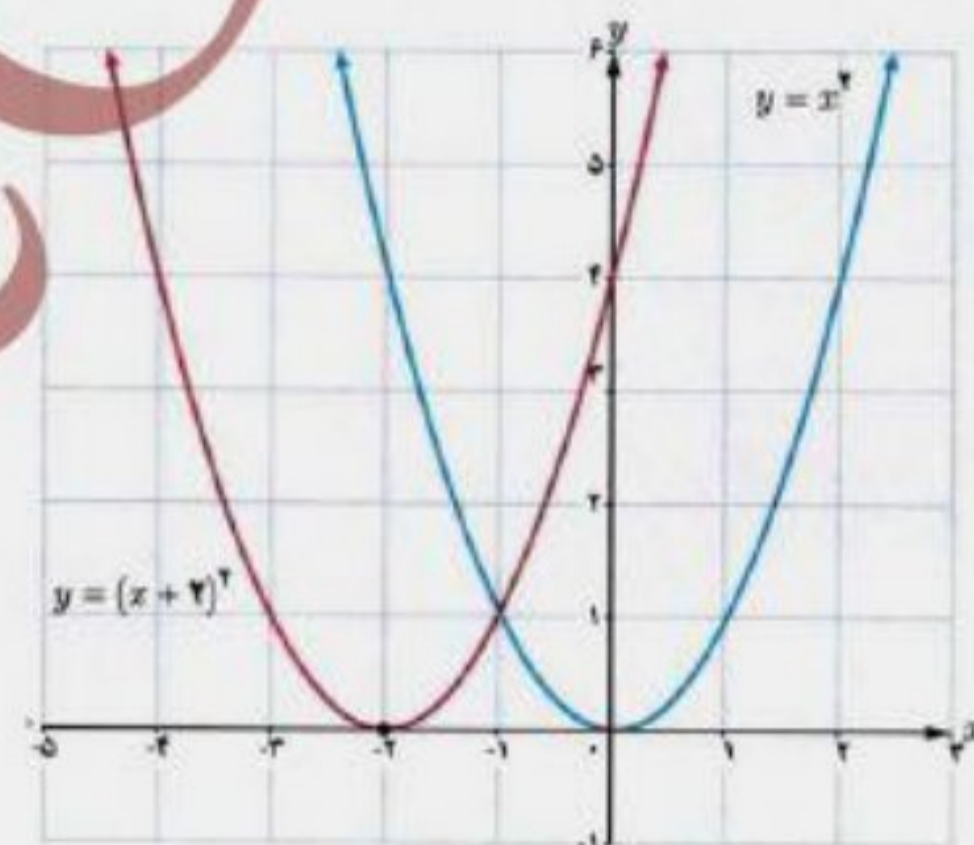
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y = x^2 + 3$ و $y = (x+2)^2$ را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.



(ب)



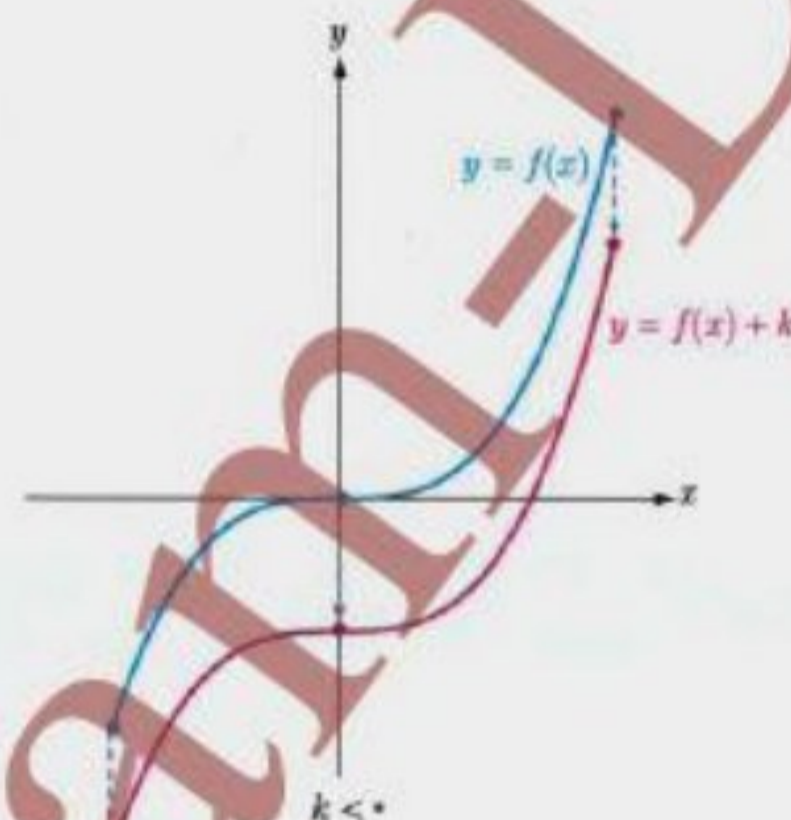
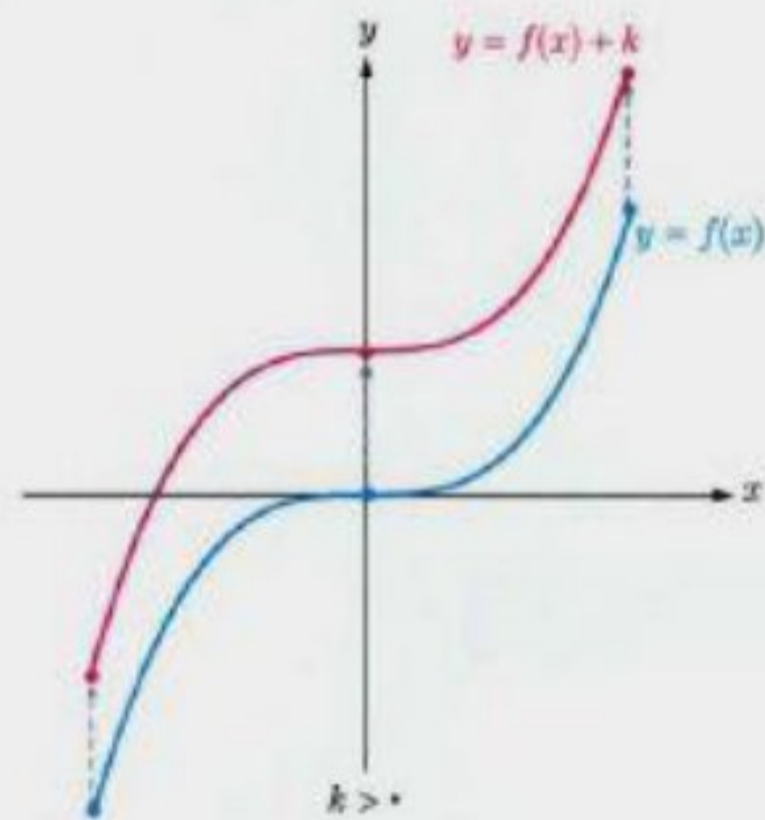
(الف)

در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر (x, y) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(x) + k$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x) = f(x) + k = y + k$$

بنابراین نقطه $(x, y+k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x, y) از نمودار f است.

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

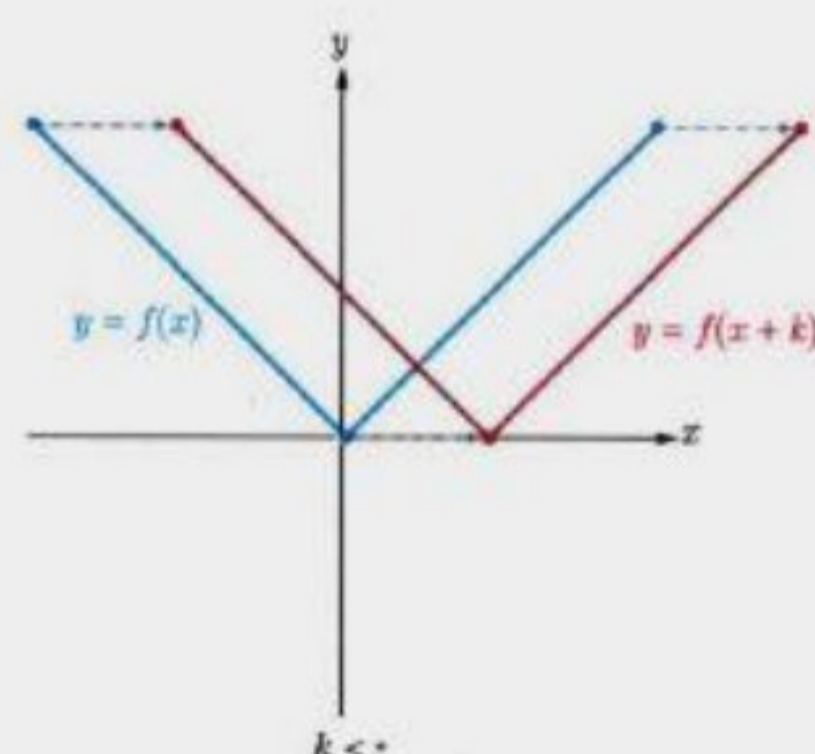
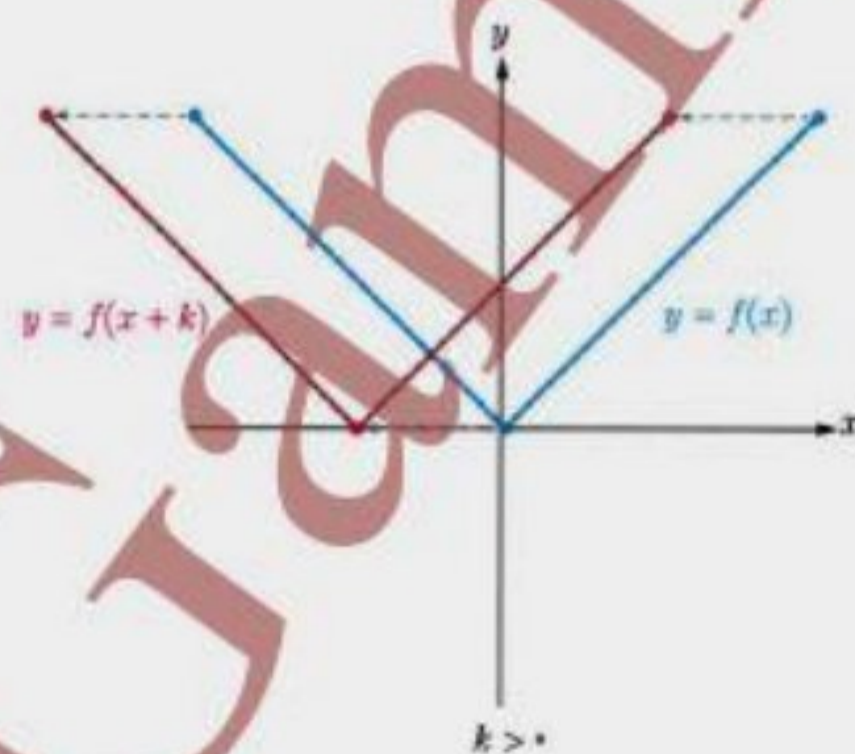


به روش مشابه، اگر (x, y) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع h به صورت $h(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد، آنگاه:

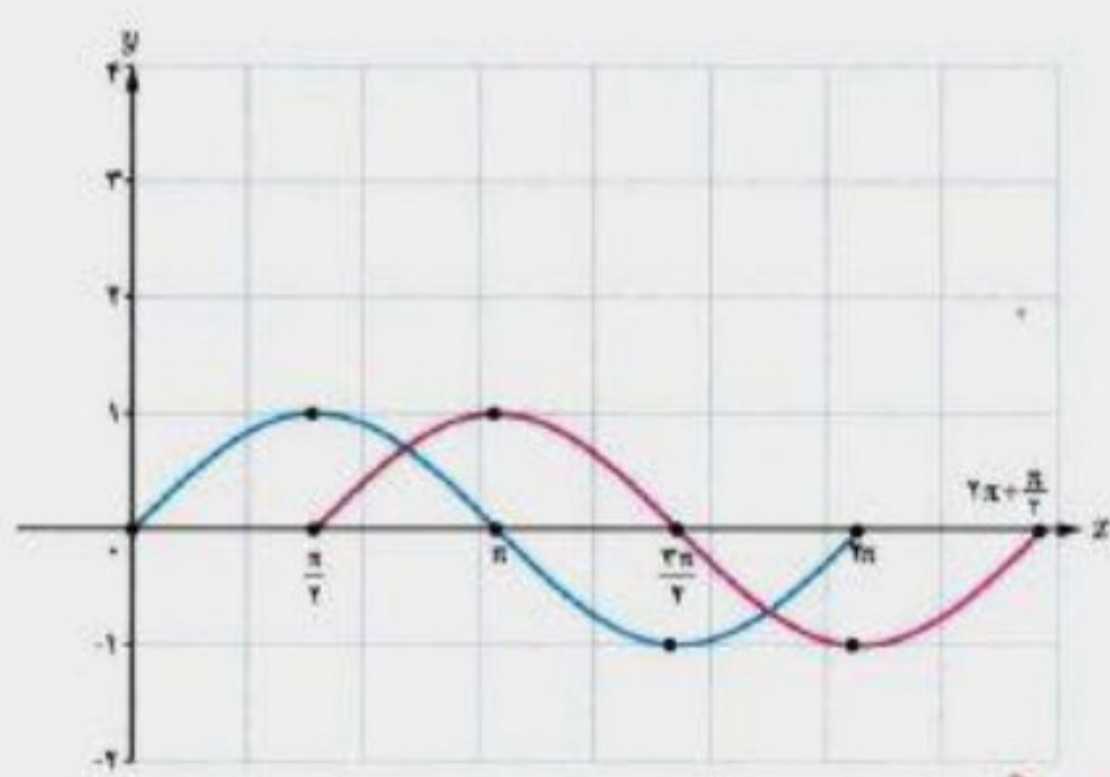
$$h(x, -k) = f(x, -k + k) = f(x) = y.$$

بنابراین نقطه (x, y) از نمودار تابع h متناظر با نقطه $(x+k, y)$ از نمودار تابع f است.

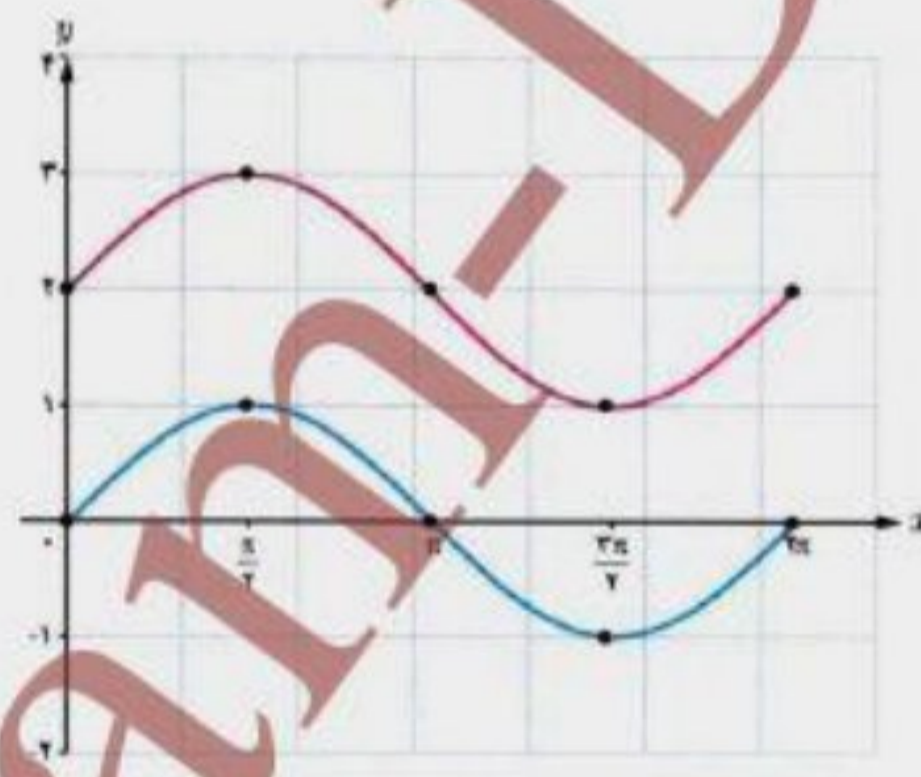
برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



مثال: نمودار تابع $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x) = \sin x + 2$ و $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{4}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)



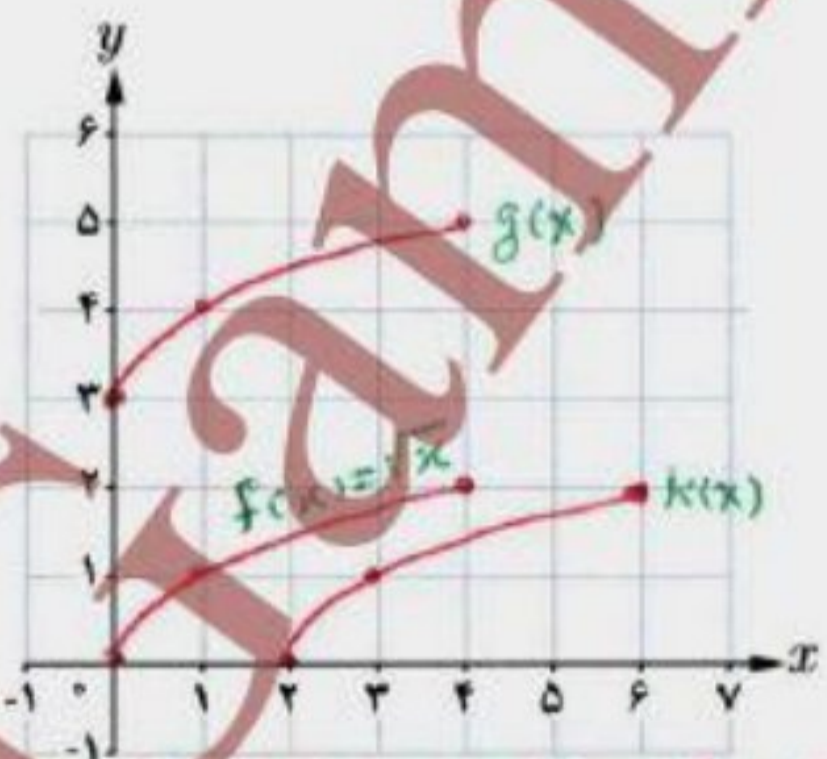
(ب)



(الف)

کاردر کلاس

الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.
 ب) نمودار توابع $k(x) = f(x-2)$ و $g(x) = f(x)+3$ را به کمک انتقال رسم کنید.
 ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.



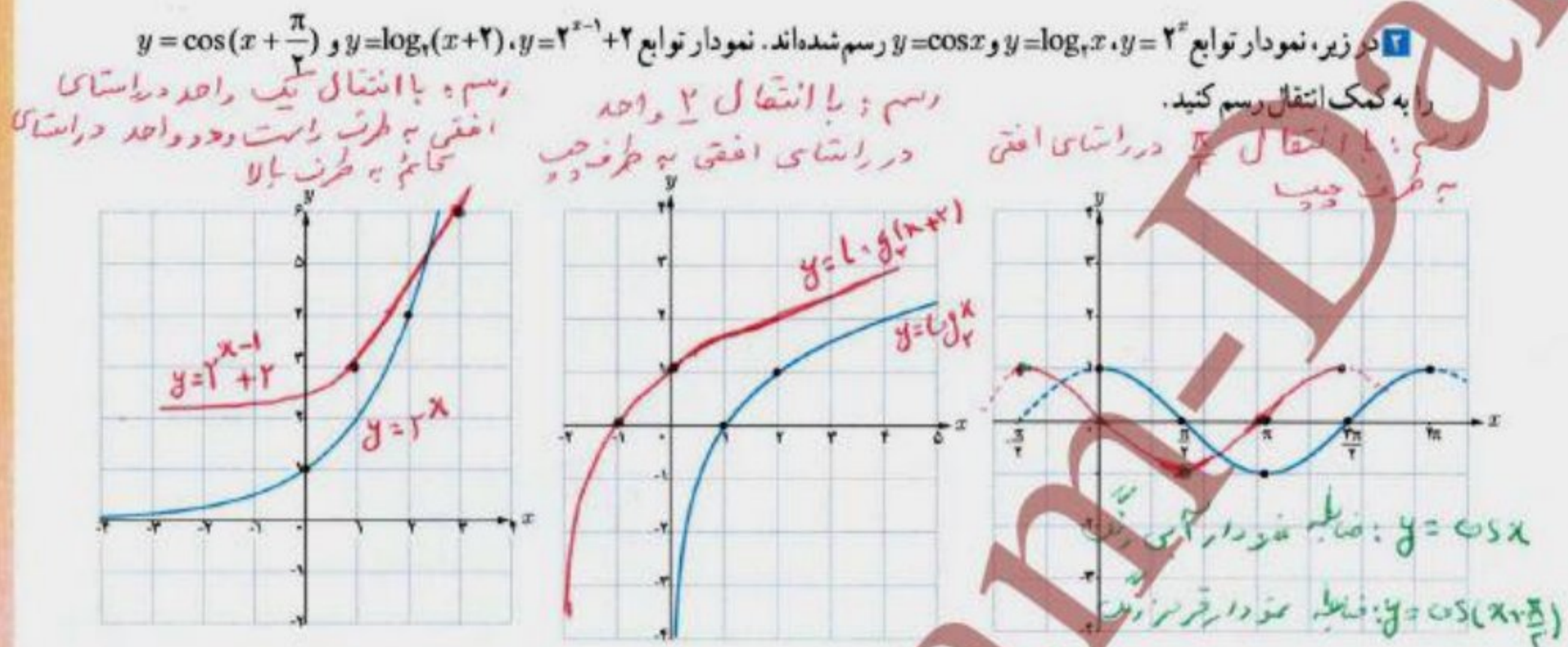
	$f(x) = \sqrt{x}$	$k(x) = f(x-2)$	$g(x) = f(x)+3$
دامنه	$[0, 4]$	$[2, 6]$	$[0, 4]$
برد	$[0, 2]$	$[0, 2]$	$[3, 5]$

ج) بازه دامنه تابع k از انتقال بازه دامنه

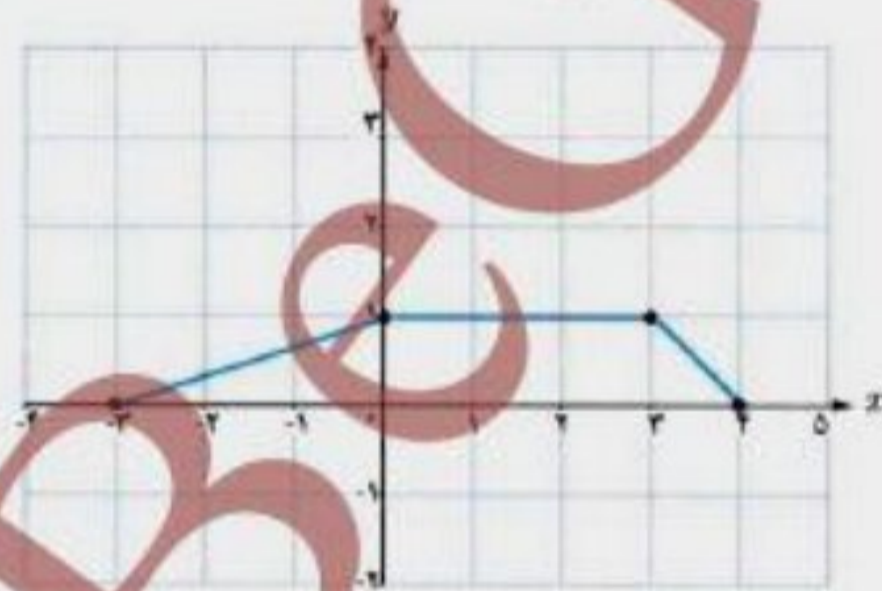
f در راستای افقی به اندازه ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید و برد تابع k همان برد تابع f می‌باشد.

بازه دامنه g همان بازه دامنه تابع f است و بازه برد تابع g از انتقال ۳ واحد برد f در راستای قائم به دست بالا به دست می‌آید.

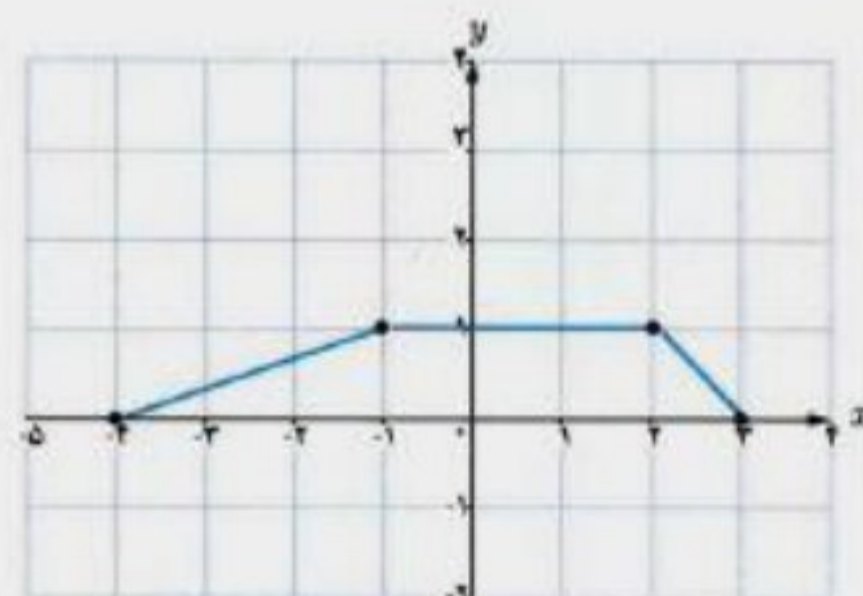
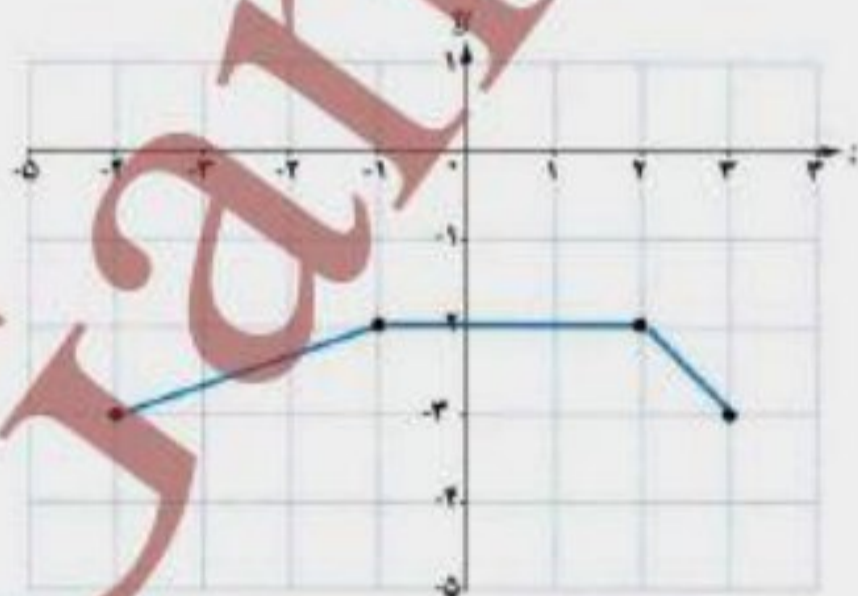
فصل اول: تابع ۵



مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال های افقی و عمودی، نمودار تابع $y = f(x+1) - 3$ را رسم می کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می دهیم تا نمودار تابع $y = f(x+1)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f(x+1) - 3$ رسم شود (شکل ب).



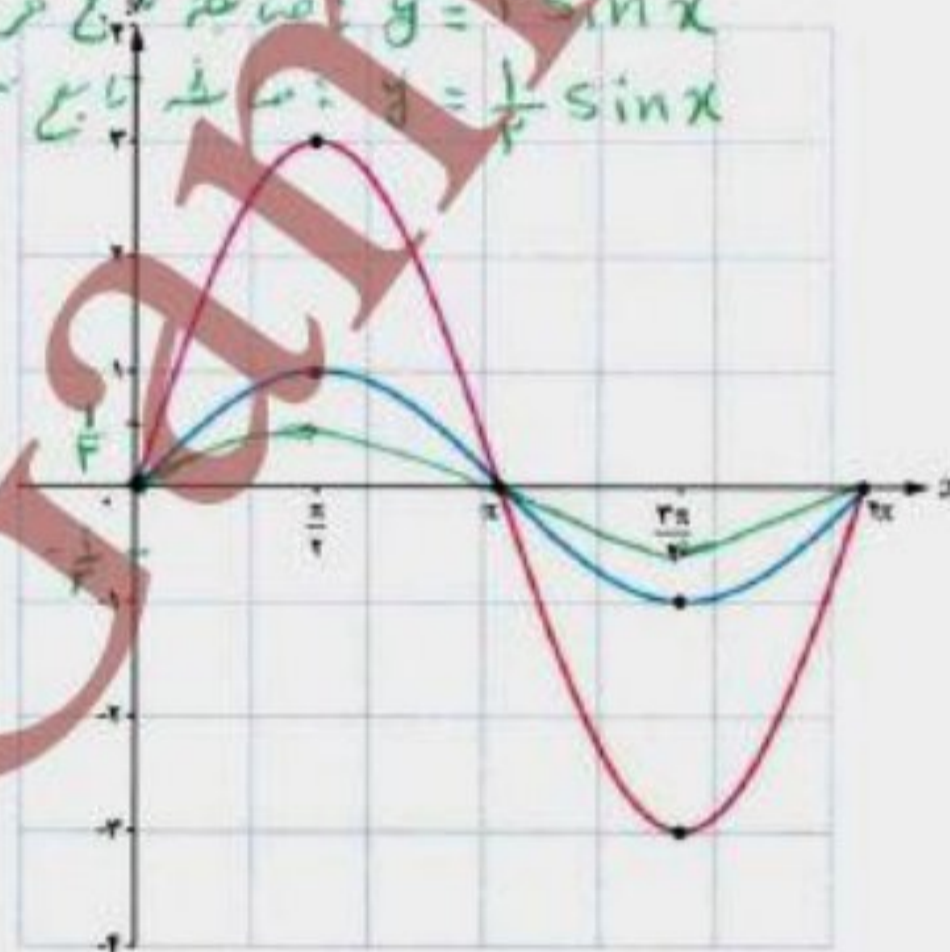
انبساط و انقباض عمودی

شماره ۲

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = 3 \sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کرده ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

$y = \sin x$ ضرایب 3 و $\frac{1}{3}$ رسم
 $y = 3 \sin x$ ضرایب 3 و $\frac{1}{3}$ رسم
 $y = \frac{1}{3} \sin x$ ضرایب 3 و $\frac{1}{3}$ رسم

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0
$y = 3 \sin x$	0	3	0	-3	0
$y = \frac{1}{3} \sin x$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0



۲ با مقایسه نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ و $y = 3 \sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟
 نمودار تابع $y = 3 \sin x$ نسبت به نمودار تابع $y = \sin x$ ، انبساطی عمودی با ضریب 3 داشته است.
 نمودار تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ نسبت به نمودار تابع $y = \sin x$ ، انقباضی عمودی با ضریب $\frac{1}{3}$ داشته است.

۳ دامنه و برد توابع $y = 3 \sin x$ و $y = \frac{1}{3} \sin x$ چه تفاوتی با دامنه و برد تابع $y = \sin x$ دارند؟
 دامنه تابع $y = 3 \sin x$ همان دامنه تابع $y = \sin x$ است. ولی برد تابع $y = 3 \sin x$ نسبت به برد تابع $y = \sin x$ انبساطی عمودی با ضریب 3 داشته است به این صورت در حالت کلی اگر (x, y) یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = kf(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه: که برد تابع $y = \sin x$ ، $[-1, 1]$ شد برد تابع $y = 3 \sin x$ ، $[-3, 3]$ می باشد.

$$g(x) = kf(x) = ky.$$

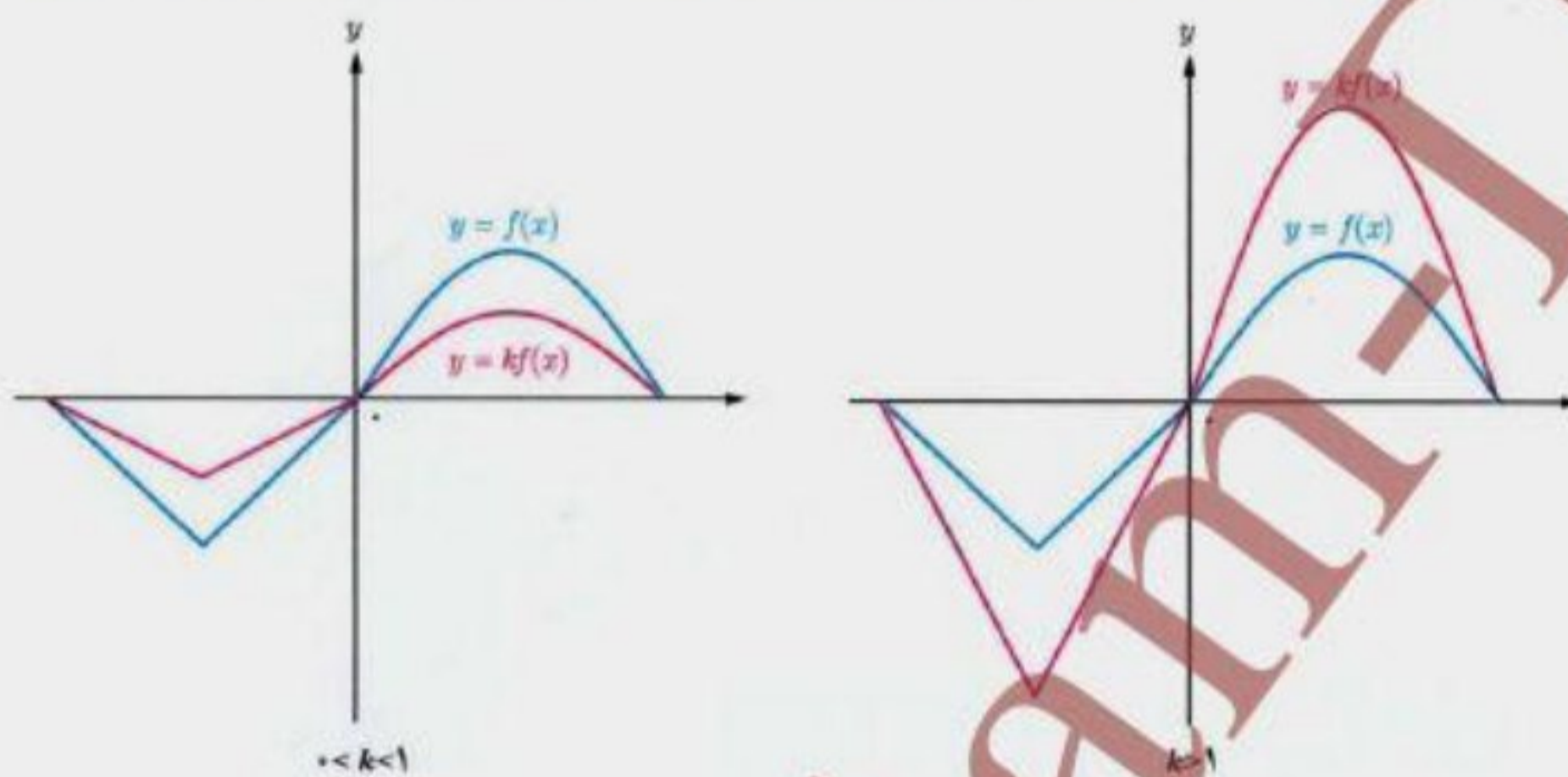
بنابراین (x, ky) یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x, y) از نمودار تابع f است.

ادامه جواب ۳: دامنه تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ همان دامنه تابع $y = \sin x$ است ولی

برد تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ نسبت به برد تابع $y = \sin x$ انقباضی عمودی با ضریب

$\frac{1}{3}$ داشته است به این صورت که برد تابع $y = \sin x$ ، $[-1, 1]$ شد برد تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ ، $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ می شد.

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.

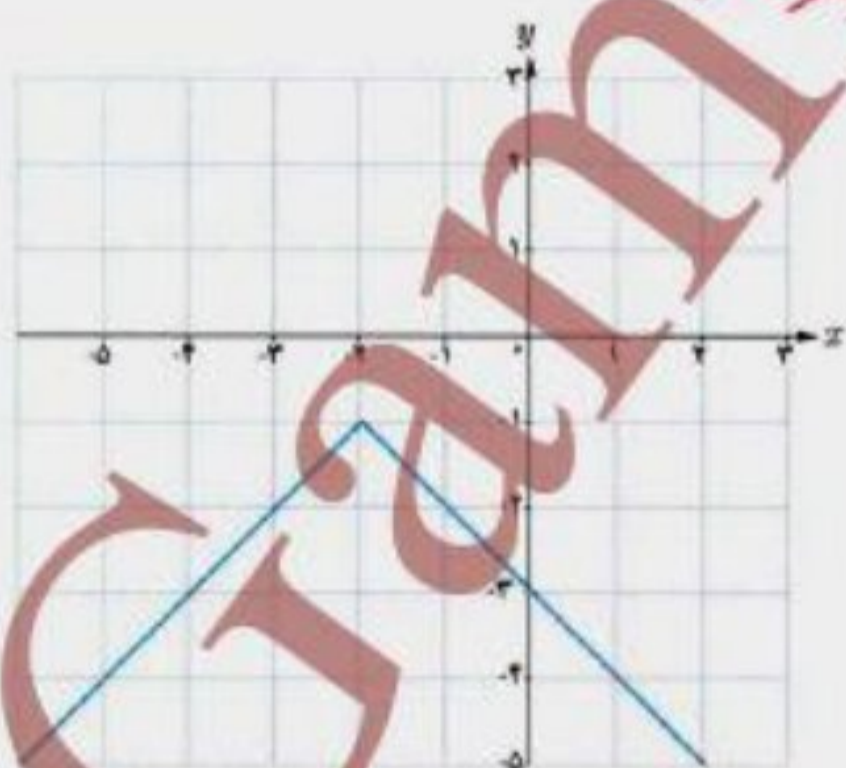


اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

کاردکلاس

* حل این کاردکلاس در صفحه بعد *



۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

الف) $y = -x^2$

ب) $y = 2x^2 - 1$

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حل کار در کلاس صفحه ۷ :

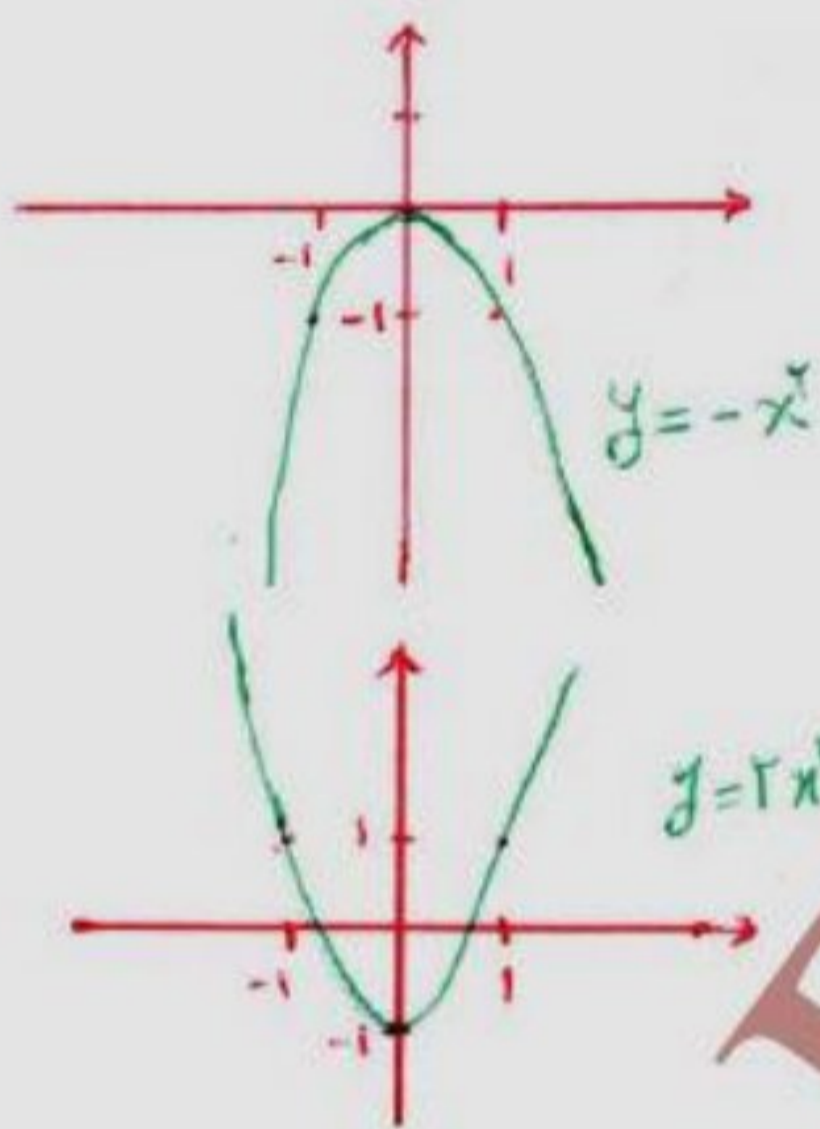
حل کار در کلاس ۱ :

حالت $k > 0$:

دامنه تابع $y = kf(x)$ (برای $k > 0$) همان دامنه تابع $y = f(x)$ یعنی $[a, b]$ می باشد و برد تابع $y = kf(x)$ (برای $k > 0$) برابر $[kc, kd]$ می باشد.

دامنه تابع $y = kf(x)$ (برای $k < 0$) همان دامنه تابع $y = f(x)$ یعنی $[a, b]$ می باشد و برد تابع $y = kf(x)$ (برای $k < 0$) برابر $[k \cdot d, k \cdot c]$ می باشد.

حل کار در کلاس ۲ :



الف) برای رسم نمودار تابع $y = -x^2$ ، کافی است نمودار $y = x^2$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

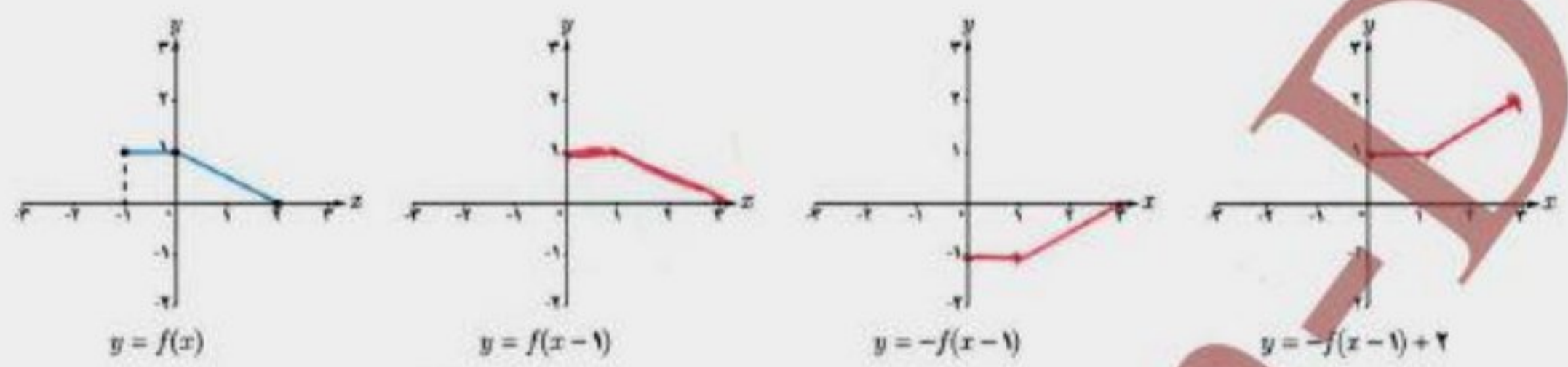
ب) برای رسم نمودار تابع $y = 2x^2 - 1$ ، ابتدا نمودار تابع $y = x^2$ را نسبت به محوری با ضریب انبساط خواهد داشت پس نمودار حاصل \perp واحد در راستای قائم به طرف پایین منتقل می شود.

ب) $y = -|x+2| - 1$

توضیح قسمت ب) در نمودار تابع رسم شده، ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ دو واحد در راستای افقی به طرف چپ منتقل می شود که ضابطه آن به $y = |x+2|$ تبدیل می شود پس نسبت به محور x ها قرینه شده است که ضابطه آن تبدیل به $y = -|x+2|$ می شود و در آخر یک واحد در راستای قائم به طرف پایین منتقل می شود که ضابطه آن را به $y = -|x+2| - 1$ تبدیل می کند.

در پاسخ کار در کلاس ۳، در دستگاه های مختصات موجود در سوال دار، شده است.

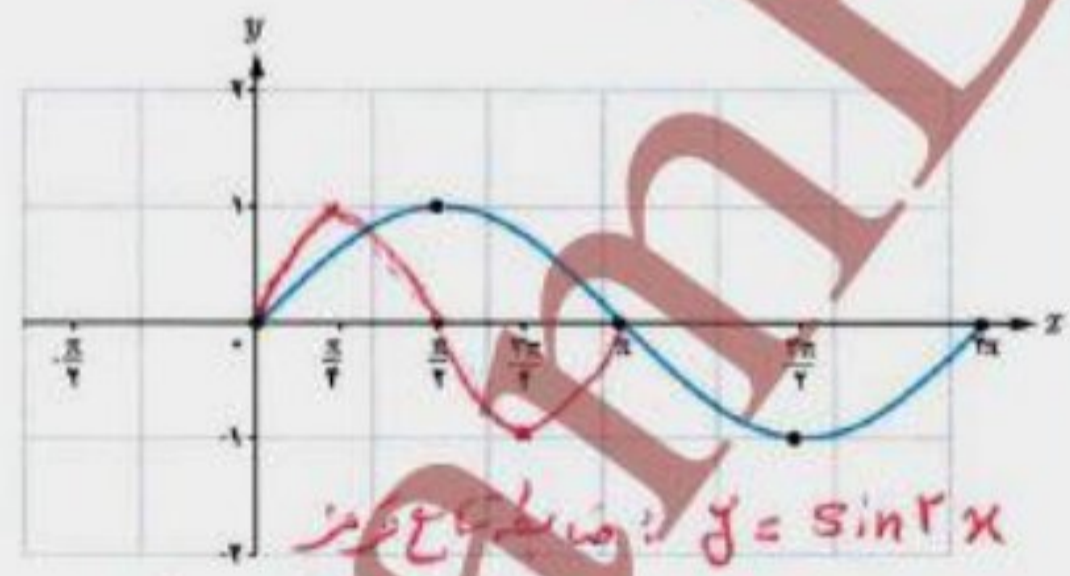
نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y = -f(x-1) + 2$ را رسم کنید.



انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y = \sin x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم شده است. با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y = \sin 2x$ مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله $[0, \pi]$ رسم کنید.



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \sin 2x$	0	1	0	-1	0

$y = \sin 2x$: ضرایب تابع مرتب
 $y = \sin x$: ضرایب تابع اصلی

با مقایسه نمودارهای توابع $y = \sin 2x$ و $y = \sin x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

نمودار تابع $y = \sin 2x$ نسبت به نمودار تابع $y = \sin x$ انقباض افقی با ضریب ۲ دارد.
 دوره تناوب تابع $y = \sin x$ ، $T = 2\pi$ می‌باشد و دوره تناوب تابع $y = \sin 2x$ ، $T = \pi$ می‌باشد.



فصل اول: تابع ۹

در حالت کلی اگر (x, y) یک نقطه دلخواه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

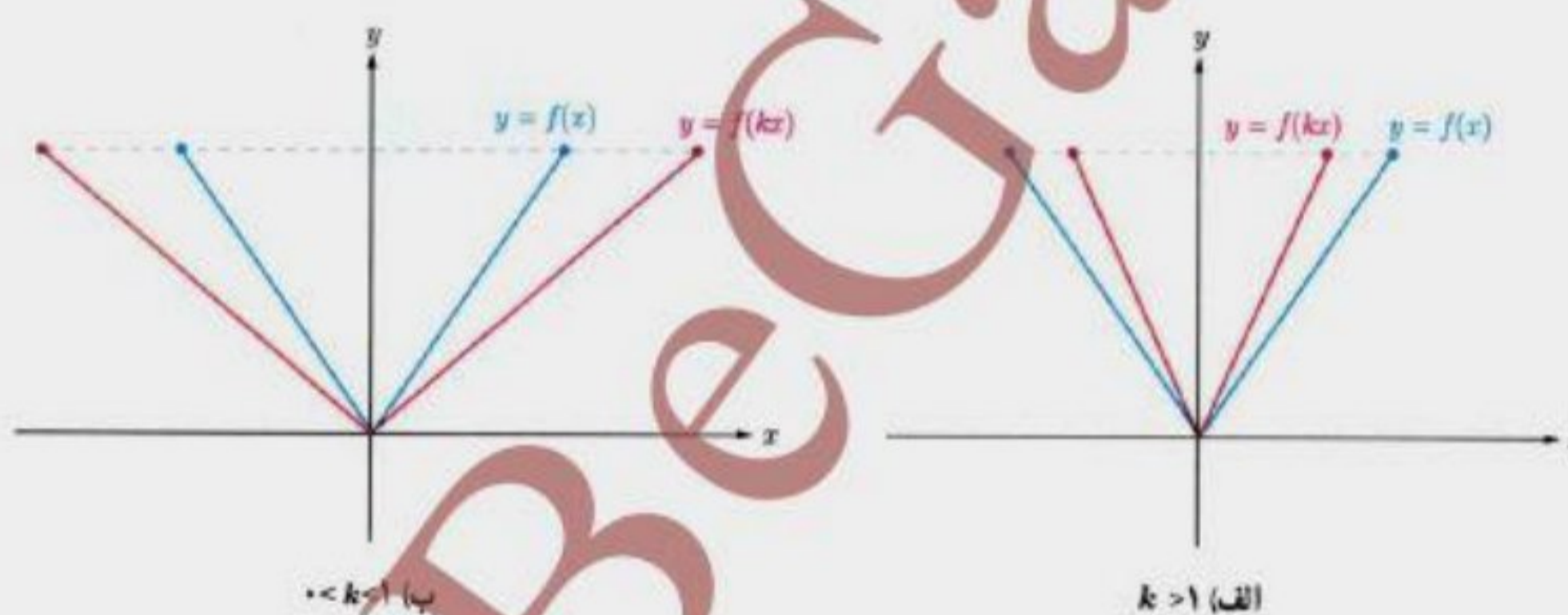
$$g\left(\frac{x_0}{k}\right) = f\left(k \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y.$$

آنگاه:

بنابراین نقطه $\left(\frac{x_0}{k}, y\right)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه (x_0, y) از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

در شکل های زیر، نمودار تابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x به دست می آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حل ۲:

* برای $k > 0$: دامنه تابع $y = f(kx)$ (برای $k > 0$) برابر $[\frac{1}{k}a, \frac{1}{k}b]$ می باشد در برد تابع $y = f(kx)$

(برای $k < 0$) همان برد تابع $y = f(x)$ یعنی $[a, b]$ می باشد.

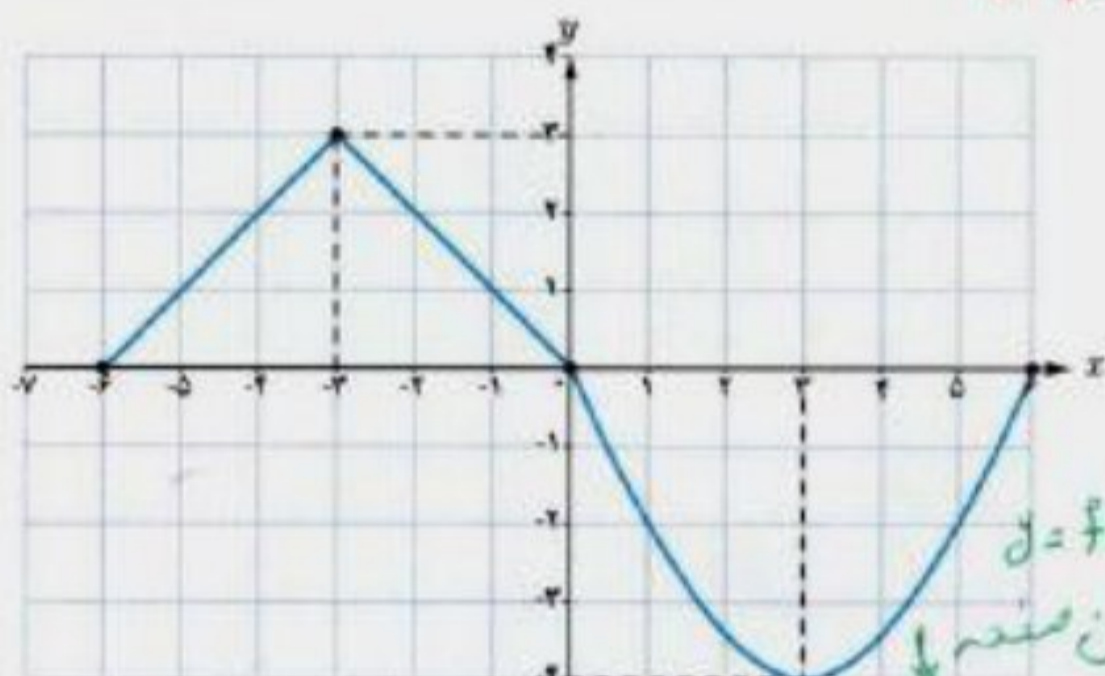
۱۰ * برای $k < 0$: دامنه تابع $y = f(kx)$ (برای $k < 0$) برابر $[\frac{1}{k}b, \frac{1}{k}a]$ می باشد

و برد تابع $y = f(kx)$ (برای $k < 0$) همان برد تابع $y = f(x)$ یعنی $[a, b]$ می باشد.

کارد کلاس

۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

حل این کارد در کلاس در بالای صفحه ↑



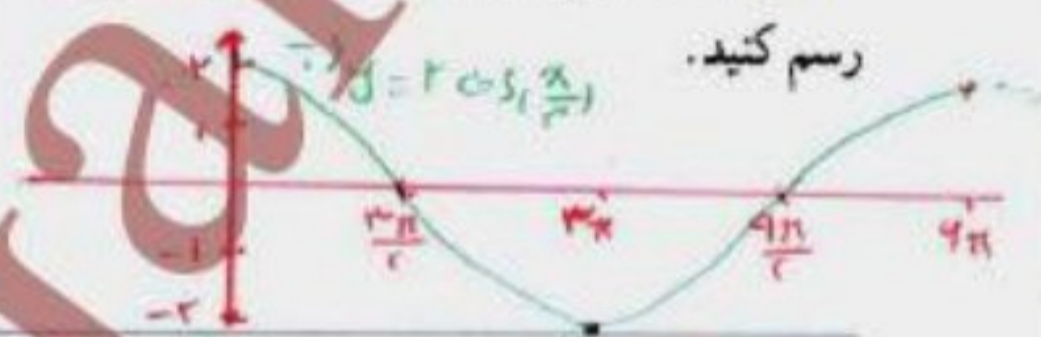
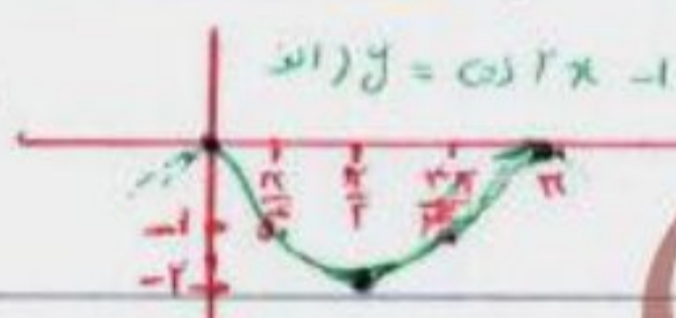
۱ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



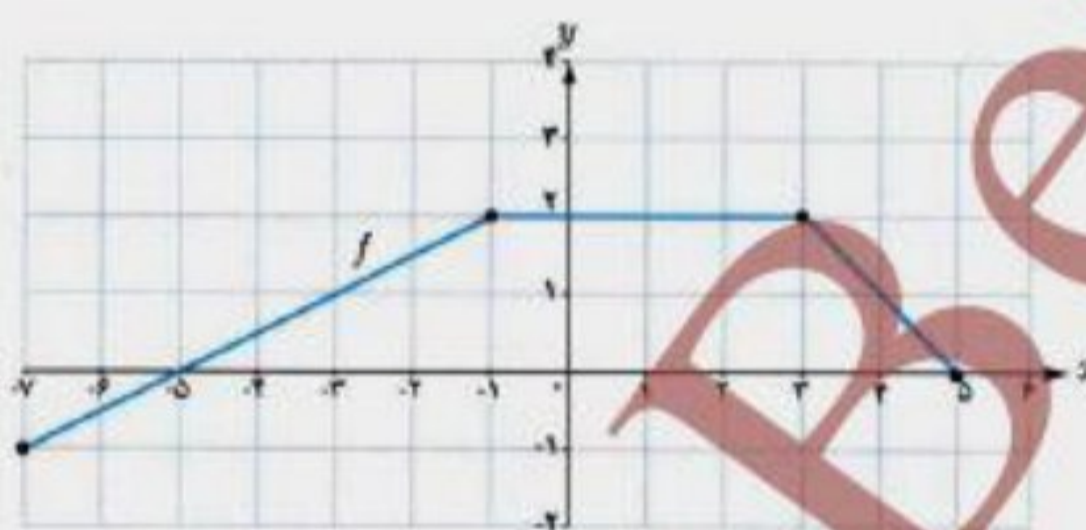
۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

الف) $y = \cos 2x - 1$

ب) $y = 2 \cos(\frac{x}{3})$



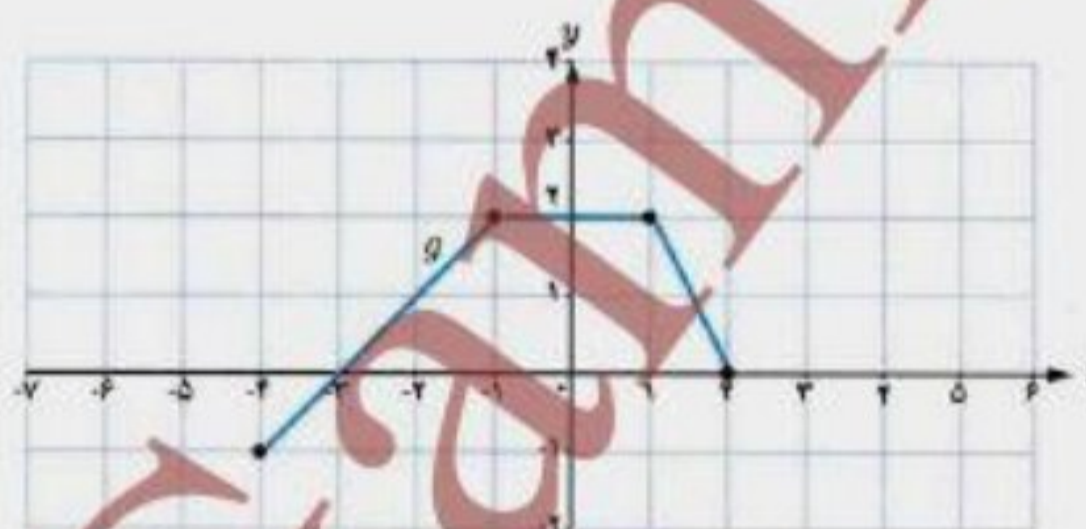
مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را به کمک آن رسم می کنیم.



اگر $A = (x_0, y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g $A' = (\frac{x_0-1}{2}, y_0)$ است، زیرا:

$$g\left(\frac{x_0-1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{x_0-1}{2}\right)+1\right) = f(x_0-1+1) = f(x_0) = y_0$$

بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.



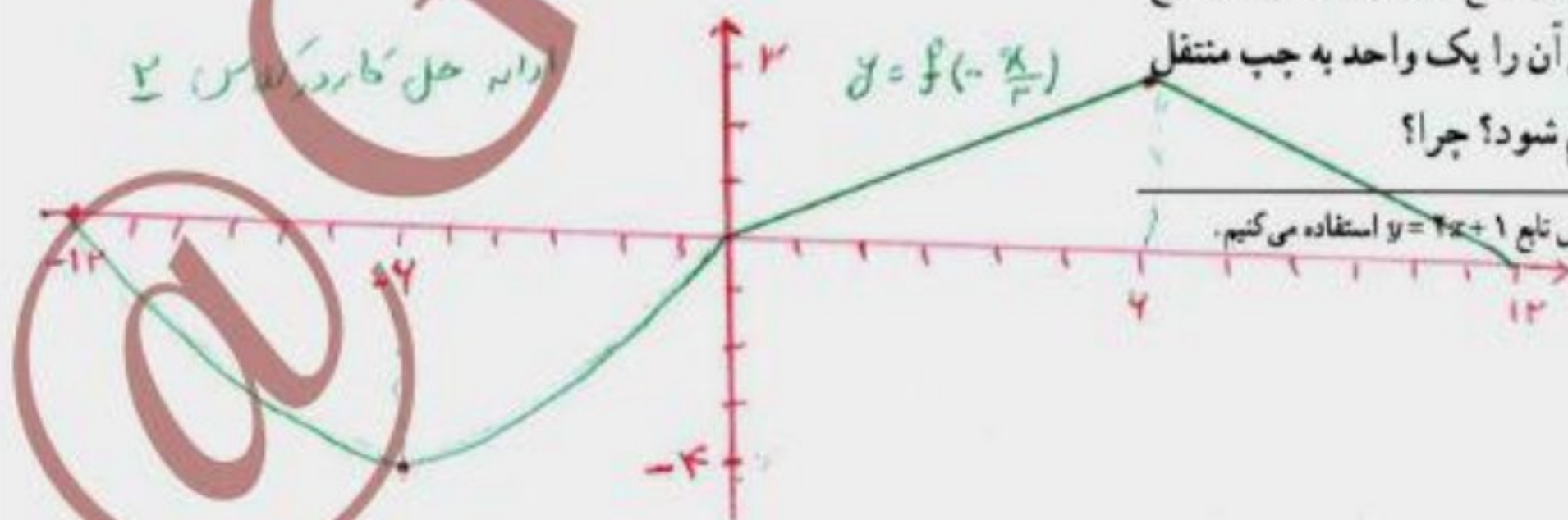
با توجه به اینکه $\frac{x_0-1}{2} = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}$ ، آیا می توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد کنید؟

آیا می توان برای رسم نمودار تابع g ، ابتدا نمودار تابع $y = f(2x)$ را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا $g(x) = f(2x+1)$ رسم شود؟ چرا؟

۱- برای یافتن طول نقطه A' ، از معکوس تابع $y = 2x+1$ استفاده می کنیم.

راه حل کارد کلاس ۲

$y = f(-\frac{x}{2})$



هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y = \sqrt{2+x} \rightarrow a$

ب) $y = 2 + \sqrt{x} \rightarrow d$

پ) $y = -2\sqrt{x} \rightarrow e$

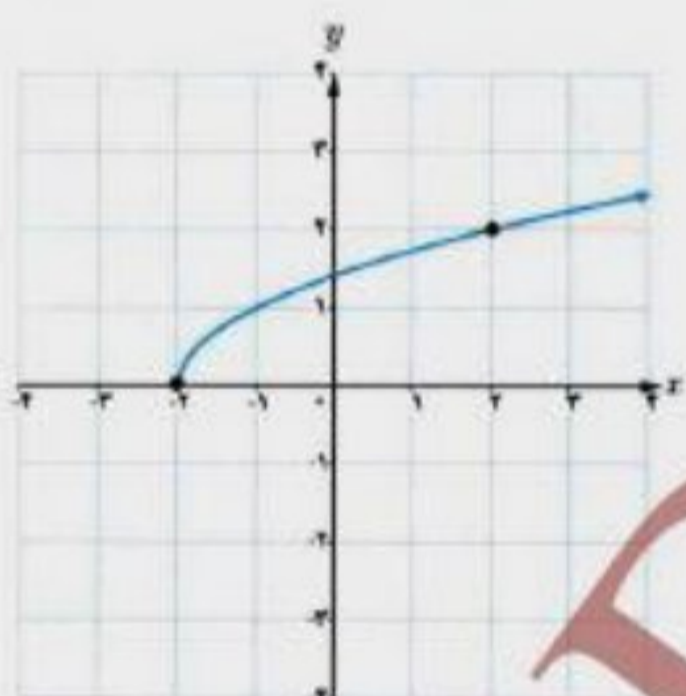
ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}} \rightarrow c$

ث) $y = 2 + \sqrt{x-2} \rightarrow b$

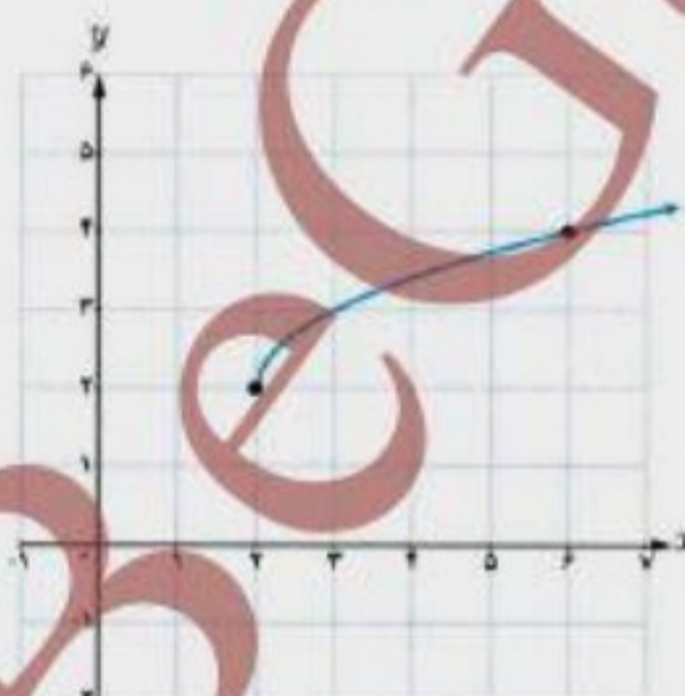
ج) $y = \sqrt{-2x} \rightarrow f$

تهیه کننده:

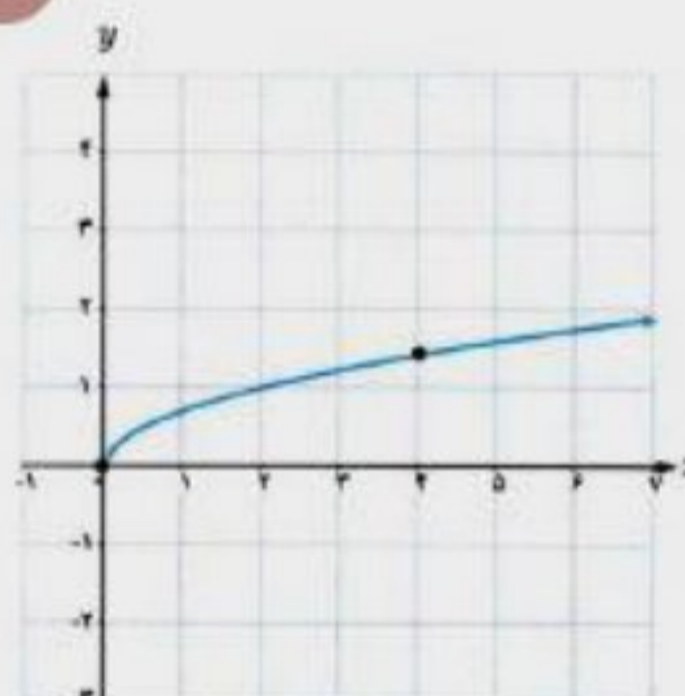
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



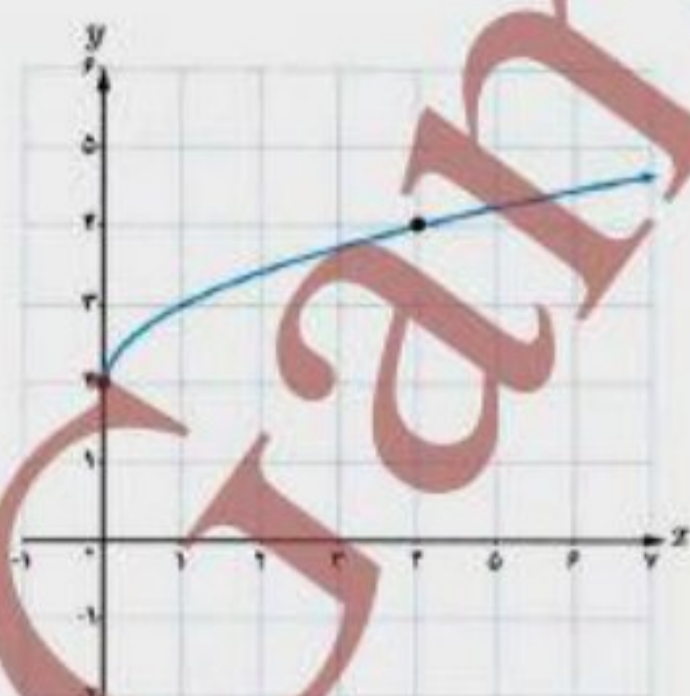
(a)



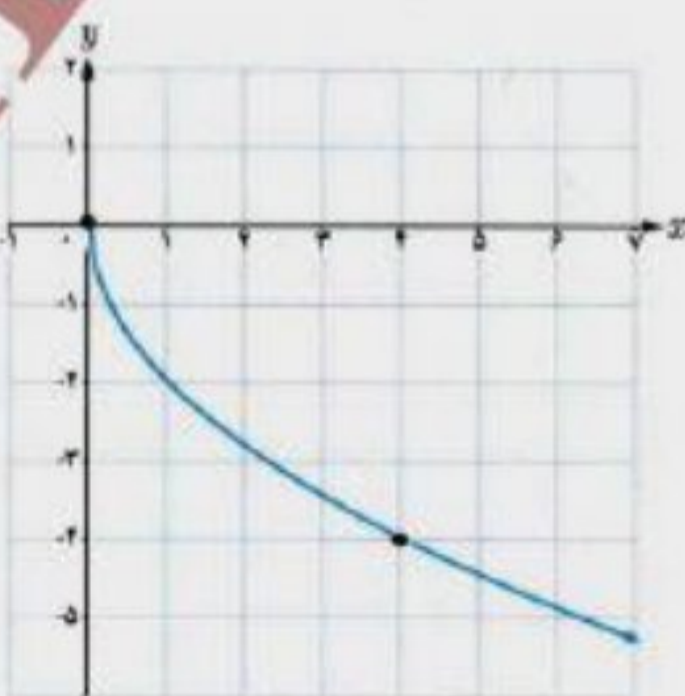
(b)



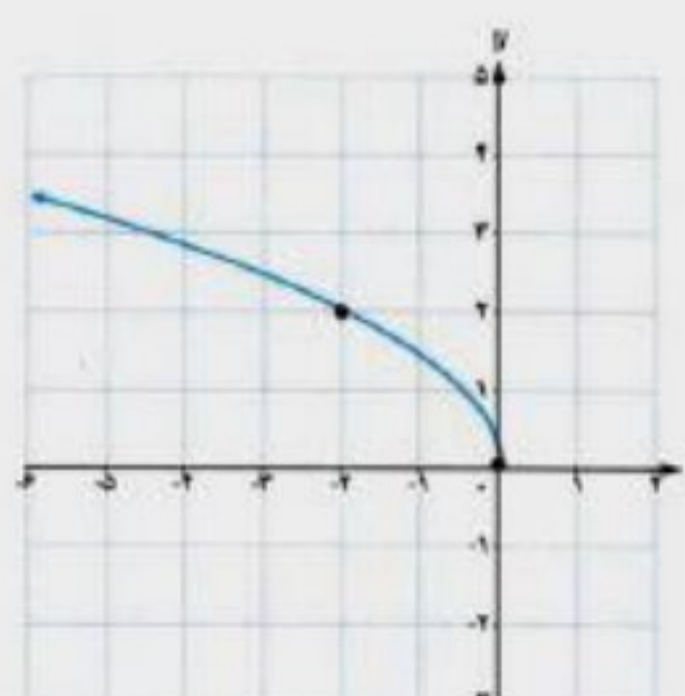
(c)



(d)



(e)



(f)

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

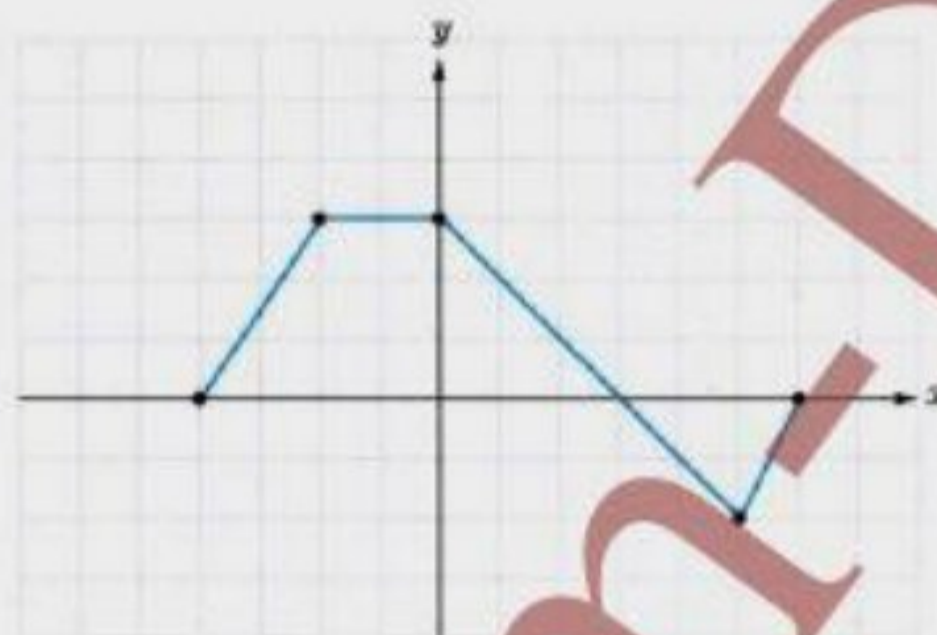
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = 2f(x-1)$

پ) $y = -f(x) + 2$

ت) $y = f(2x-1)$

ث) $y = f(3-x)$

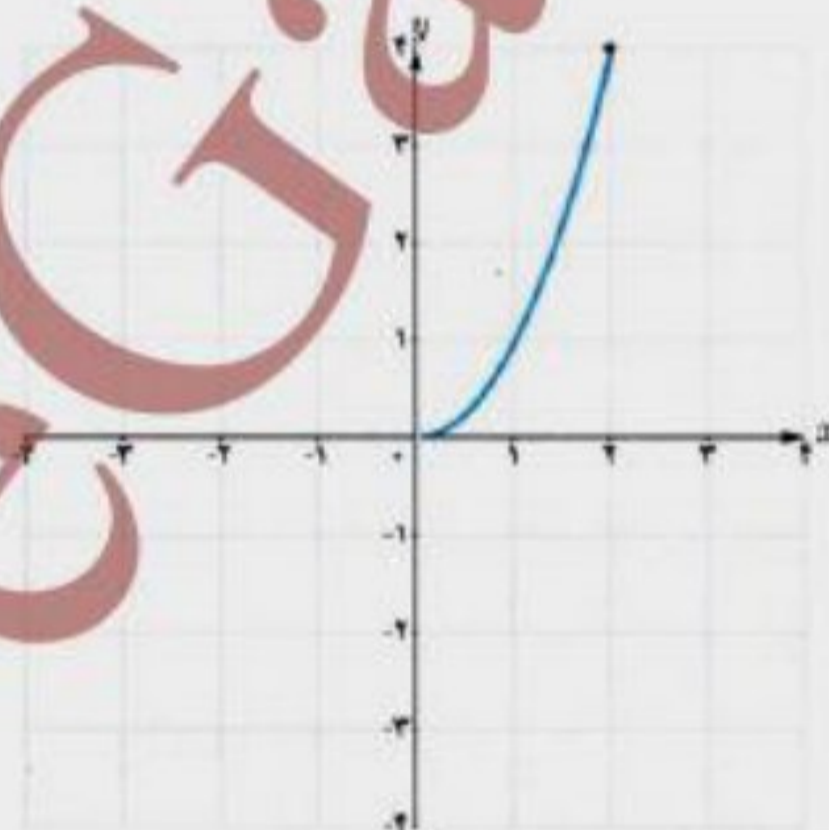


نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

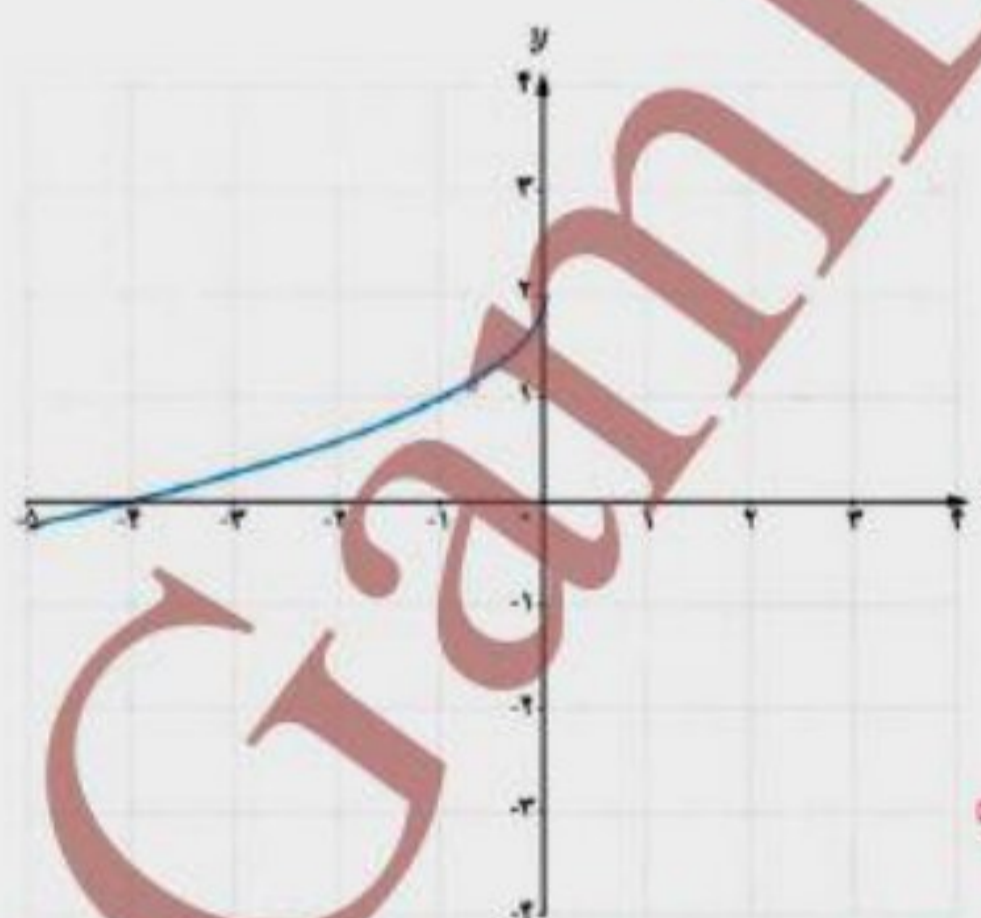
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$



نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه شده است و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده است بنابراین ضابطه این تابع به صورت زیر می باشد:

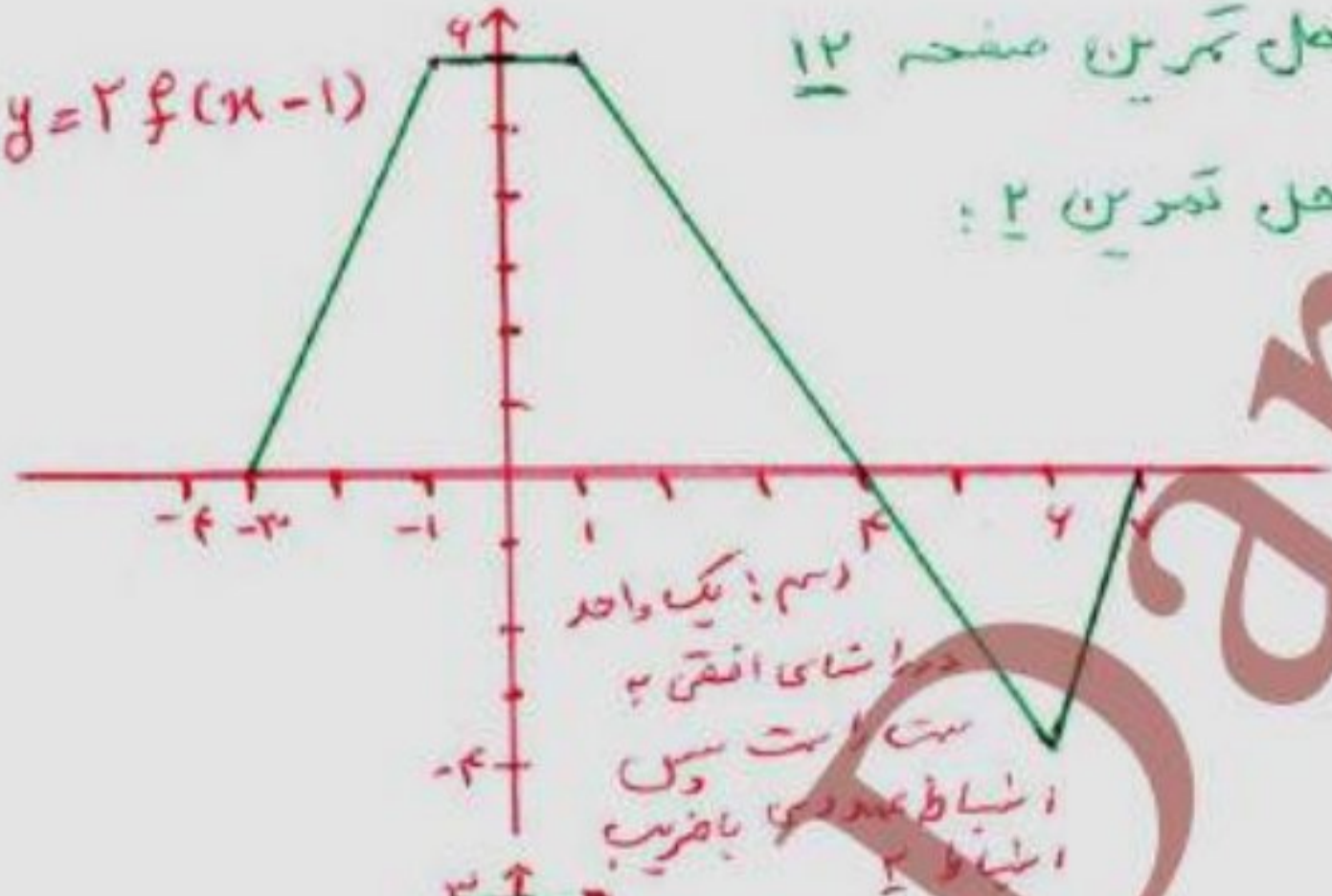
$$y = -\sqrt{-x} + 2$$



حل تمرین صفحه ۱۲

حل تمرین ۲:

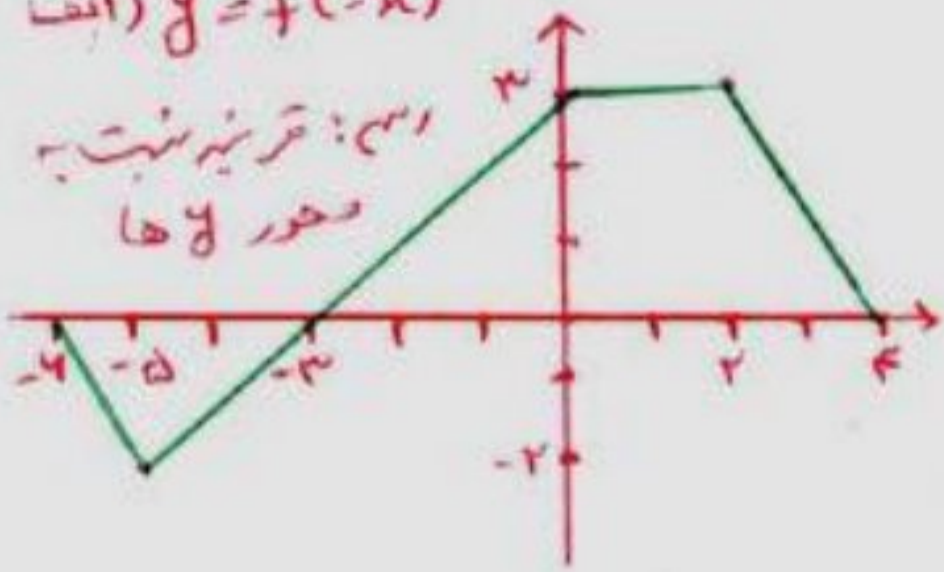
ب) $y = 2f(x-1)$



رسم: یک واحد در راستای افقی به سمت راست و شیب مضرب ۲

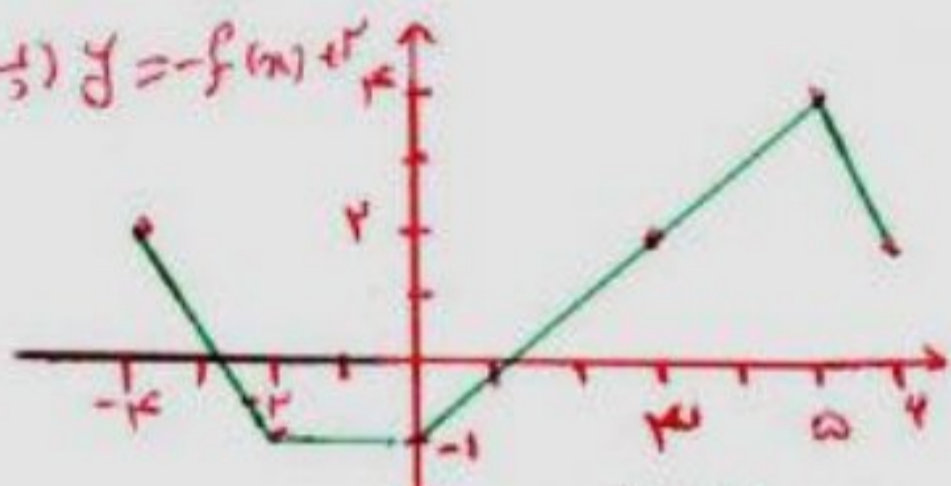
الف) $y = f(-x)$

رسم: قرینه نسبت به محور y ها

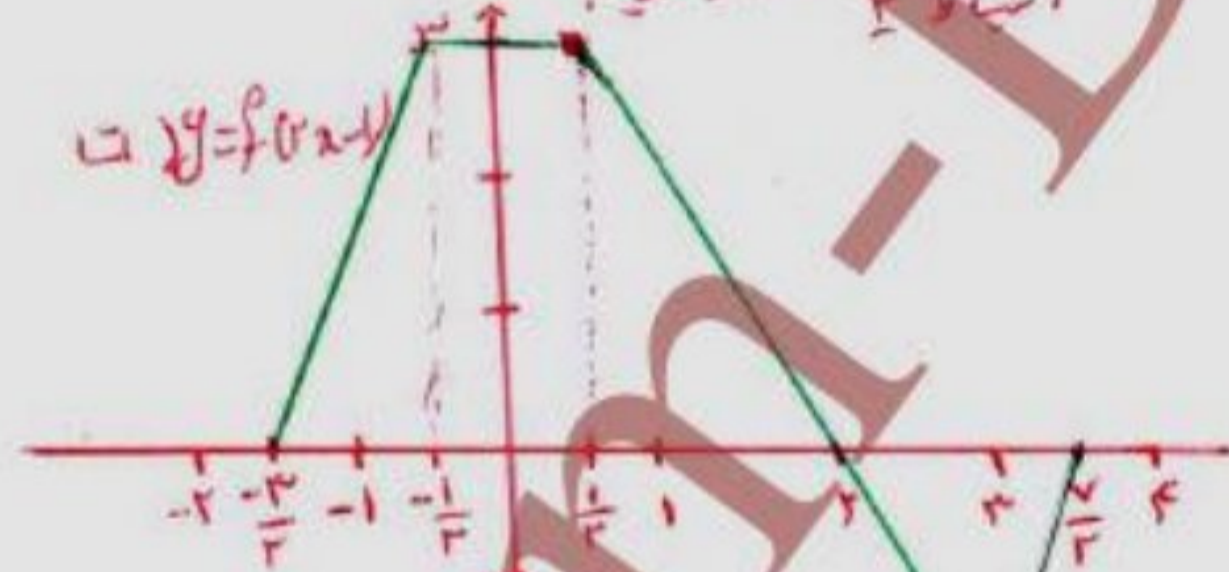


ب) $y = -f(x)$

رسم: قرینه نسبت به محور x ها و شیب ۲ واحد در راستای عمود به بالا

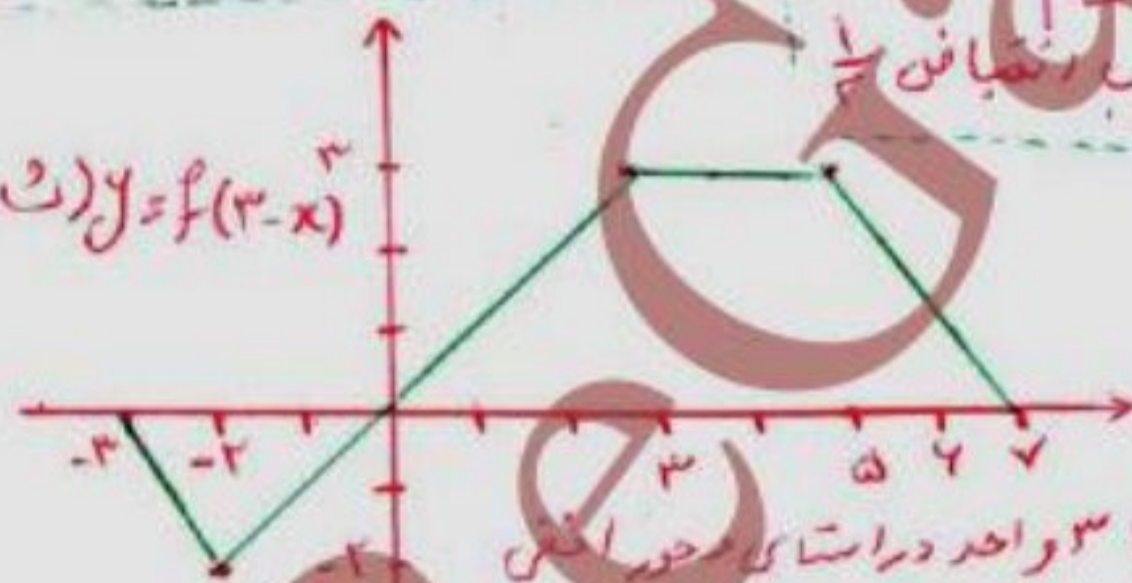


الف) $y = f(2-x)$



رسم: یک واحد در راستای افقی به سمت راست و شیب مضرب ۲

ب) $y = f(3-x)$

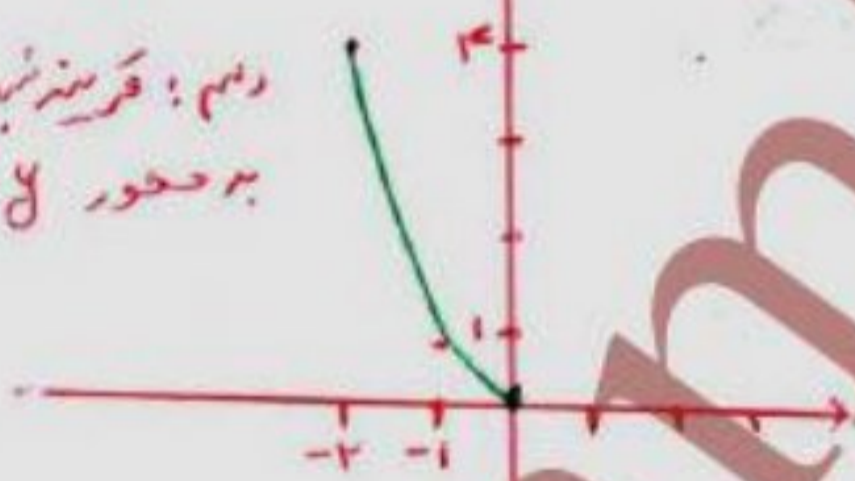


رسم: ۳ واحد در راستای عمود افقی به سمت راست و شیب مضرب ۲

حل تمرین ۳:

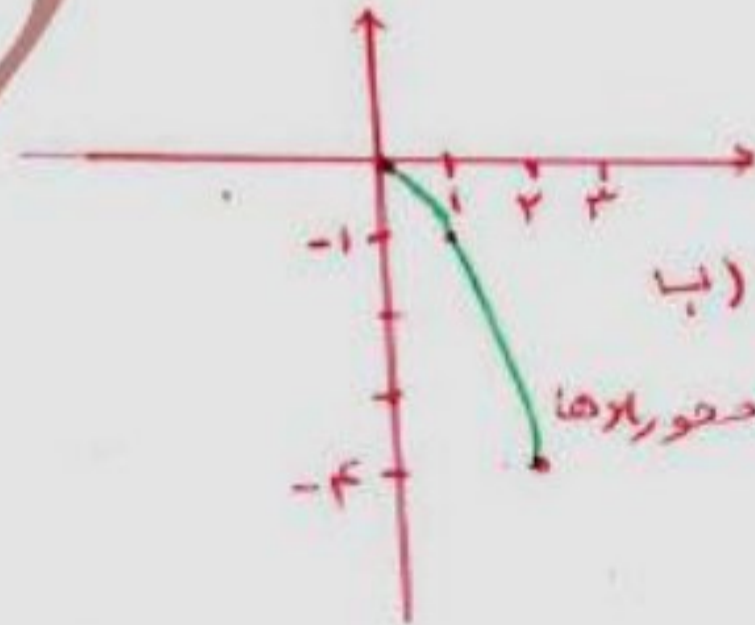
الف) $y = f(-x)$

رسم: قرینه نسبت به محور y ها



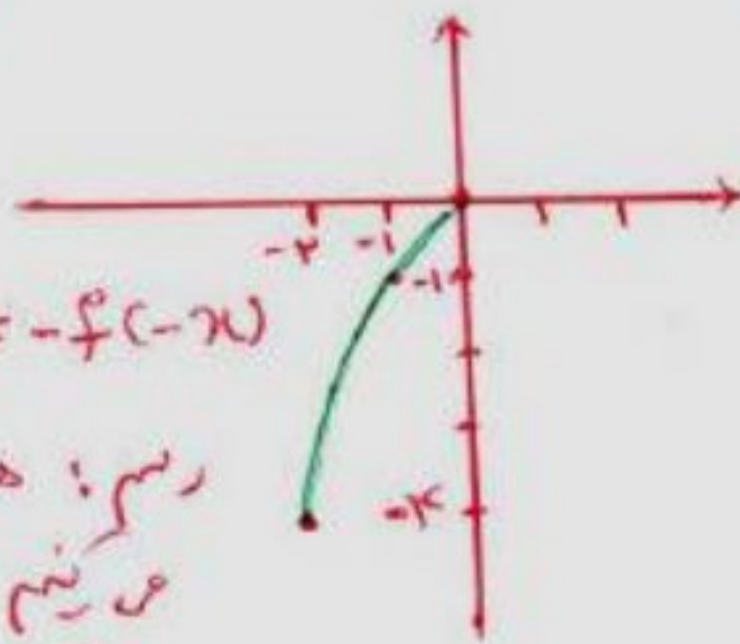
ب) $y = -f(x)$

رسم: قرینه نسبت به محور x ها



ب) $y = -f(-x)$

رسم: هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه می کنیم



تهیه کننده:

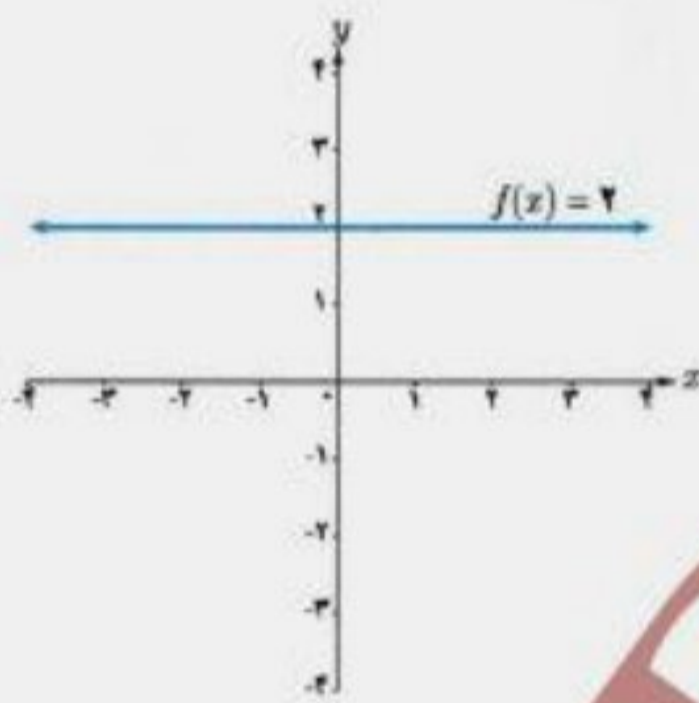
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

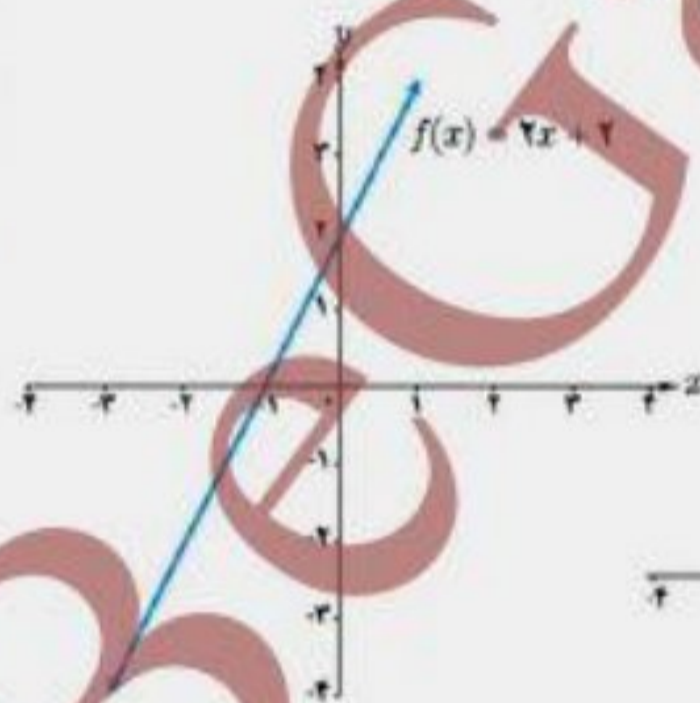
فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چند جمله‌ای از درجه n نامیده می‌شود.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

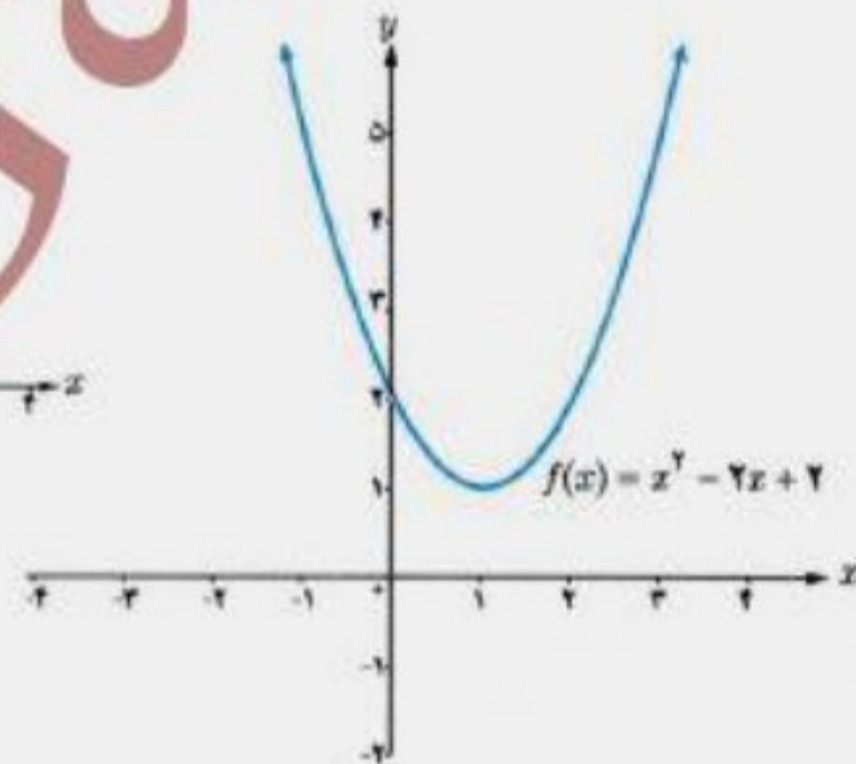
تابع ثابت $f(x) = c$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

کارد کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

درجه ۱: $f(x) = 2x - 2$, درجه ۳: $h(x) = x^3 + x - 4$, درجه ۴: $n(x) = 2x - x^4$

درجه ۲: $g(x) = (x-1)^2 + 3$, درجه صفر: $m(x) = 5$, درجه ۵: $p(x) = x^5(1-x)^2$

۱- برای $f(x) = 0$ ، درجه تعریف نمی‌شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^3$ است.

با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

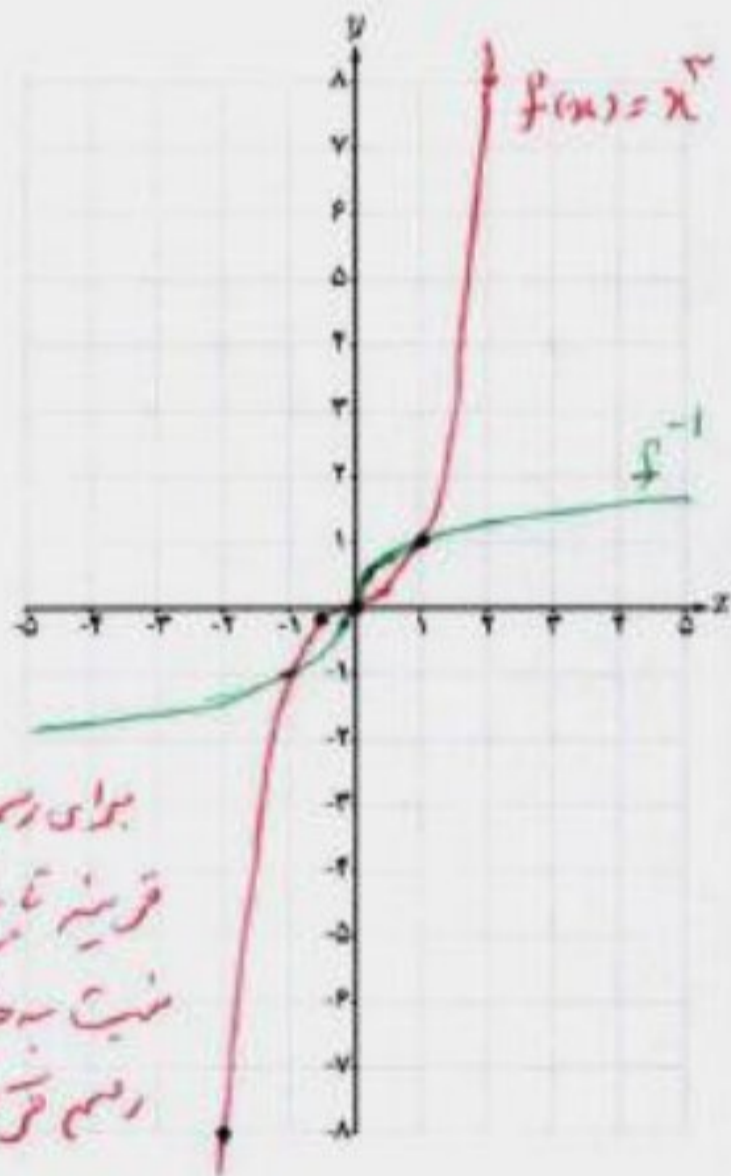
x	$y = x^3$
-۲	$(-2)^3 = -8$
-۱	$(-1)^3 = -1$
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$
۱	$1^3 = 1$
۲	$2^3 = 8$

به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید که این تابع وارون پذیر است.

این تابع یک تابع یک به یک است چون هر نقطه موازی محور y ها نمودار آن را در یک نقطه قطع می کند پس وارون پذیر است. نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را تعیین کنید.

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$
 $\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

کارد کلاس



برای رسم تابع وارون
 قرینه تابع $y = x^3$ را
 نسبت به خط $y = x$
 رسم کردیم.

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

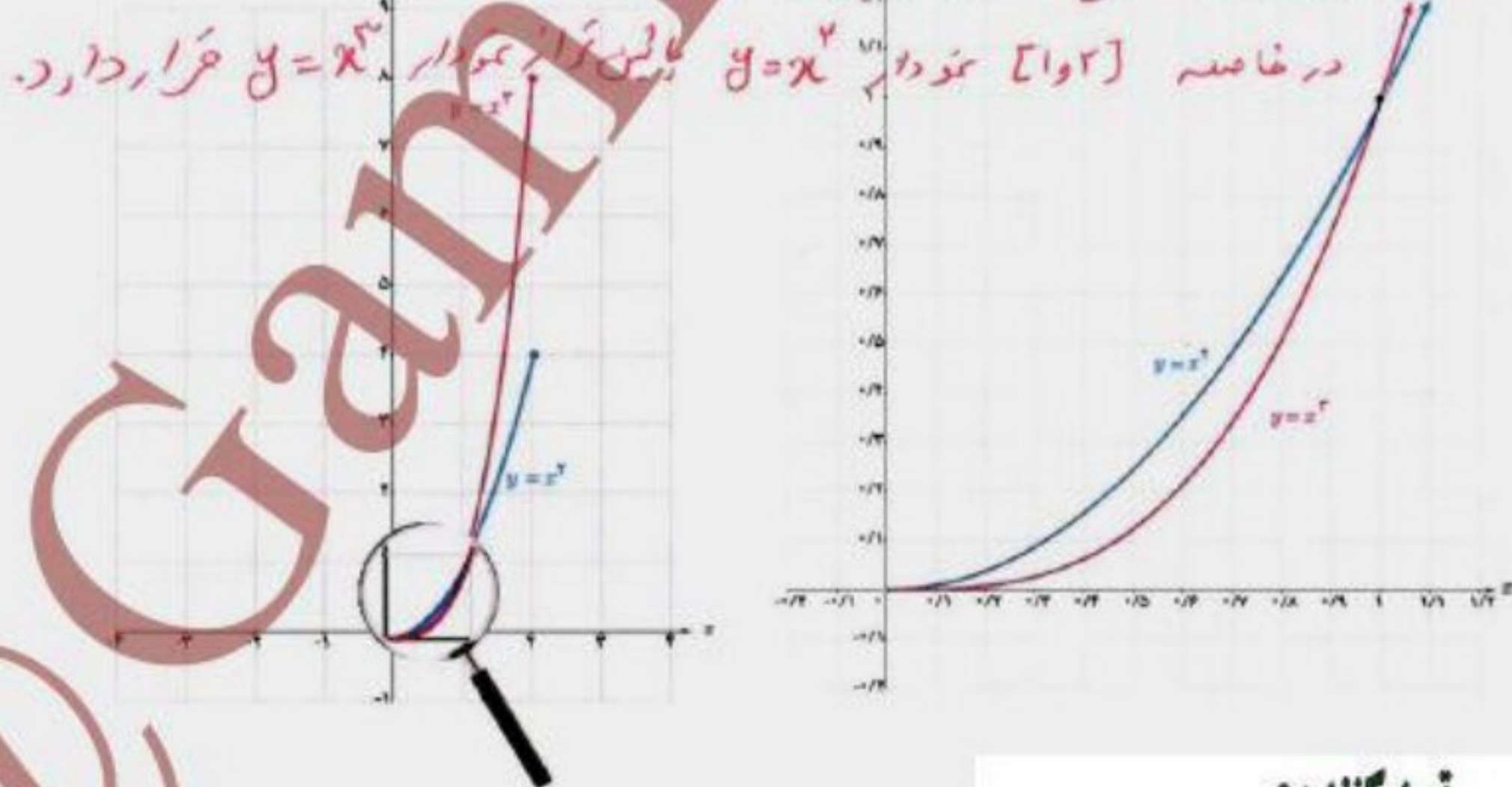
الف) $y = (x+1)^3$

ب) $y = -x^3 + 1$

ب) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^3$ و $y = x^2$ در فاصله $[0, 2]$ رسم شده است.

در فاصله $[0, 1]$ ، نمودار کدام تابع پایین تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[1, 2]$ چگونه؟
 در فاصله $[0, 1]$ نمودار تابع $y = x^3$ پایین تر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.



تهیه کننده:

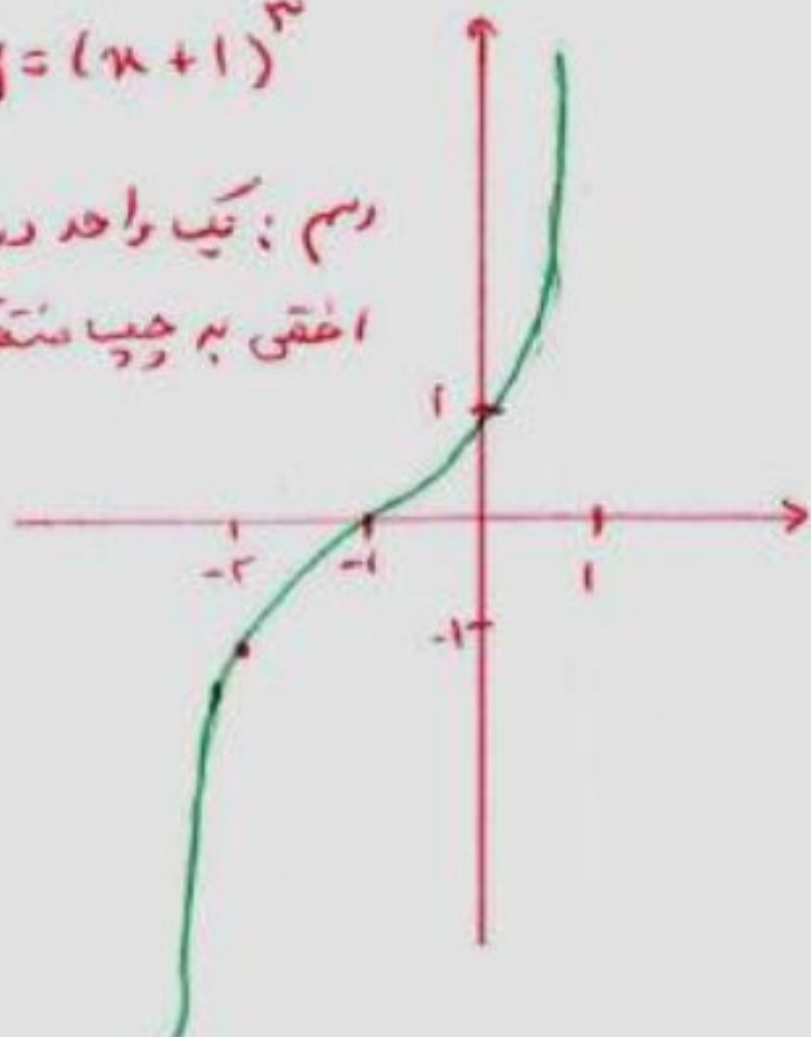
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حل کاربرد کلاس صفحه ۹۱:

حل ۱:

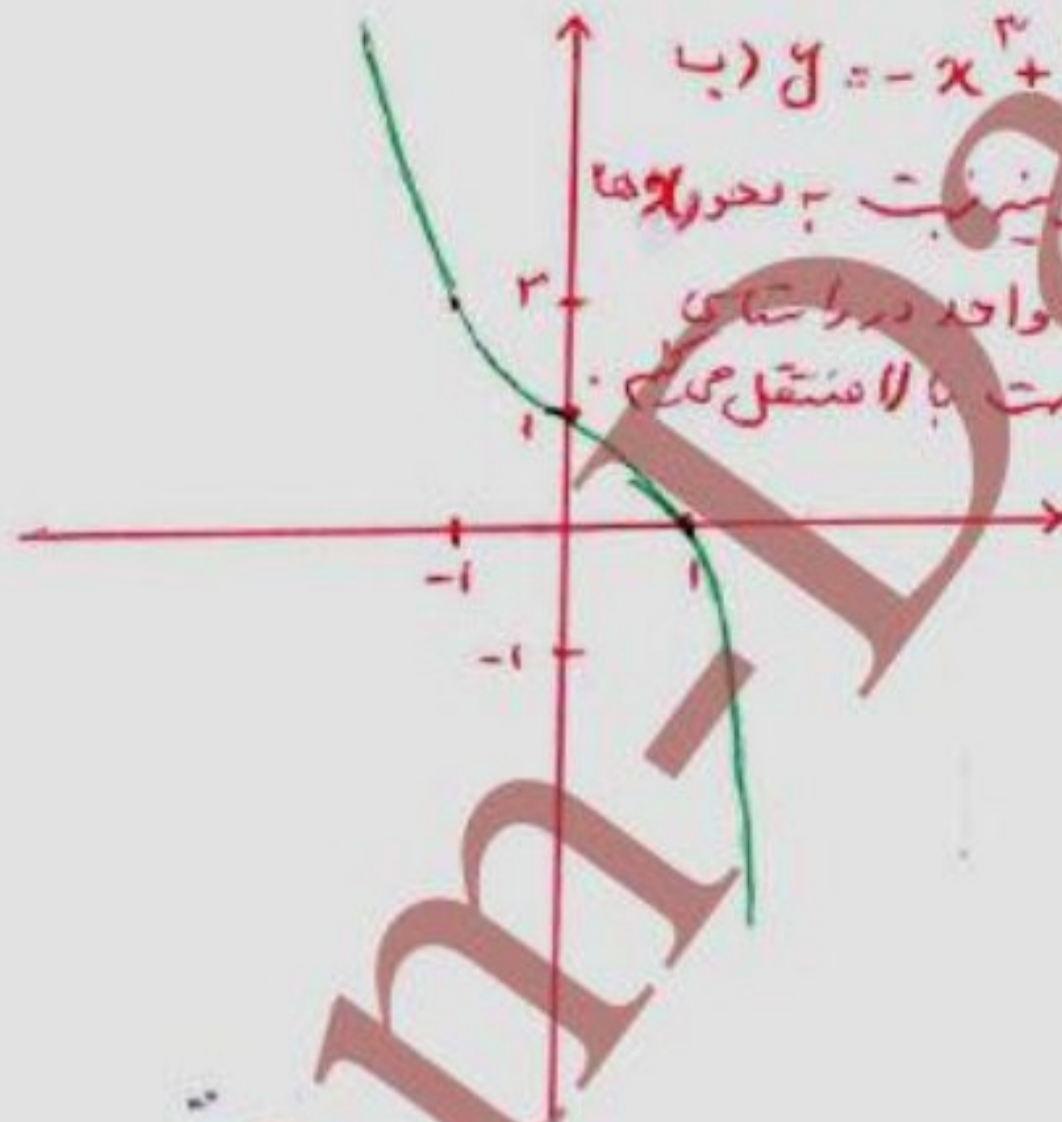
الف) $y = (x+1)^3$

رسم: یک واحد در راستای
افقی به چپ منتقل می‌کنیم



ب) $y = -x^2 + 1$

رسم: قرینه نسبت به محور yها
رسم یک واحد در راستای
عمود به سمت بالا منتقل می‌کنیم

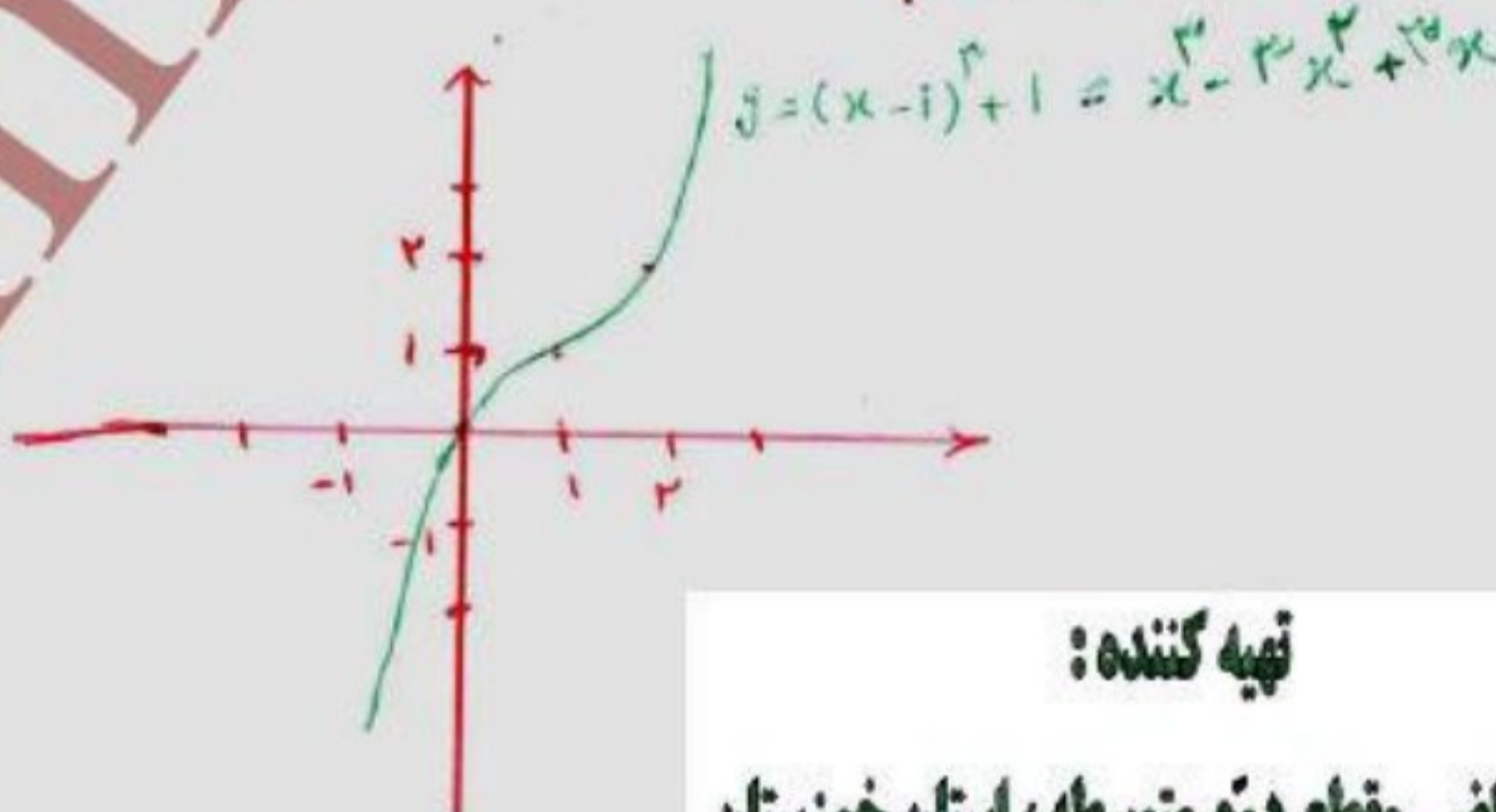


ب) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

ابتدا تابع همت با را به صورت $y = (x+a)^3 + b$ می‌نویسیم:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{\text{اتحاد متکعب تکامل درجه ۳}} + 1 = (x-1)^3 + 1$$

انگول برای رسم: یک واحد در راستای افقی به راست و یک واحد در راستای قائم به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



تهیه کننده:

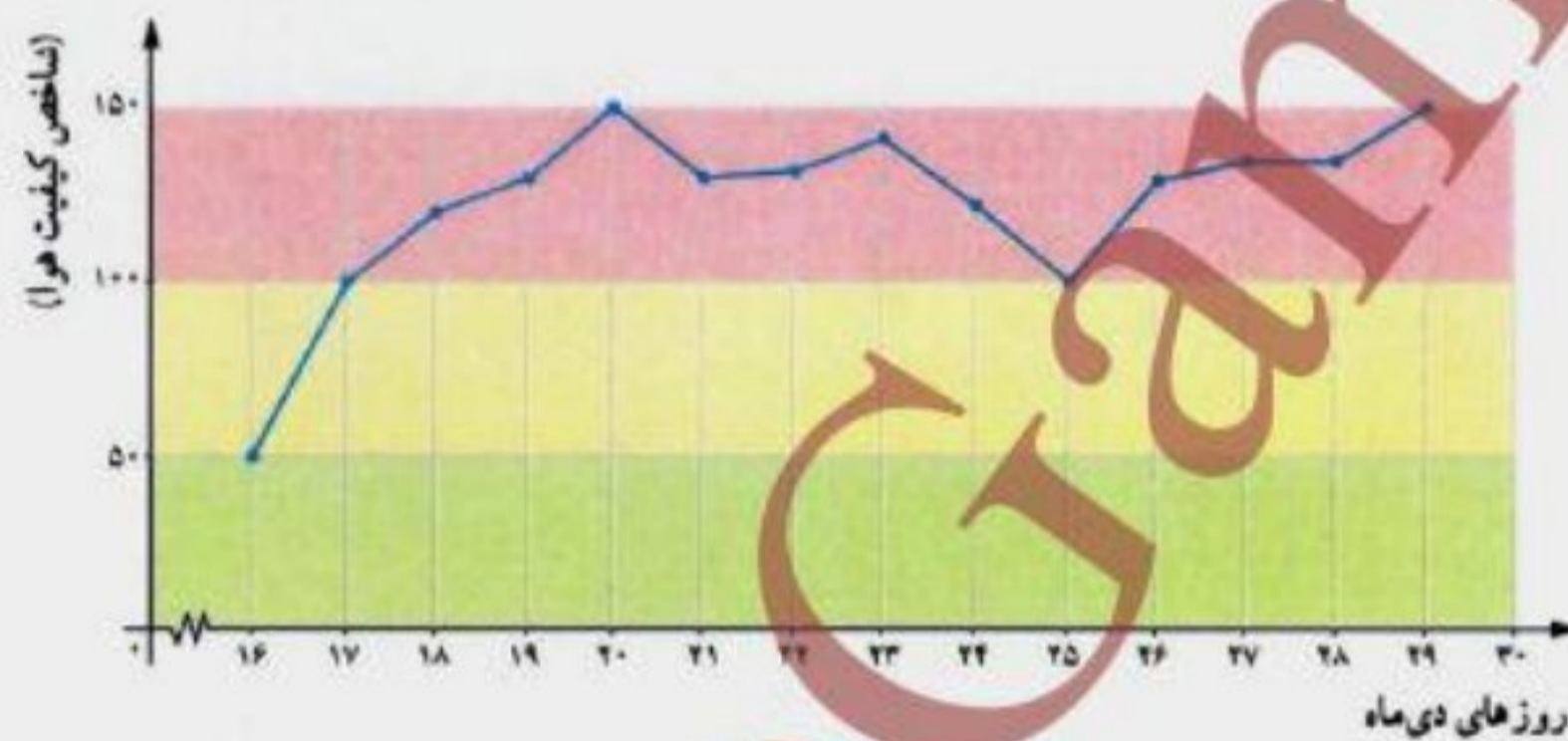
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



توابع صعودی و توابع نزولی

تعالیت

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه، یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.

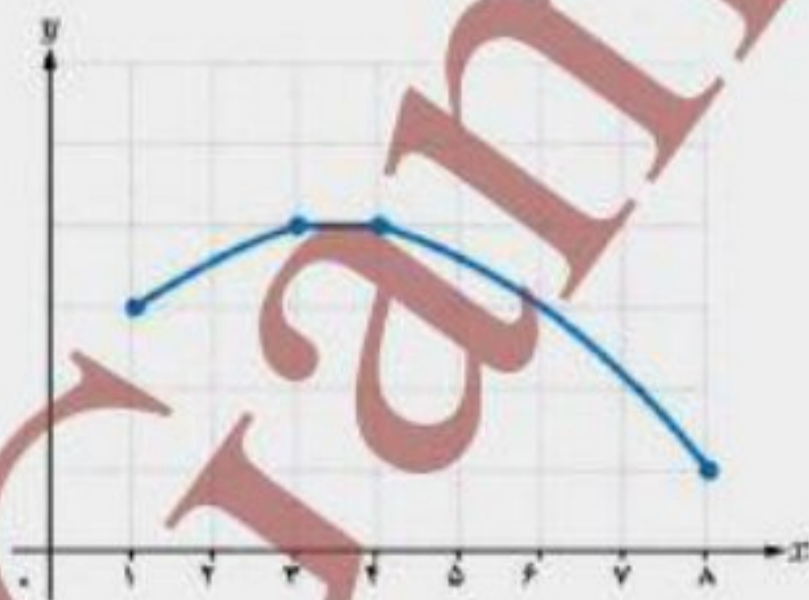


د [۲۸, ۲۹]

الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه افزایش بوده است؟ در فاصله‌های زمانی [۱۶, ۲۰] و [۲۱, ۲۳] و [۲۴, ۲۹]

ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه کاهش بوده است؟ در فاصله‌های زمانی [۲۰, ۲۱] و [۲۳, ۲۴] و [۲۹, ۳۰]

پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟ در فاصله زمانی [۲۱, ۲۳]



دامنه تابع f که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه $[۱, ۸]$ است. در بازه $[۱, ۳]$ ، هم‌زمان با افزایش x ، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع f در بازه $[۱, ۳]$ صعودی می‌گوییم. در بازه $[۳, ۴]$ مقدار تابع ثابت است.

در ادامه و در بازه $[۴, ۸]$ ، هم‌زمان با افزایش x ، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع f در بازه $[۴, ۸]$ نزولی گفته می‌شود.

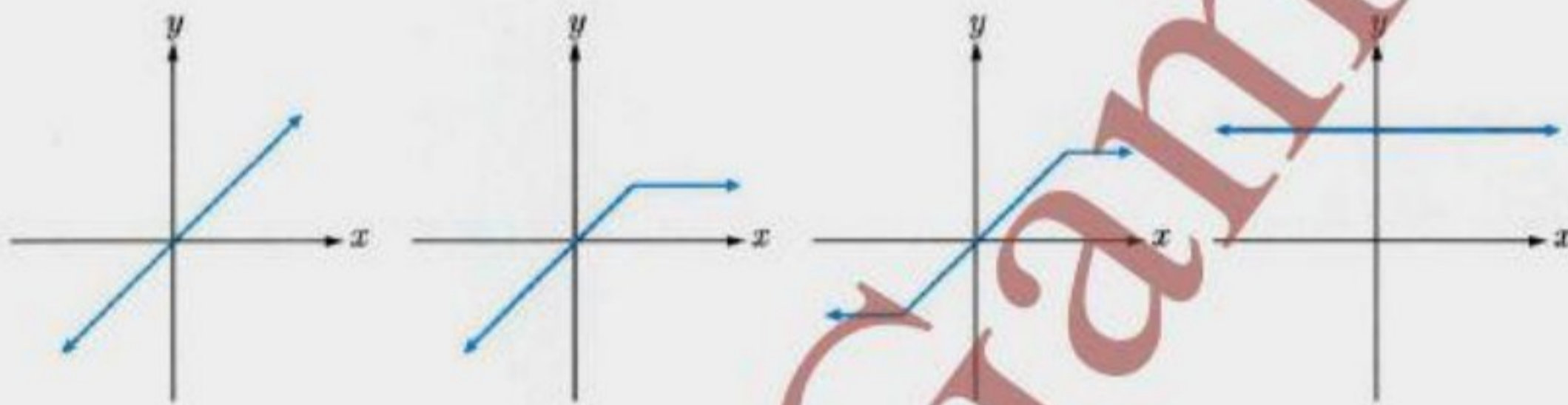
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

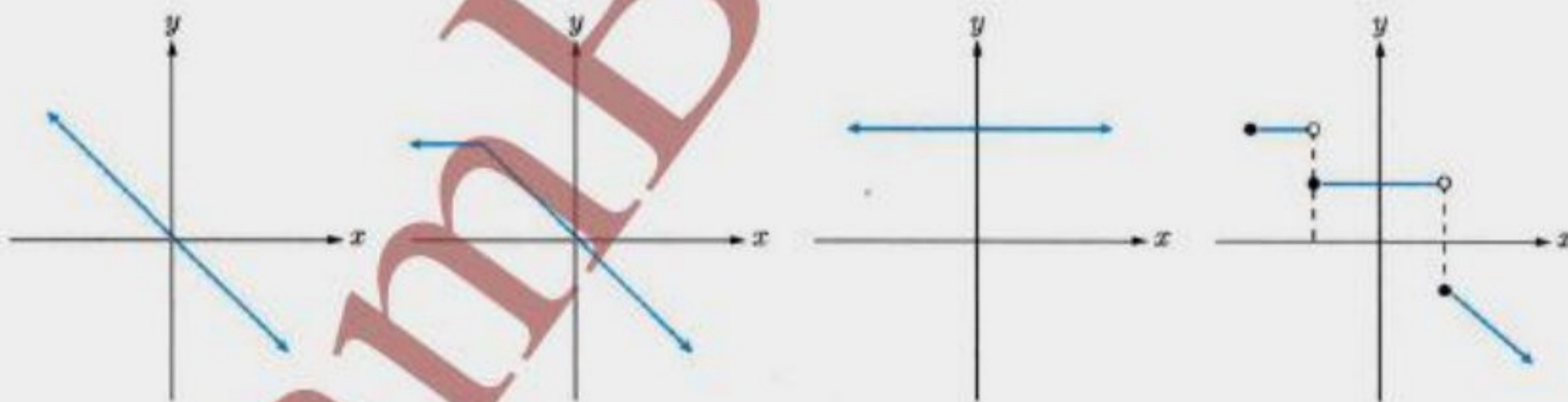
توابع صعودی و توابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه a و b از دامنه تابع f که $a < b$ ، داشته باشیم $f(a) \leq f(b)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم. از آنجائی که معمولاً رفتار تابع را در بازه‌هایی از اعداد حقیقی بررسی می‌کنیم، بنابراین می‌توان گفت:

تابع f را در یک بازه، صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) \leq f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.



تابع f را در یک بازه، نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) \geq f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.

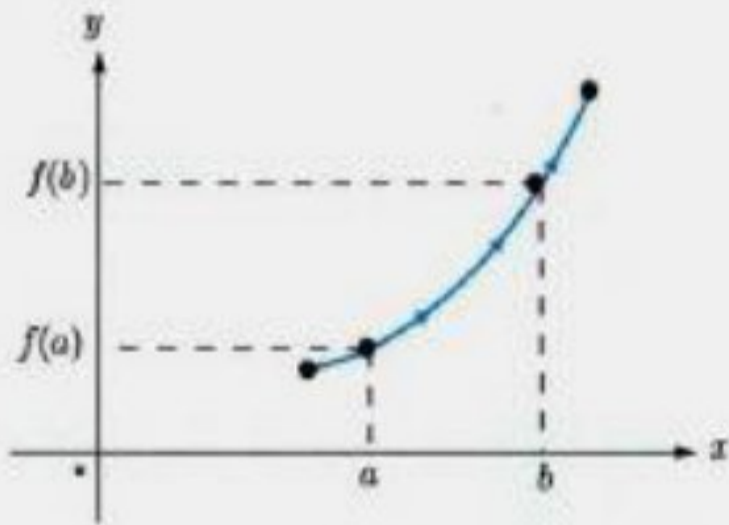


به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گوییم.

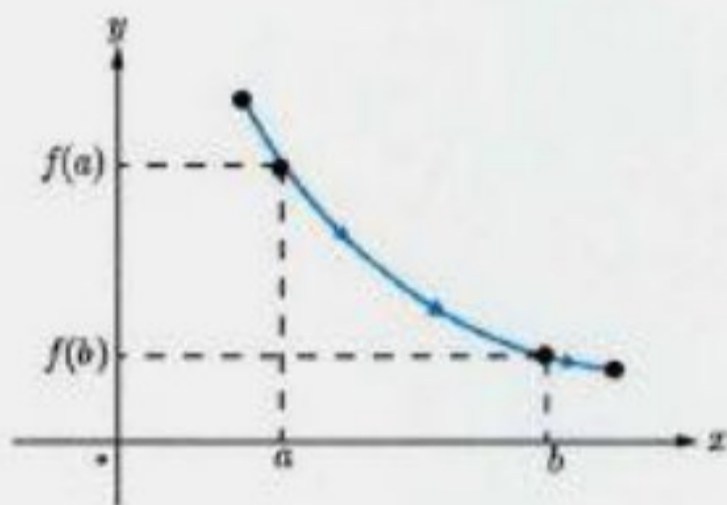
❖ تابع f را در یک بازه، ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار $f(x)$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

تهیه کننده:

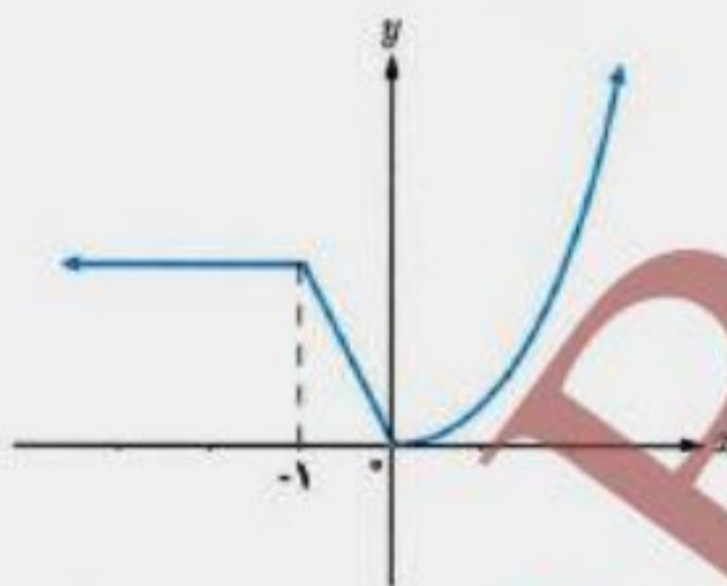
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



الف) تابع اکیداً صعودی



ب) تابع اکیداً نزولی



توابع اکیداً صعودی و توابع اکیداً نزولی

❖ تابع f را در یک بازه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) < f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت. (شکل الف)

❖ تابع f را در یک بازه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) > f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. (شکل ب)

به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکتوا می‌گوییم.

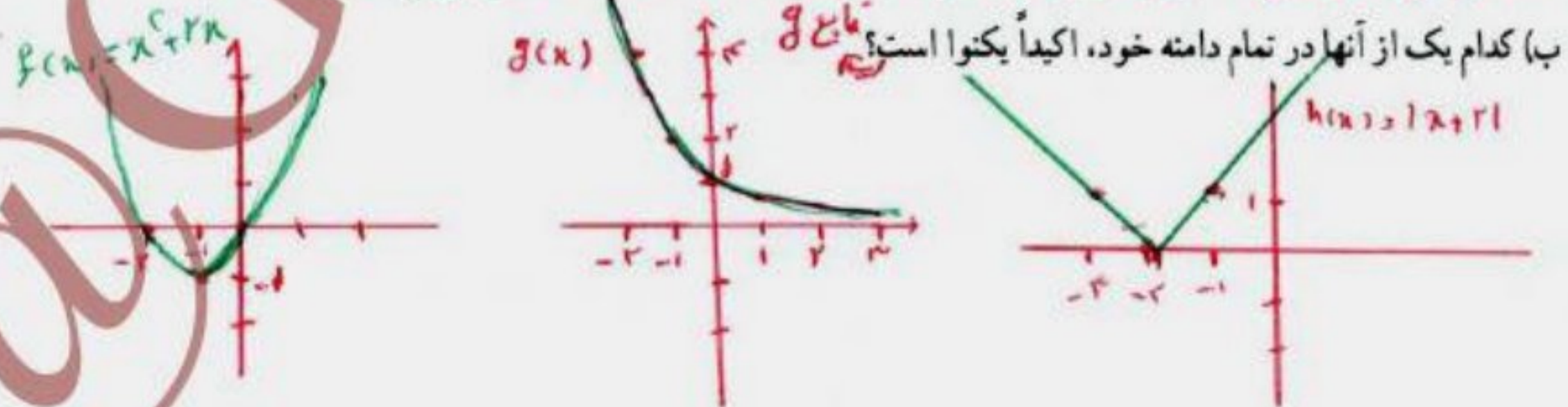
❖ مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty, -1]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-1, 0]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[0, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

کارد کلاس

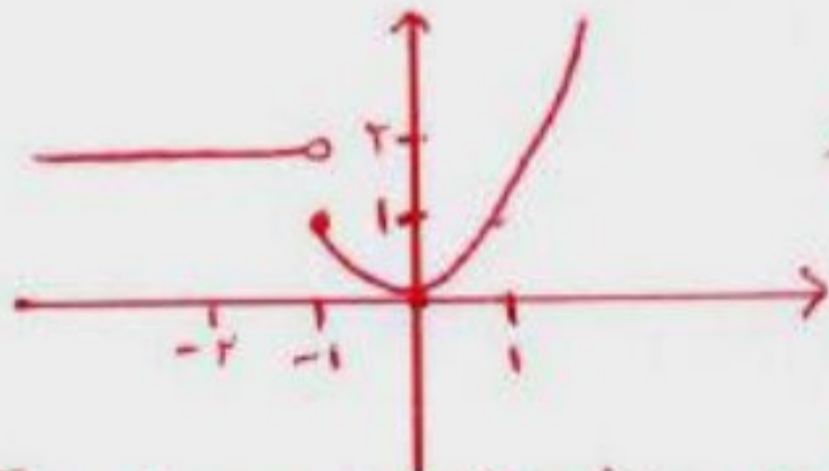
۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه $[-1, -\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $[-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.
 تابع g در بازه $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.
 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 2^{-x}$, $h(x) = |x+2|$

الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟
 تابع h در بازه $[-2, -\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $[-2, +\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.



نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



تابع f در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(-\infty, +\infty)$ صعودی و در بازه $(-\infty, -1)$ نزولی است.

جواب ۳: الف) بله، چون اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد آنگاه برای هر a, b در آن فاصله که $a < b$ آنگاه $f(a) < f(b)$.

ب) واضح است از $f(a) < f(b)$ می‌توان نتیجه گرفت $f(a) < f(b)$ بنابراین تابع f صعودی است. الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید. خیر:

مثال نقض: $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \geq 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$



طبق نمودار تابع f یک تابع صعودی در این فاصله صعودی است؛ شدنی اکیداً صعودی نیست.

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \leq b$.

ب) اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید. (حل قسمت ب) یا این صفحه

الف) اثبات (برهان خلف): فرض $a < b$ بنابراین $b < a$ چون f در این فاصله صعودی است پس طبق تعریف تابع اکیداً صعودی می‌توان نوشت: $f(b) < f(a)$

تقسیم و بخش پذیری

که این خلاف فرض صورت سوال یعنی $f(a) < f(b)$ می‌باشد بنابراین فرض برها خلاف باطل است و $a < b$

فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ و $p(x) = x^2 - 2$ را در نظر می‌گیریم. $f(x)$

الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند. نشان دهید که $q(x) = 2x - 5$ و $r(x) = x - 3$

ب) درستی تساوی $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ را بررسی کنید. $q(x) = x - 3$

$r(x) = 2x - 5$

تفسیر تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد

$q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که: حل قسمت (ب) فعالیت: از طرف راست طرف

$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ $p(x) \cdot q(x) + r(x) = (x^2 - 2)(x - 3) + 2x - 5 = x^3 - 3x^2 + 1 = f(x)$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x) = 0$ باشد، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش پذیر است.

حل قسمت (ب) کاربرد کلاس بالا: می‌دانیم تابع f اکیداً صعودی است

صعودی می‌باشد بنابراین به کمک قسمت الف می‌توان نوشت:

$x + 1 \leq 2x - 3 \Rightarrow -x \leq -4 \Rightarrow x \geq 4$ (عددی) $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ (قسمت الف)

کاردرکلاس

اگر $f(x) = x^2 - 16$ و $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

$$f(x) = x^2 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = \underbrace{(x^2 + 4)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(x - 2)(x + 2)}_{p(x)} + 0$$

چون $r(x) = 0$ بنابراین $x^2 - 16$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.

فعالیت

در تقسیم $f(x) = x^2 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ و $q(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است. *درجه باقی مانده همیشه از درجه مقوم عدد کمتر است و چون درجه $p(x)$ یک است پس $r(x)$ درجه صفر است.*

$$f(x) = (2x - 1)q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله‌ای $p(x) = 2x - 1$ را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{1}{2})$. به طور کلی می‌توان گفت:

$$p(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(\frac{1}{2}) = (2(\frac{1}{2}) - 1) \cdot q(\frac{1}{2}) + r(\frac{1}{2}) = 0 \cdot q(\frac{1}{2}) + r(\frac{1}{2}) = r(\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow r(x) = f(\frac{1}{2})$$

نظریه: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

کاردرکلاس

۱ باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^2 + x - 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.

$$r(x) = f(\frac{-b}{a}) = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{21}{4}$$

۲ اگر چند جمله‌ای $x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید. چون $f(x) = x^2 + ax - 2$ بر $x - a$ بخش پذیر است بنابراین:

$$r(x) = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow a^2 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 0$$

$$2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تهیه کننده:

$$\begin{array}{r}
 x^k - a^k \quad | \quad x - a \\
 -x^k + ax^{k-1} \\
 \hline
 ax^{k-1} - a^k \\
 -ax^{k-1} + a^2x^{k-2} \\
 \hline
 a^2x^{k-2} - a^k \\
 -a^2x^{k-2} + a^3x^{k-3} \\
 \hline
 \dots \\
 a^{k-1}x - a^k \\
 -a^{k-1}x + a^k \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

حل سوال ۱ فعالیت:

از تقسیم انجام شده نتیجه بگیریم $\Rightarrow x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + a^2x^{k-3} + \dots + a^{k-2}x + a^{k-1})$

فعالیت

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل آشنا هستید.

$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ و $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

از تقسیم $x^3 - a^3$ بر $x-a$ نشان دهید که:

$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

آیا $x^n - a^n$ بر $x-a$ بخش پذیر است؟ بده چون: اگر $f(x) = x^n - a^n$ باشد داریم: $r(x) = f(a) = a^n - a^n = 0$

بنابراین: $r(x) = a^n - a^n = 0$

از تقسیم $x^n - a^n$ بر $x-a$ نشان دهید که $x^n - a^n$ به صورت زیر تجزیه می‌شود.

جواب فعالیت ۲

$$\begin{array}{r}
 x^n - a^n \quad | \quad x - a \\
 -x^n + ax^{n-1} \\
 \hline
 ax^{n-1} - a^n \\
 -ax^{n-1} + a^2x^{n-2} \\
 \hline
 a^2x^{n-2} - a^n \\
 -a^2x^{n-2} + a^3x^{n-3} \\
 \hline
 \dots \\
 a^{n-1}x - a^n \\
 -a^{n-1}x + a^n \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

از تقسیم نتیجه برآورد $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$

جواب فعالیت ۴

کاربرد: $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
 $x^6 - 64 = x^6 - 2^6 = (x-2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$

در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$

اگر n فرد باشد در فعالیت بالا a را $-a$ قرار دهید. به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.

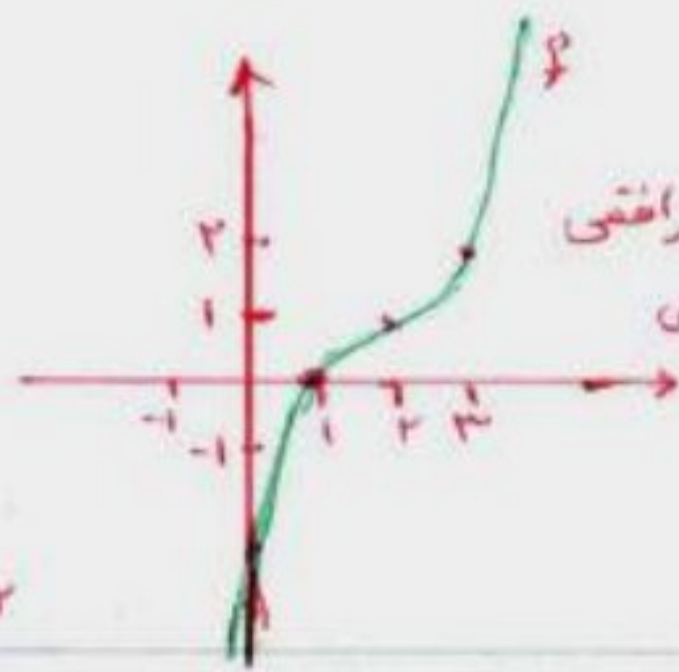
از تقسیم نتیجه برآورد: $x^n - (-a)^n = (x - (-a))(x^{n-1} + (-a)x^{n-2} + (-a)^2x^{n-3} + \dots + (-a)^{n-2}x + (-a)^{n-1})$
 $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$

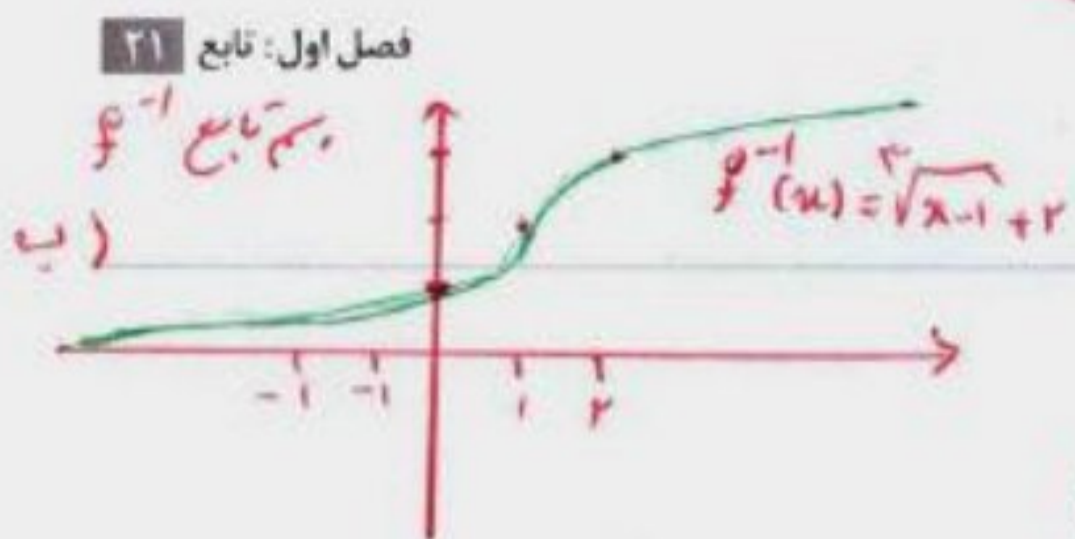
به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^4 - 16$ را طوری تجزیه کنید که $x+2$ یک عامل آن باشد.

در فعالیت بالا اگر n زوج باشد با تبدیل a به $-a$ داریم:

مثلاً: $x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$
 $x^4 - (-2)^4 = (x - (-2))(x^3 + (-2)x^2 + (-2)^2x + (-2)^3)$
 $x^4 - 16 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$



(الف) حل تمرین ۱



تمرین

۱ تابع $f(x) = (x-2)^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

(الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید. بالا

(ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. تابع f و f^{-1} یکدیگر را برعکس می‌کنند

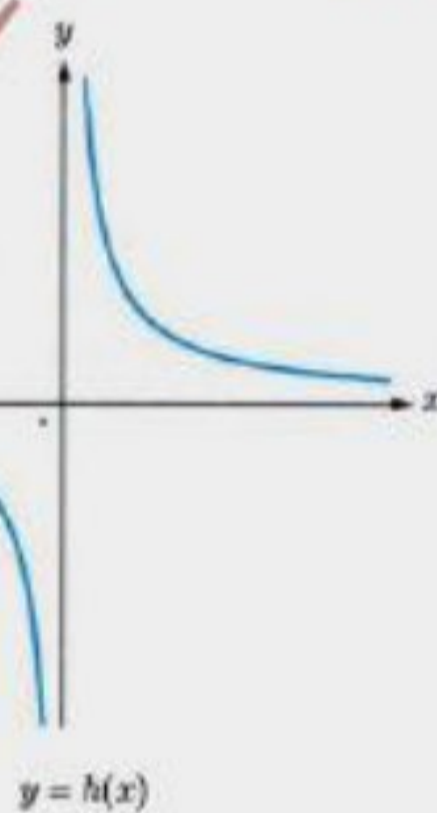
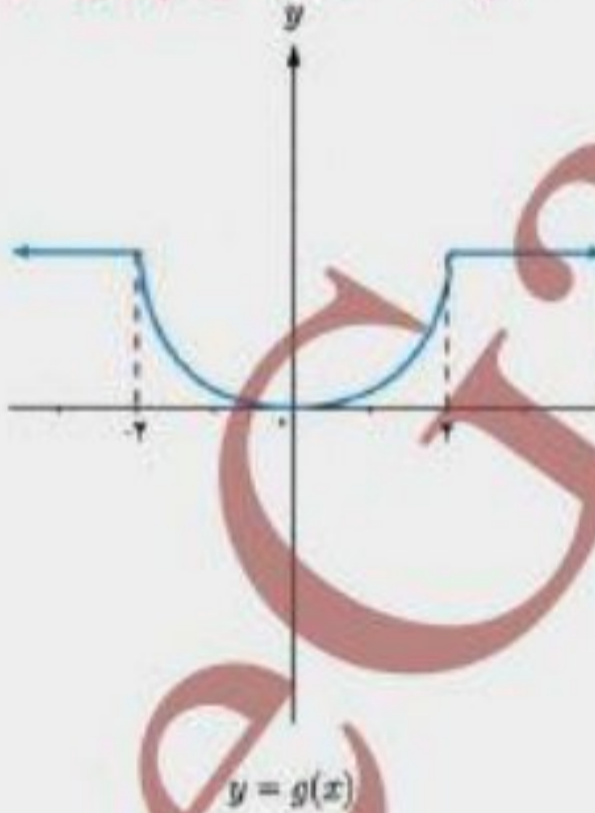
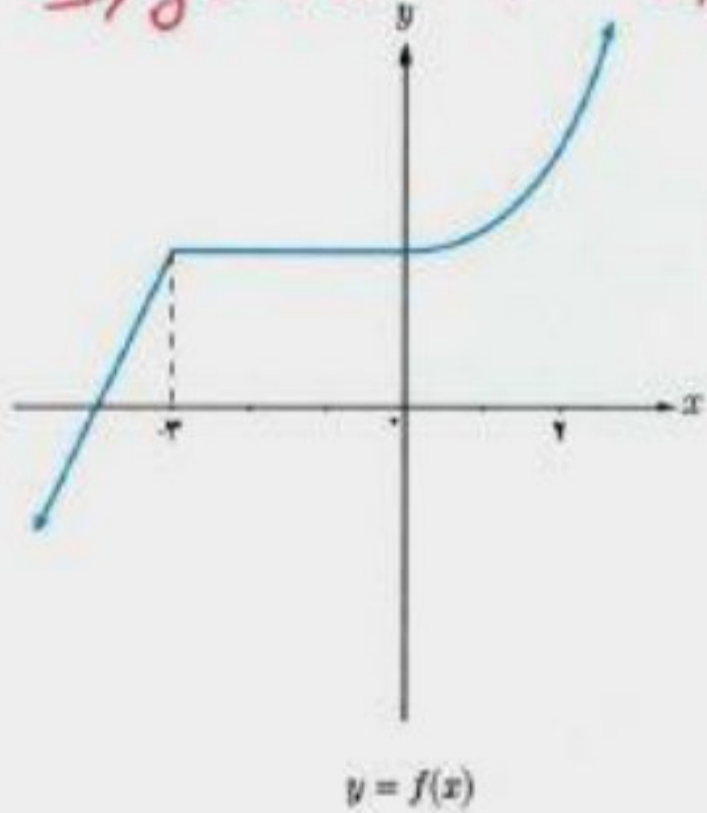
(پ) ضابطه f^{-1} را به دست آورید.

چون هر خط موازی محور x ها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

(ب) $y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow (x-2)^2 = y-1 \Rightarrow x-2 = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 2$

نمودار توابع f ، g و h در زیر رسم شده‌اند.

$\Rightarrow y = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$

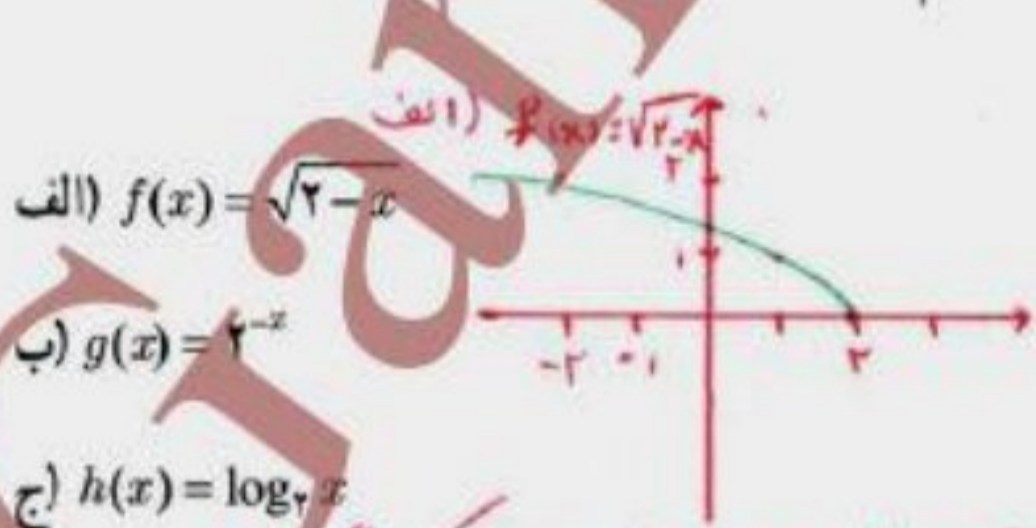


(الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟ تابع f در بازه‌های $(-\infty, -3]$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-3, 0)$ متناقص است.

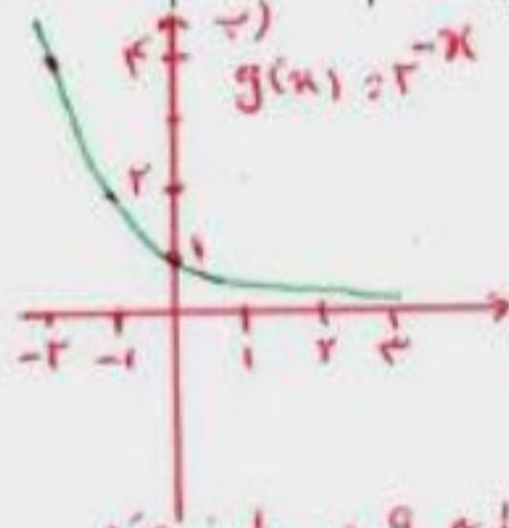
(ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟ تابع g در بازه $[0, 2]$ اکیداً نزولی و در بازه $(2, +\infty)$ متناقص است.

(پ) تابع h در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

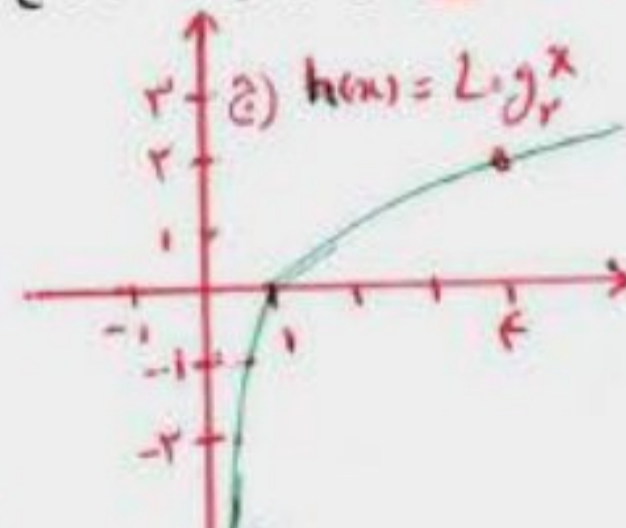
۲ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکپوش است؟



تابع f در دامنه خود اکیداً نزولی است بنابراین تابع f در دامنه خود اکیداً یکپوش است.



تابع g در دامنه خود اکیداً نزولی است بنابراین تابع g در دامنه خود اکیداً یکپوش است.



تابع h در دامنه خود اکیداً صعودی است بنابراین تابع h در دامنه خود اکیداً یکپوش است.

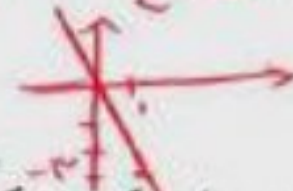
تهیه کننده:

حل مسأله دوم سوال ۵: ضمیمه: آر f و g روی یک فاصله اکیدا صعودی باشند؛ ادامه حل ۵:

همین توان گفت همواره $f-g$ نیز اکیدا صعودی است. مثال نقض: توابع $f(x) = 2x+4$ و $g(x) = 5x+4$ روی دامنه خود اکیدا صعودی هستند و می:

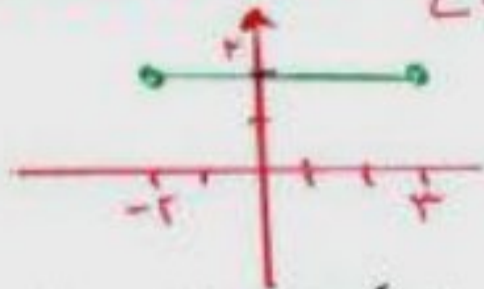
$$(f-g)(x) = 2x+4 - (5x+4) = -3x$$

که یک تابع اکیدا نزولی است!



II

آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد؟ بله. مثال تابع $f(x) = 2$ در فاصله $[2, 4]$ هم صعودی است و هم نزولی



حل مسأله دوم سوال ۵: اگر توابع f و g در یک فاصله اکیدا صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیدا صعودی است. برای

مربا $f-g$ که چه می توان گفت؟ حل مسأله اول سوال ۵: تابع f روی فاصله I اکیدا صعودی است

$$\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \quad \text{جمع} \quad f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$$

$$\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) < g(b) \quad \text{صعودی است}$$

بنابراین $f+g$ نیز اکیدا صعودی است (اینه روی فاصله I)
 اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x-2$ برابر با ۴ باشد، k را تعیین کنید.

$$r(x) = 4 \Rightarrow r(x) = f(2) = 4 \Rightarrow 2^3 + k(2)^2 + 2 = 4 \Rightarrow 4k = 4 - 10 = -6$$

$$\Rightarrow k = \frac{-6}{4} \Rightarrow \boxed{k = -\frac{3}{2}}$$

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد.

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \\ r(x) = f(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + a(2)^2 + b(2) + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \\ r(x) = f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{9}{2}}, \quad a - b = 0 \Rightarrow -\frac{9}{2} - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{9}{2}}$$

هر یک از چند جمله ای های زیر را بر حسب عامل های خواسته شده تجزیه کنید.

(الف) $x^4 - 1 = x^4 - 1^4 = (x-1)(x^3 + 1x^2 + 1x + 1)$ $x-1$ با عامل $x^3 - 1$ با عامل $x+1$

(ب) $x^4 - 1 = x^4 - 1^4 = (x+1)(x^3 - 1x^2 + 1x - 1)$ $x+1$ با عامل $x^3 + 32$ با عامل $x+2$

(ج) $x^4 + 32 = (x^3 + 32) = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$

(الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیدا نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \geq b$.

(ب) اگر $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2}$ ، حدود x را به دست آورید. حل مسأله الف سوال ۵: اثبات برهان خلف: فرض

$a < b$ بنا بر این $a < b$ باشد از فرض چون f روی فاصله مدعا اکیدا نزولی است بنابراین

برای هر a و b عضو این فاصله $a < b$ نتیجه می شود $f(a) > f(b)$ و این خلاف

فرض $f(a) \leq f(b)$ موجود در صورت سوال می باشد. از این تناقض نتیجه می شود

فرض برهان خلف باطل است و $a \geq b$ می باشد.

حل مسأله ب سوال ۹: می دانیم در تابع نمایی $f(x) = a^x$ ، آر $a < 1$ باشد این تابع اکیدا نزولی

است بنابراین طبق مسأله اول همین نتیجه داریم: $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2} \Rightarrow 3x-2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \frac{5}{6}$

تهیه کننده:

مثلثات

- ۱. تقاب و تازانت
- ۲. معادلات مثلثاتی

فصل

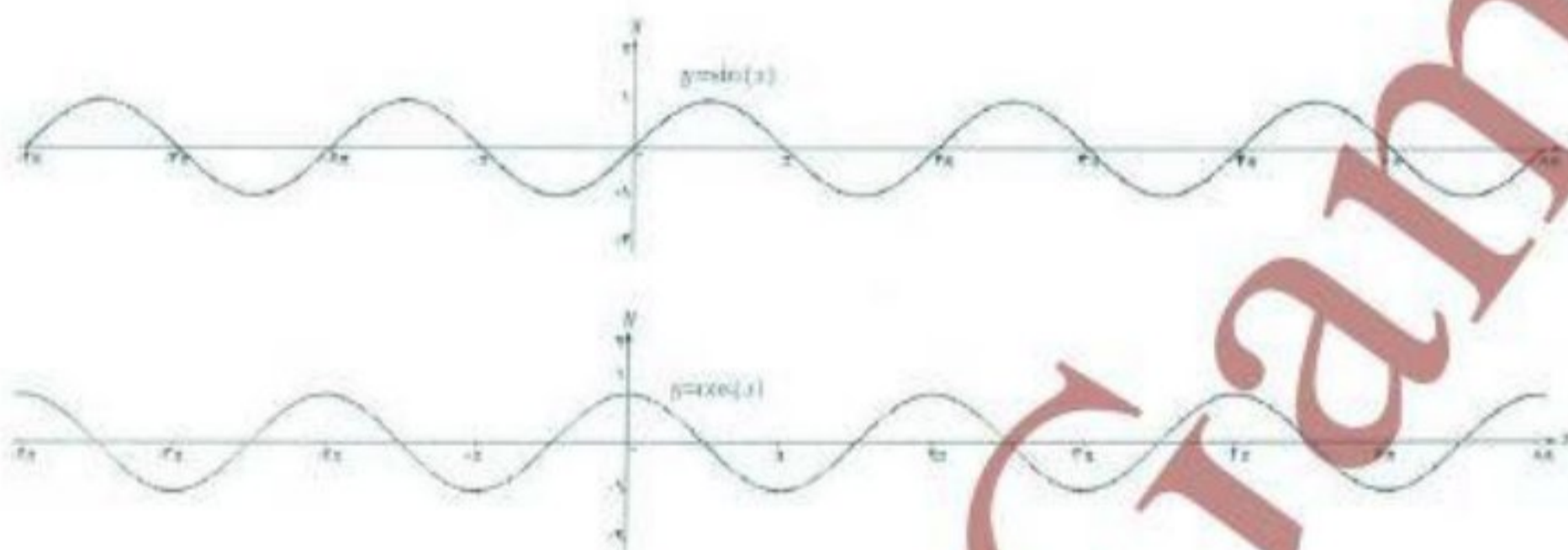


انقباض رگها در بدن انسان به گونه ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه سازی کامپیوتری از شبکه رگها این خاصیت مورد توجه قرار می گیرد.

تناوب و تانژانت

درس ۱

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است ($\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$) به عبارتی اگر نکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این نکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π ، 4π ، 6π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف:

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

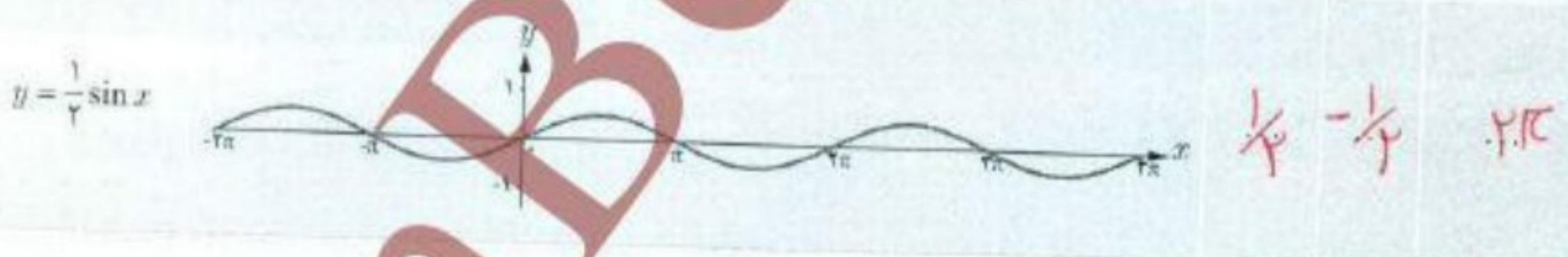
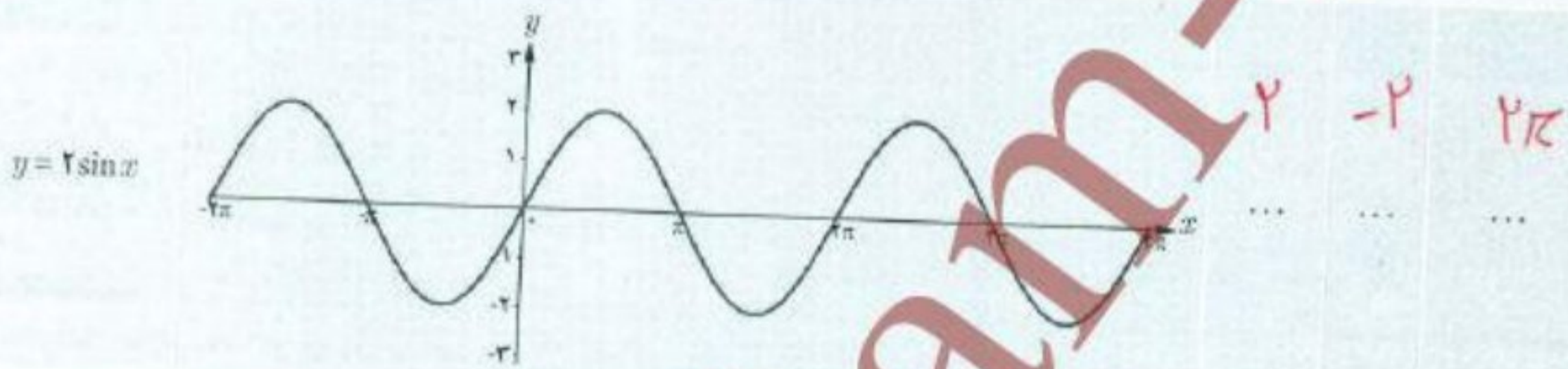
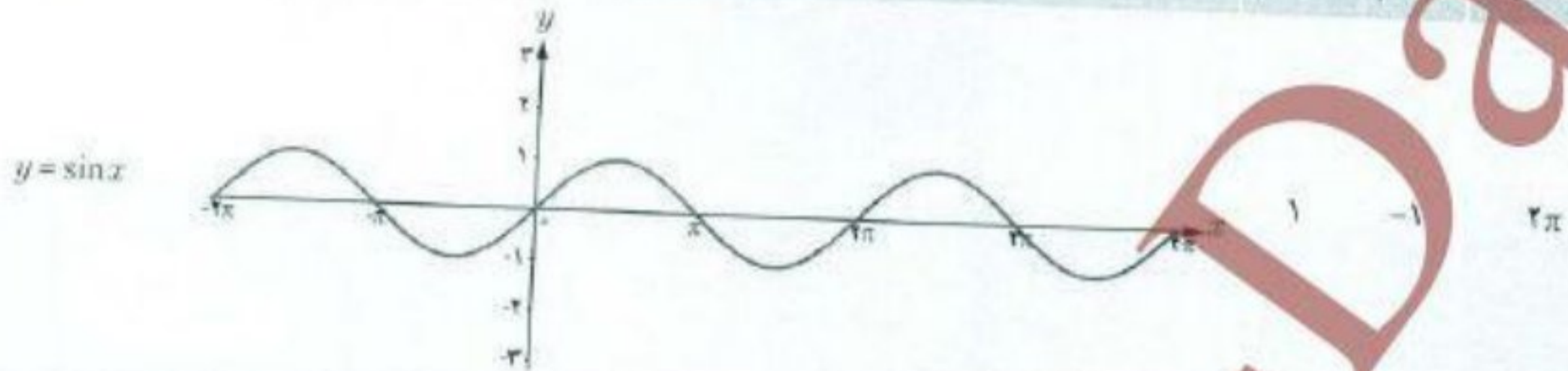
۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب 1 و -1 است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۲۵

تابع	نمودار تابع	دوره تناوب	مینیم	ماکزیم
------	-------------	------------	-------	--------



با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

اگر $a > 0$ دوره تناوب 2π و ماکزیم a و مینیم $-a$

با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیم و مینیم توابع $y = a \cos x$ و

$y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-a \leq a \sin x \leq a$$

$$-a + c \leq a \sin x + c \leq a + c$$

$$-a + c \leq y \leq a + c$$

↓
MIN

↓
MAX

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-a \leq a \cos x \leq a$$

$$-a + c \leq a \cos x + c \leq a + c$$

$$-a + c \leq y \leq a + c$$

↓
MIN

↓
MAX

با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

تابع	نمودار تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره تناوب
$y = \sin x$		۱	-۱	2π
$y = \sin 2x$		۱	-۱	π
$y = \sin(-2x)$		۱	-۱	$\frac{2\pi}{2}$
$y = \sin \frac{x}{2}$		۱	-۱	4π
$y = \sin(-\frac{x}{4})$		۱	-۱	4π



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

مشکلات ۲۷

۱۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

۱۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

$$-1 \leq \sin bx \leq 1$$

$$-1+c \leq \sin bx + c \leq 1+c$$

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x + c$ و $y = a \sin x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضرب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضرب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$

ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

حل:

الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

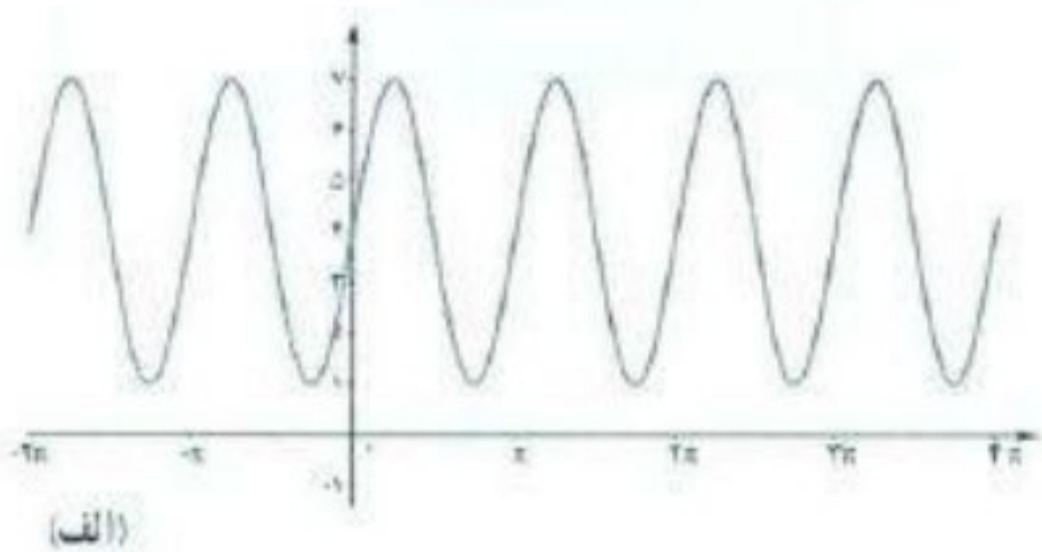
ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

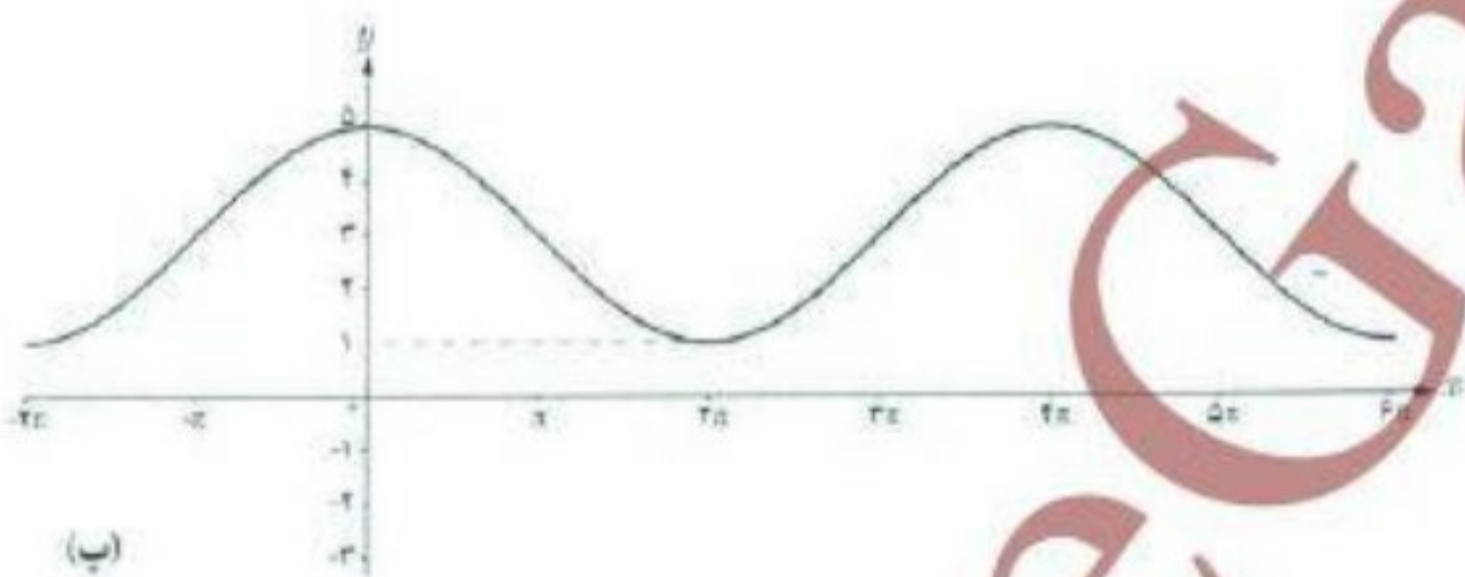
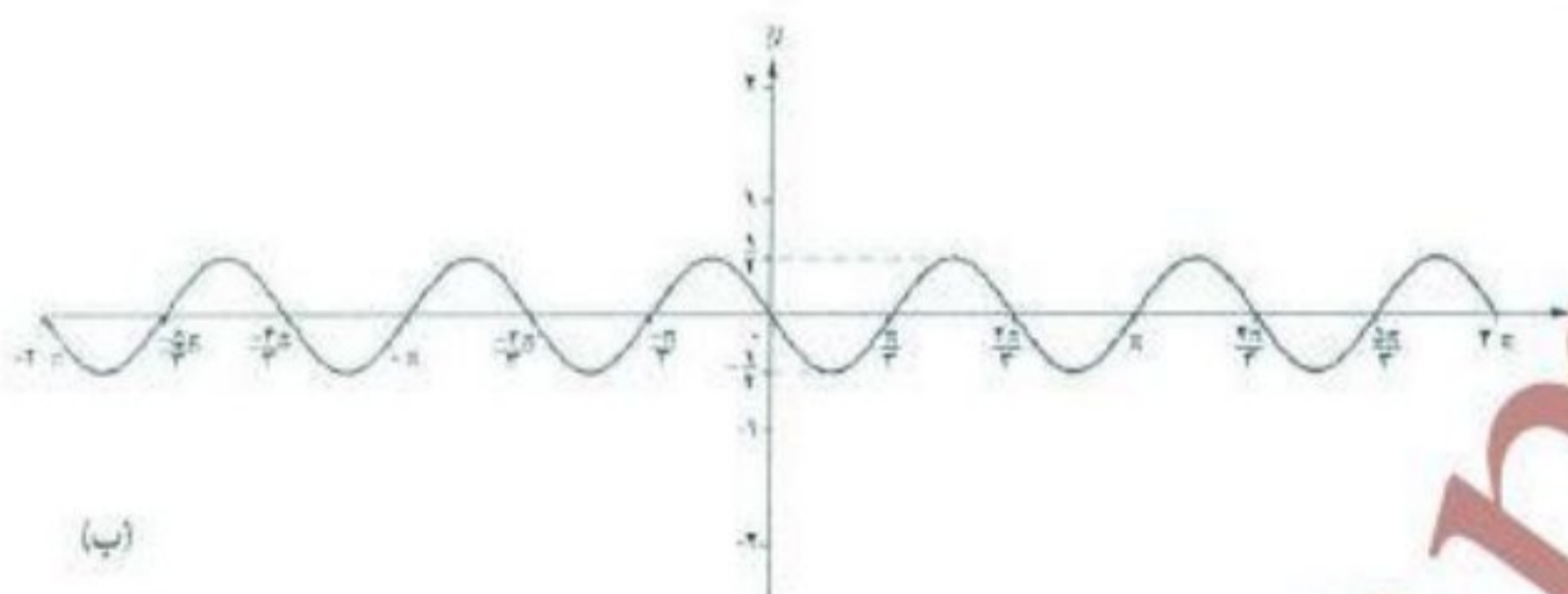
ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۸



مثال: هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. یادفت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



حل:

الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.
از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

20

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

م: مثلثات ۲۹

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{4}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

$$y = -\frac{1}{4} \sin 3x$$

بنابراین داریم:

ب) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ که در آن علامت a مثبت و علامت b منفی است. لذا $a = 2$ و $b = -\frac{1}{4}$ و بنابراین داریم $y = 2 \cos(-\frac{x}{4}) + 3$.

ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم:

$$y = -2 \cos x$$

تابع تانژانت

فعالیت

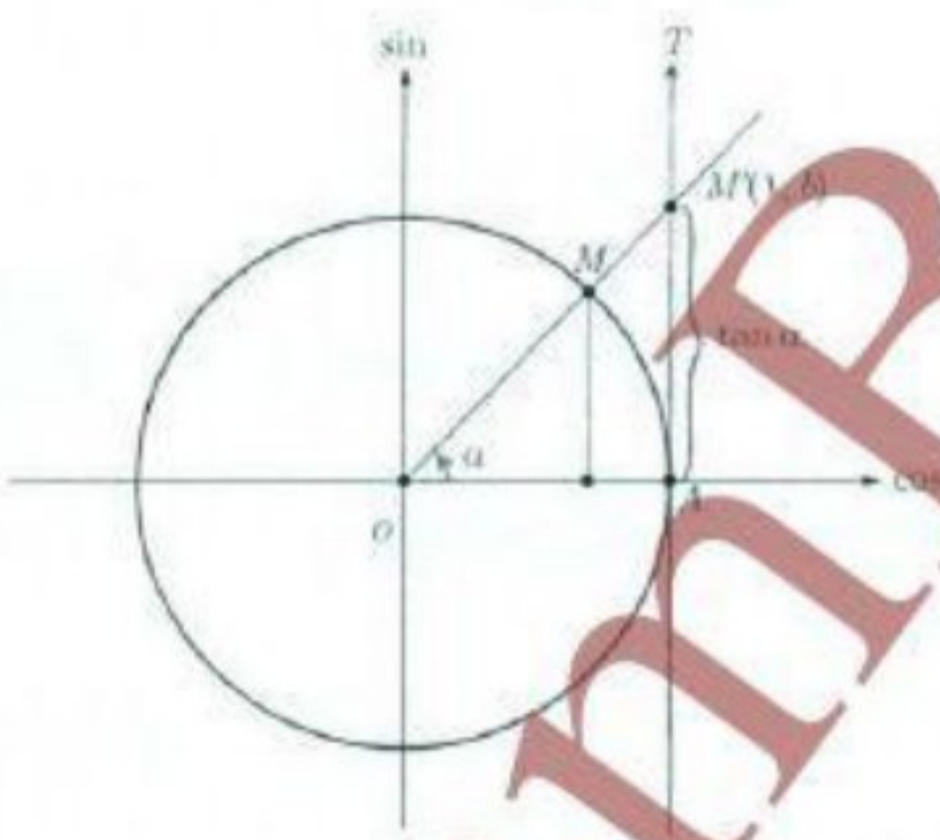
در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و باره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟
پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



چون تانژانت زوایای ربع دوم و سوم و چهارم منفی است پس محور تانژانت را سمت مثبت محور تانژانت را قطع می‌کنند و تانژانت زوایای ربع دوم و سوم و چهارم قرار دارند مقدار $\tan \frac{3\pi}{4}$ منفی است پس محور تانژانت را قطع می‌کنند

چون برای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ خط OM موازی محور تانژانت است پس شعرو آن را قطع می‌کنند در همان نقطه مشخصی از محور حقیقی را به کمان تانژانت آن‌ها در نظر گرفت



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۰

تغییرات تانژانت

فعالیت

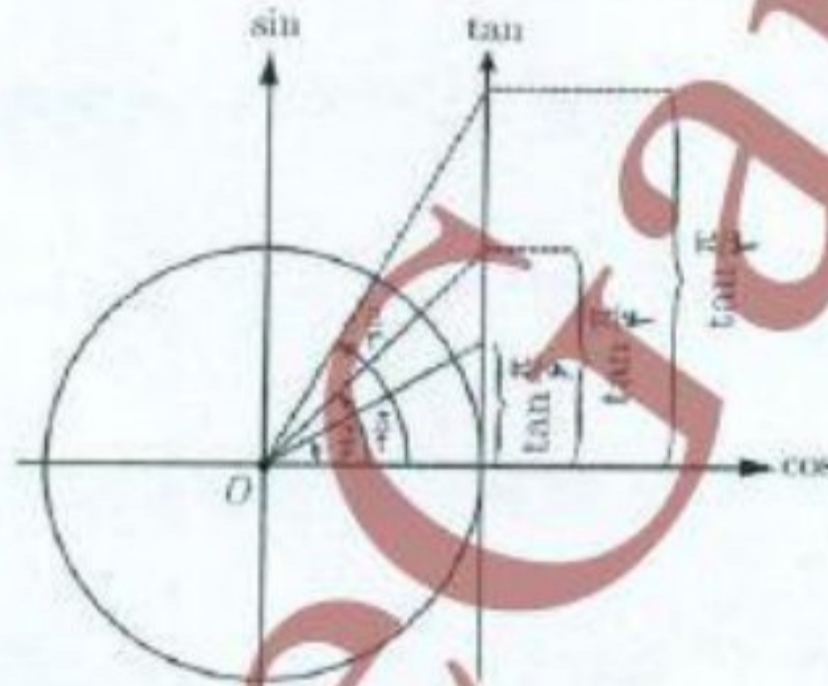
با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می کنیم. اگر $\alpha = 0$ مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می یابد؟ **بی نهایت (توضیح در رساله اولاد صحتی یا در ساقط اولاد صحتی بی نهایت تعریف نشده است)**

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می توان زاویه ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$. **به اندازه α روی محور تانژانت ها جدول کنیم و مرکز O وصل می کنیم**



$$\tan \alpha = \frac{a}{1} = a$$



کارد کلاسی

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

تا $+\infty$ افزایشی
تا $-\infty$ کاهشی
تا $+\infty$ افزایشی
تا $-\infty$ کاهشی

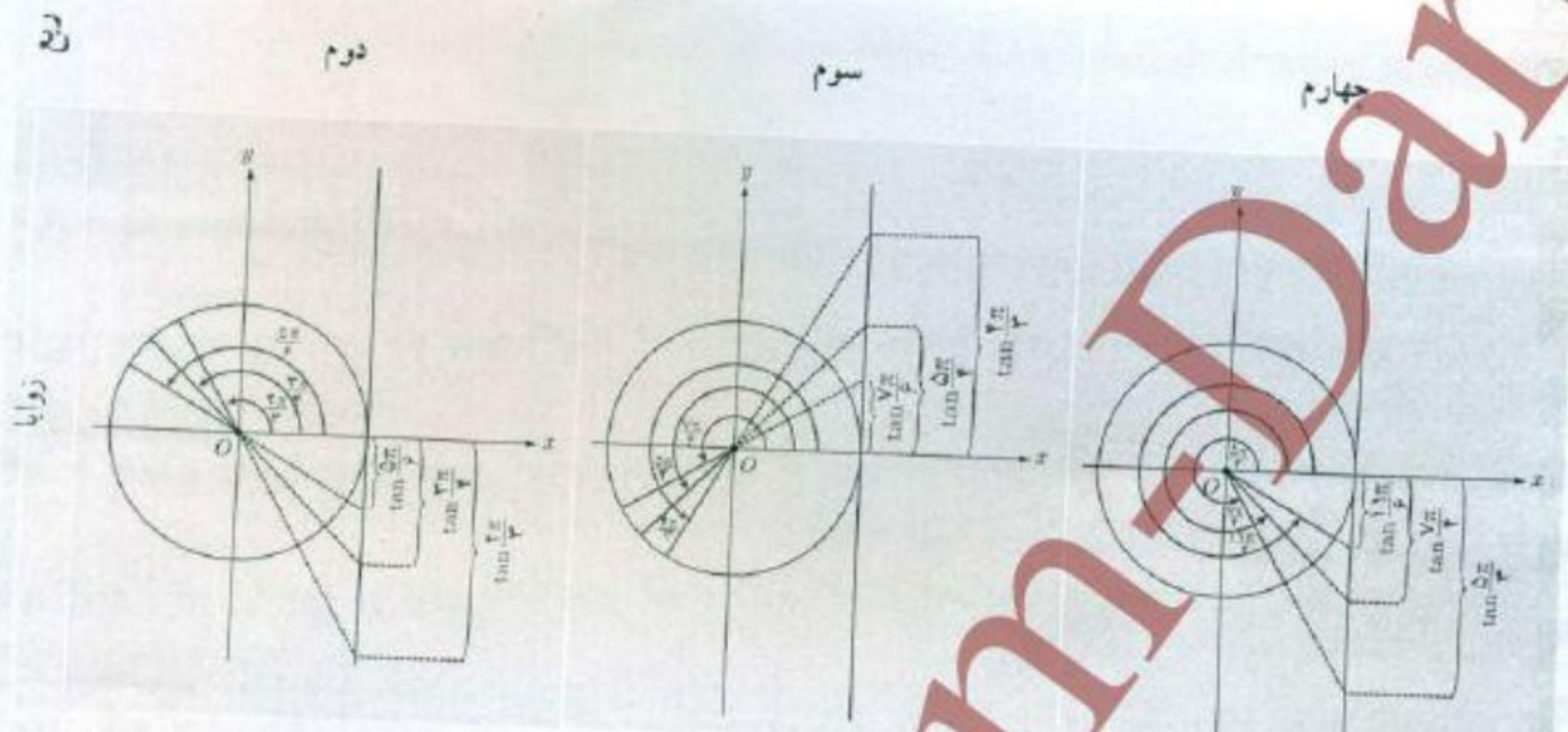
ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

در ربع اول تغییرات تانژانت از 0 تا $+\infty$ افزایشی
در ربع دوم تغییرات تانژانت از $-\infty$ تا 0 افزایشی
در ربع سوم تغییرات تانژانت از 0 تا $+\infty$ افزایشی
در ربع چهارم تغییرات تانژانت از $-\infty$ تا 0 افزایشی

©

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

صفحات ۳۱



افزایشی یا کاهش	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازه تغییرات	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$

ب) جدول زیر را کامل کنید. (علامت \uparrow به معنی افزایش یافتن و علامت \downarrow به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول			ربع دوم			ربع سوم			ربع چهارم					
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0



تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$, تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است. زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

کاردرکلاس

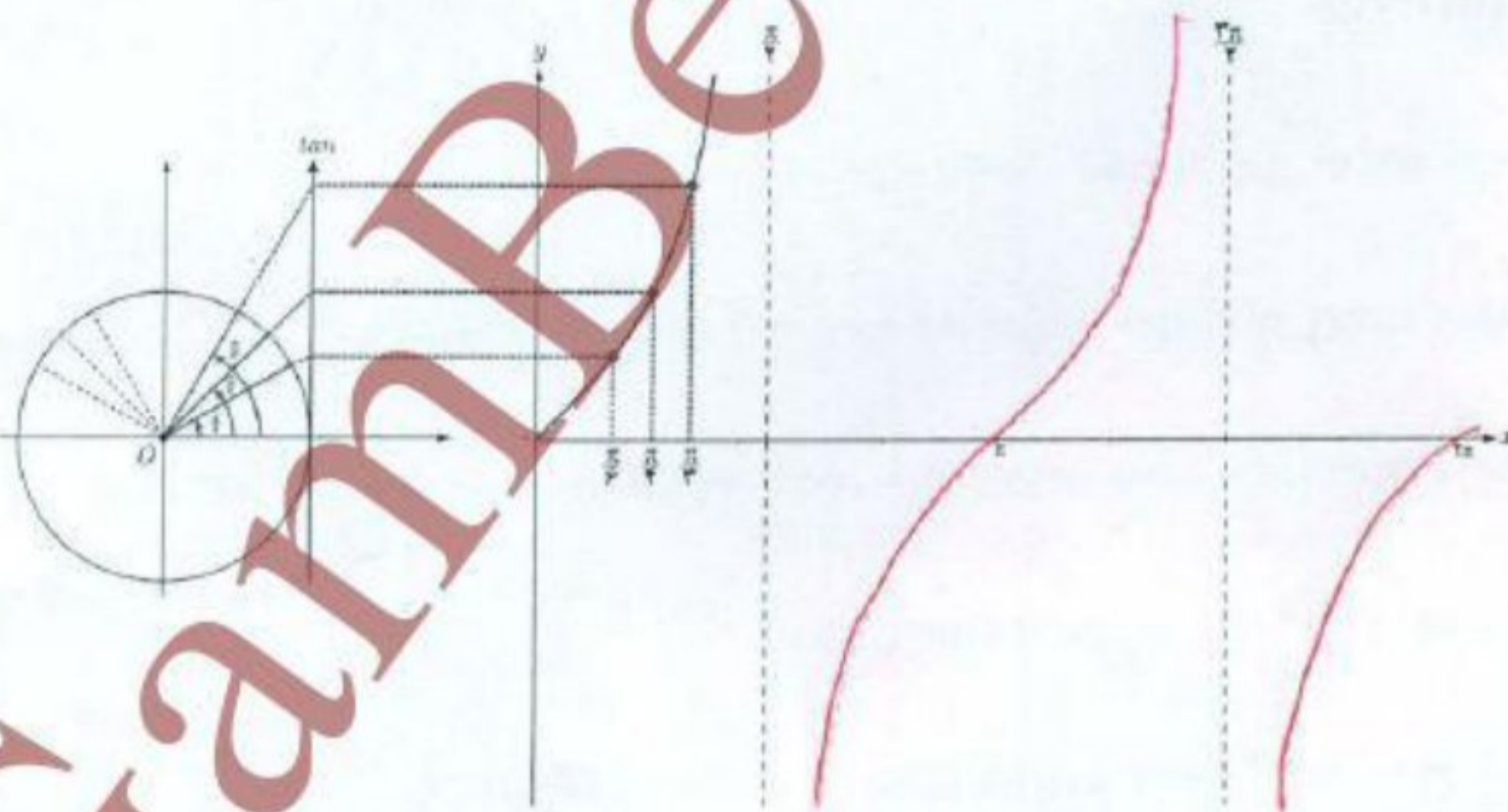
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ صعودی
 در بازه $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ صعودی
 در بازه $(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ صعودی

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب تابع شامل \tan مدنظر نیست.



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

تاریخ

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 7x$

$T = \frac{2\pi}{7}$

۳: ماکزیمم

-۱: مینیمم

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

$T = 4$

$\sqrt{3} + 1$: ماکزیمم

$1 - \sqrt{3}$: مینیمم

پ) $y = -\pi \sin \frac{1}{4}(x - 2)$

$T = 4\pi$

π : ماکزیمم

$-\pi$: مینیمم

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

$T = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{3}{4}$: ماکزیمم

$-\frac{3}{4}$: مینیمم

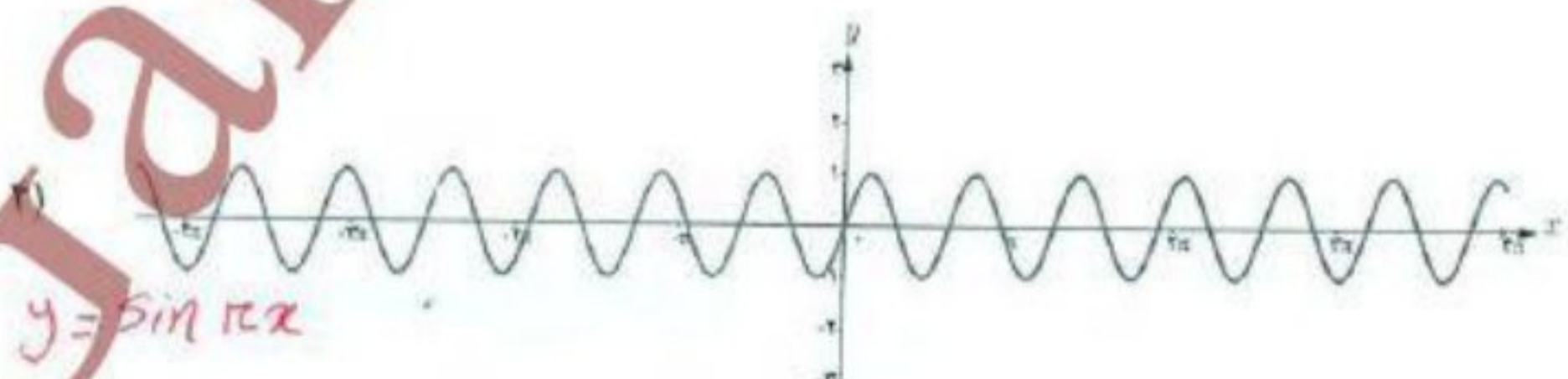
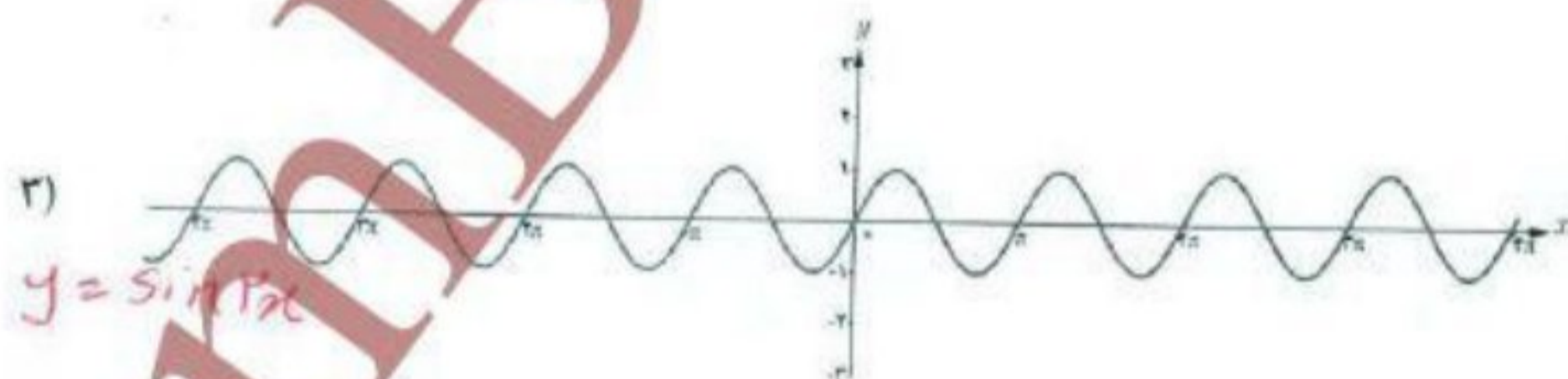
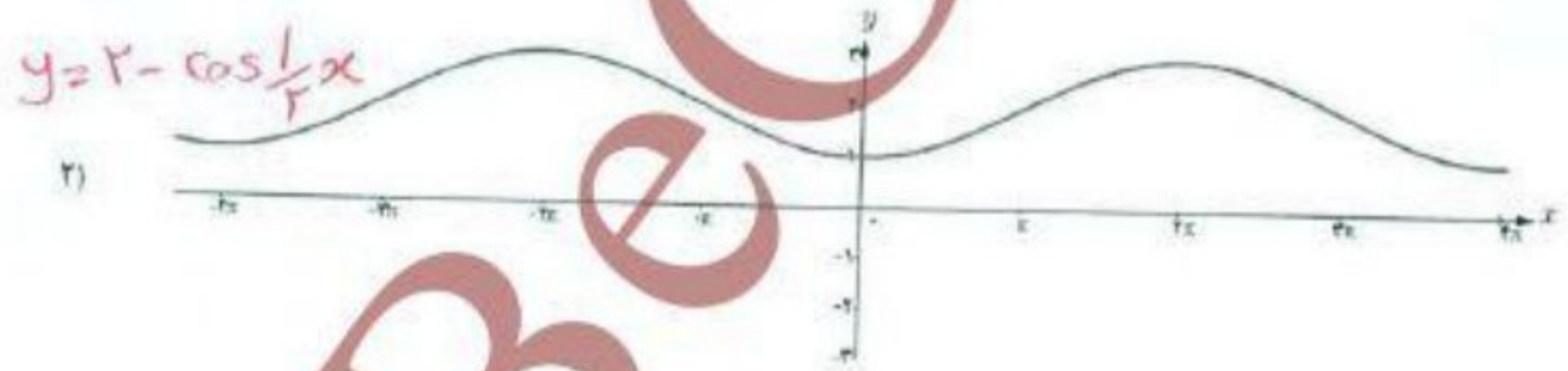
هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ت) $y = 1 - \cos 2x$

ب) $y = \sin 2x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4} x$

الف) $y = \sin \pi x$



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۳۴

۴ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi$, $\max = 2$, $\min = -2$

$y = 2 \sin 2u$

ب) $T = 2$, $\max = 4$, $\min = 2$

$y = -4 \sin \frac{2\pi}{3} u + 2$

ب) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

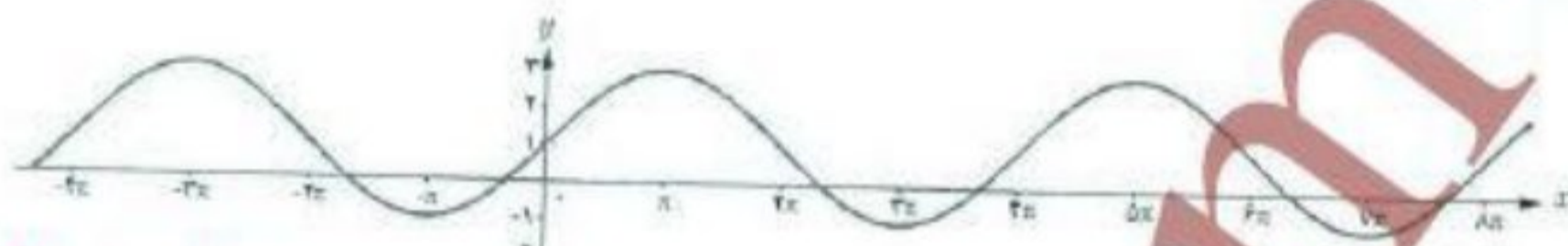
$y = -2 \sin \frac{1}{4} u - 4$

ت) $T = \frac{\pi}{2}$, $\max = 1$, $\min = -1$

$y = \cos 2u$

۵ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



$y = 2 \sin \frac{1}{2} (u + c) + 1$

ب)



$y = -3 \cos \pi x - 1$

۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تنازانت در دامنه اش صعودی است. **نادرست**

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تنازانت در آن نزولی باشد. **نادرست**

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تنازانت در آن غیر صعودی باشد. **درست**

ت) تابع تنازانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تنازانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\tan \alpha$	1	-1	$-\infty$	1	0

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	1	$+$	$+$	0

در ربع اول $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هر دو صعودی هستند

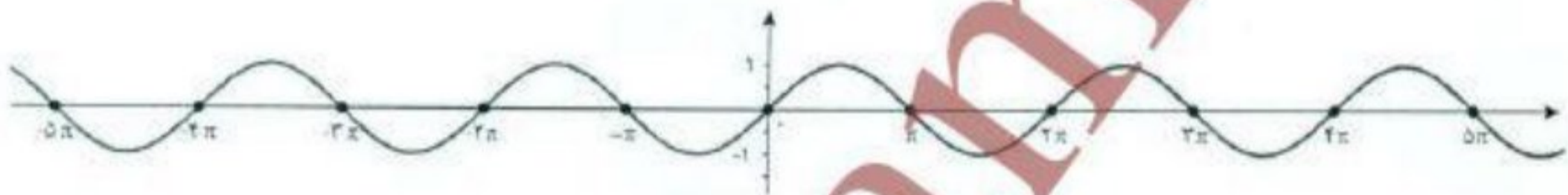
در ربع چهارم نیز $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هر دو صعودی هستند



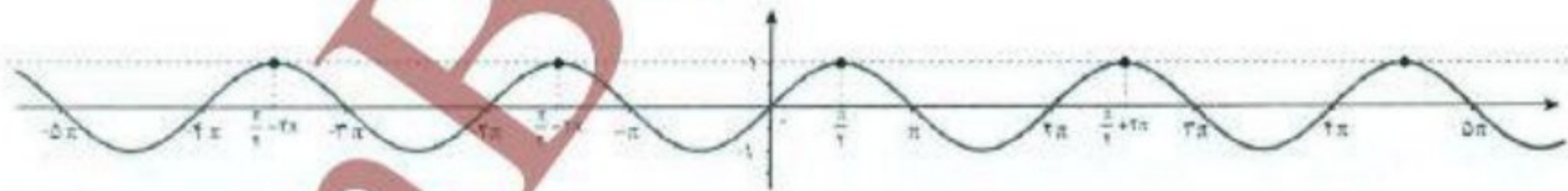
معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.
 مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشند. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $x = \dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است.
 این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
 به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود.
 این مقادیر محل تقاطع $y = \sin x$ و $y = 1$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

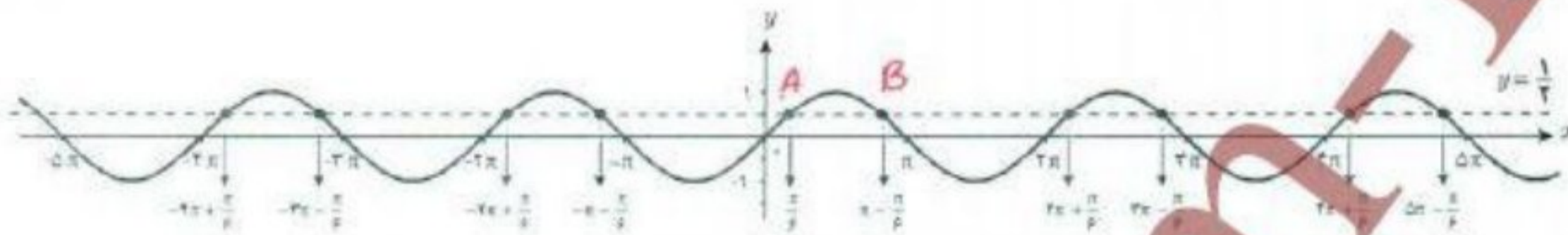
می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.



چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید. $\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ **بله**



مکانی با اینغ های یافت شد از آن ها ساده برقرار می باشد

طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{1}{4}$ و $y = \sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

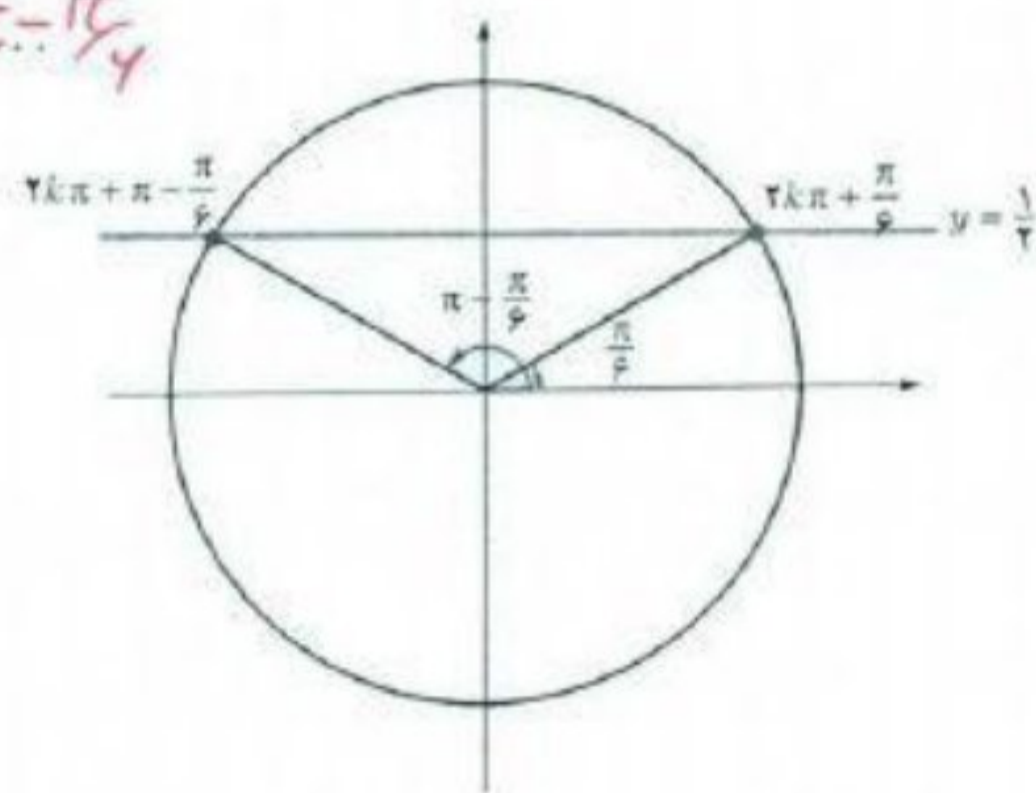
$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$
 $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$

$\sin(-\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{4}$

در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \dots$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \dots$



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۲۷

برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را

ببینیم. با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\sin \alpha = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کارد کلاس

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

ب) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

$$2\sin \alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \alpha = \sin 60^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2\sin \alpha + \sqrt{3} = 0$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

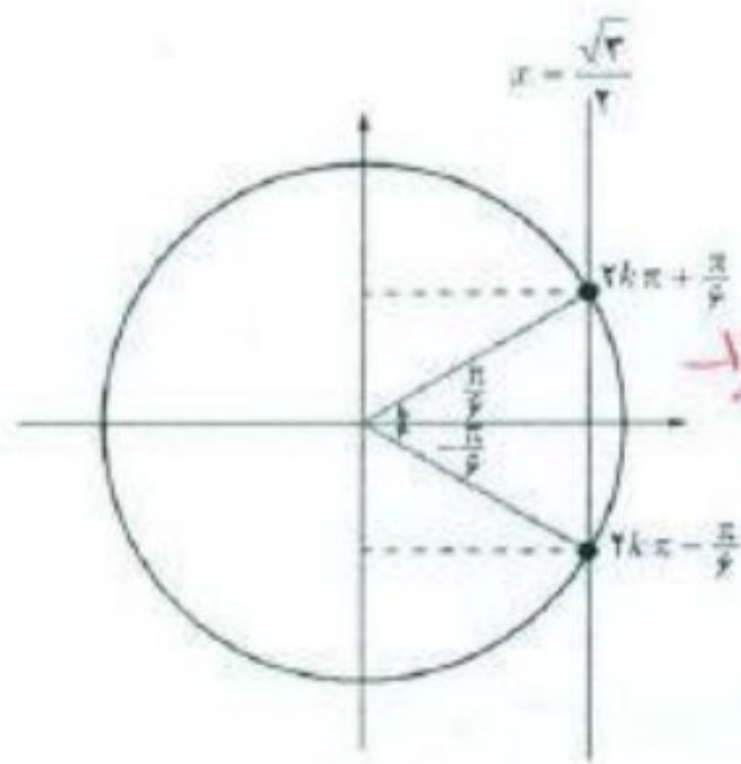
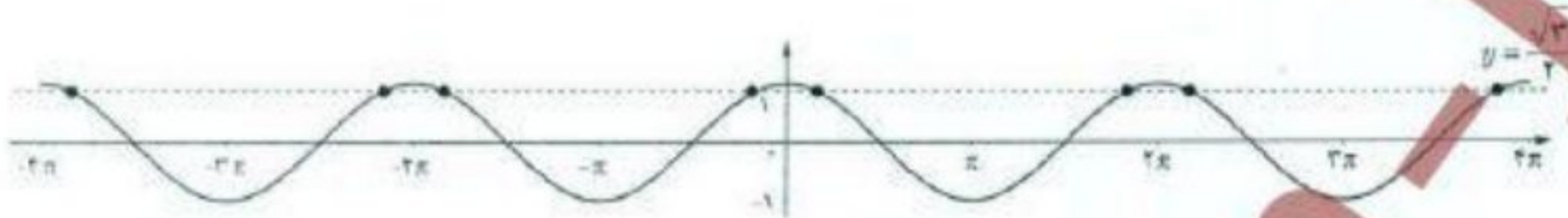
$$\sin \alpha = \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

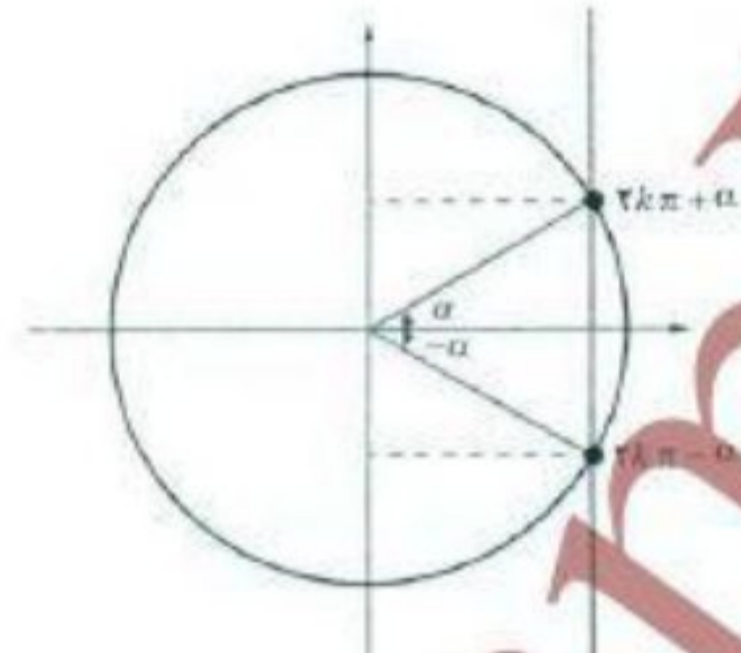
نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب های معادله

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



الف) برخی از جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید. $-\frac{13\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}$ با دایره مثلثاتی، جواب های معادله فوق را به دست آورید. $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ و $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$
برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه ای α وجود دارد که $\cos \alpha = a$



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه رو به صورت زیر به دست آوریم.

$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi - \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$

جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$



حرفه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۳۹

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-2\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

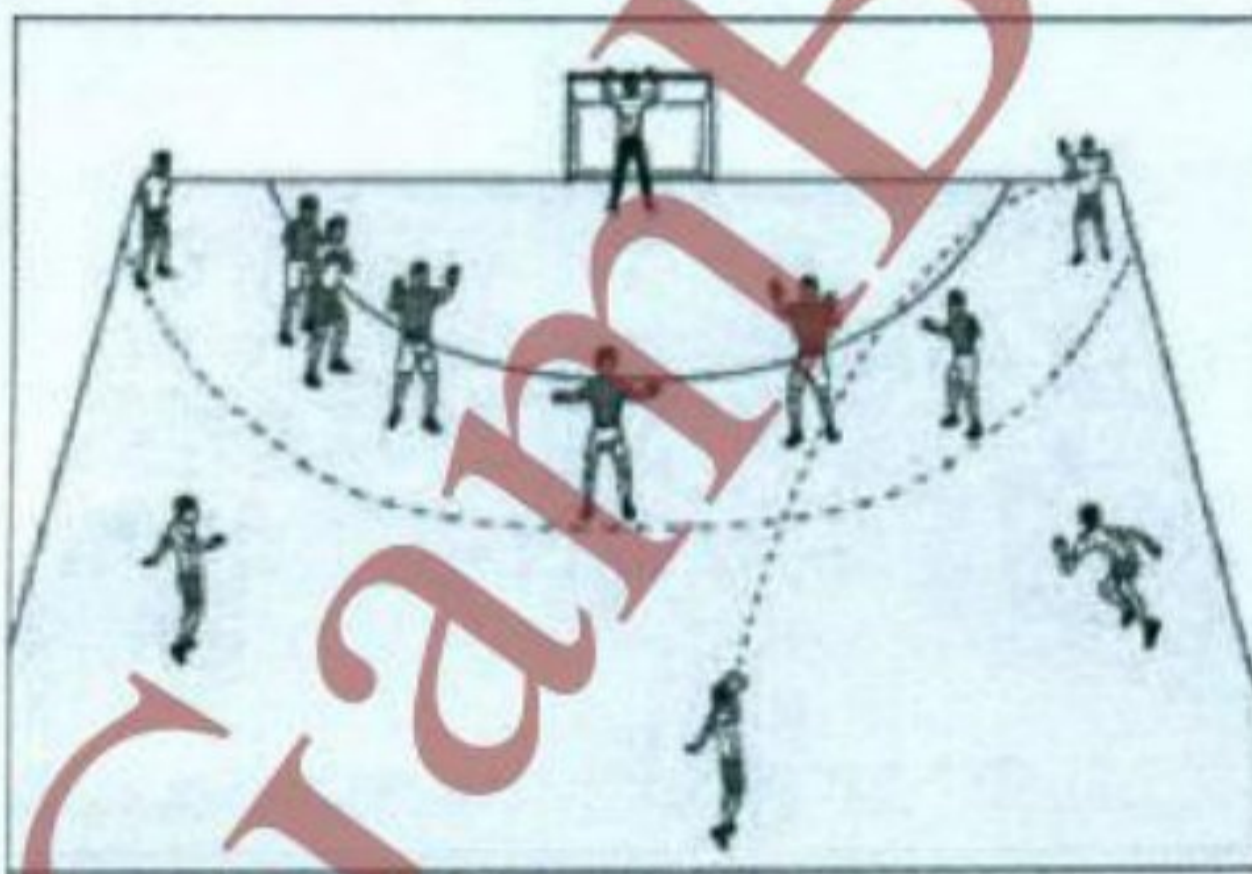
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = -2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت

16 m/s برای هم‌تیمی خود که در $12/8$ متری او

قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ

v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر

حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه

زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

از رابطه داده شده به دست می آید:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{16} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 16}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ می باشد.

مثال: جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$ می نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب های معادله مثلثاتی بالا از حل

دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب های معادله

$\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)^2$$

طرفین را به توان ۲ می رسانیم.

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

استفاده از رابطه $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۱

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 \text{ یا } \cos x - 1 = 0$$

اکنون جواب‌های معادله‌های به دست آمده را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ می‌یابیم:

$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

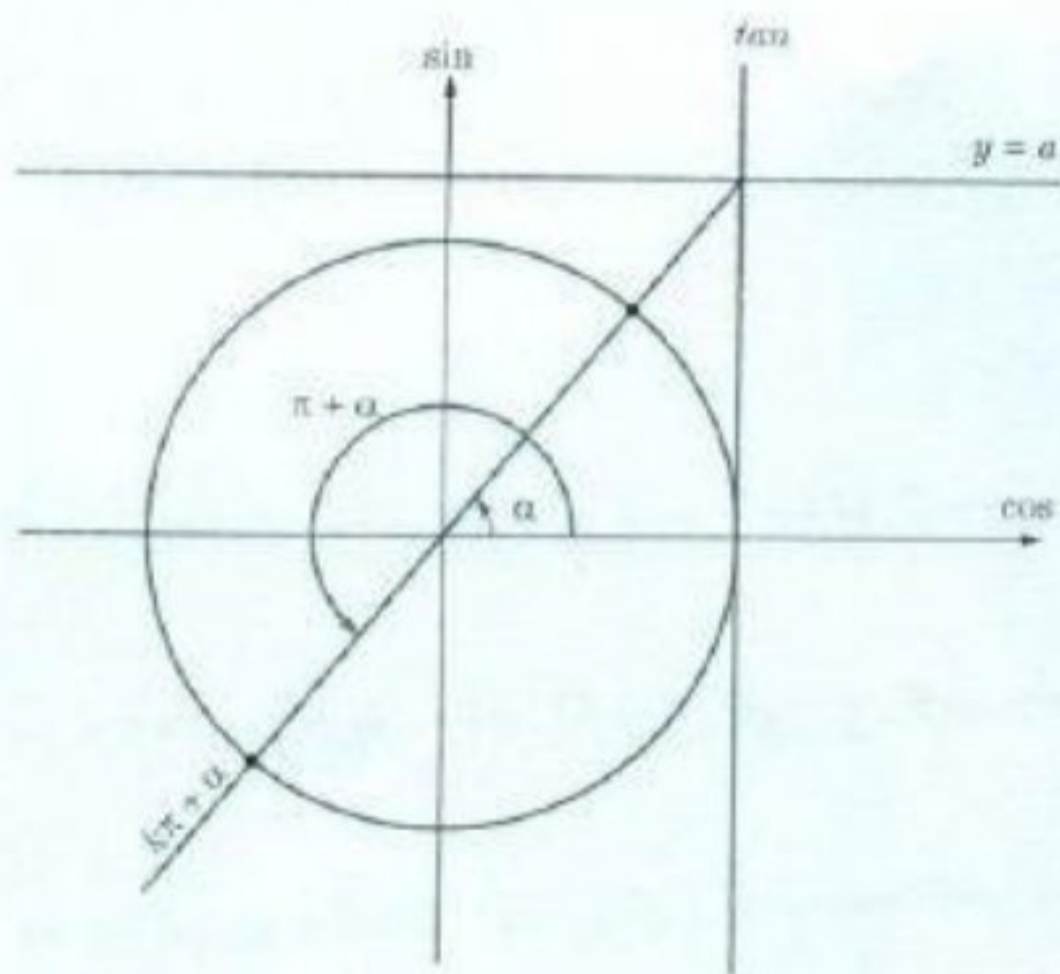
$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x = \frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیر قابل قبول است اما $x = 0, \frac{\pi}{2}$ مقادیر به دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند. *پس از توان رساندن ممکن است جواب‌های ما قدرتی باشد که فرعی اضافه شده باشد که باید آن‌ها حذف می‌شود.*

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = a$ که یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x = a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a ، که $\tan x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan \alpha = a$. بنابراین معادله $\tan x = a$ به صورت $\tan x = \tan \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x = \tan \alpha$ باید رابطه بین زوایای x و α را بیابیم.



@CamScanner



از دایره مثلثاتی و محور تنازات در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین زوایای x و a به صورت $x = k\pi + \alpha$ که k یک عدد صحیح، است می‌باشد.

در نمودار بالا اگر $a = 1$ باشد، داریم:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می‌باشد که k یک عدد صحیح است.

مثال: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

$$x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

حل:

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تنازات به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به صورت زیر به دست می‌آید.

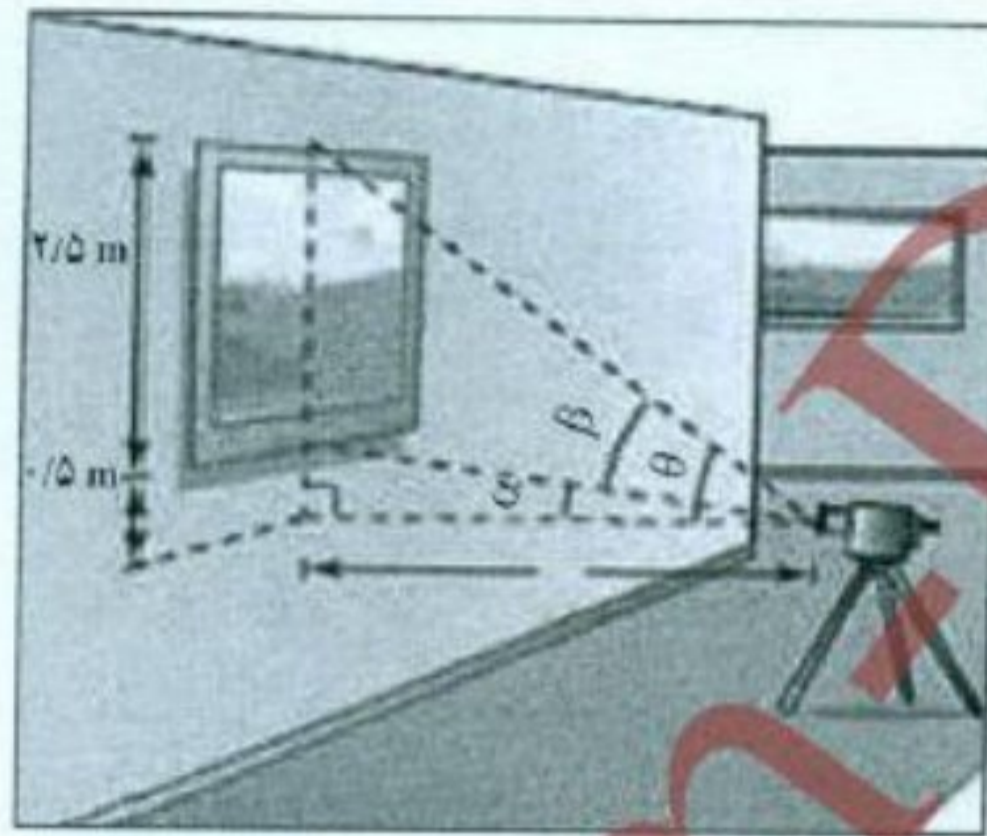
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل دوم: مثلثات ۴۳

مثال: نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{2/5x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.

حل: با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه پایین شکل داریم:

$$\tan \alpha = \frac{1/5}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم:

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تنازانت به دست می آید:

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1/5}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{1/5}{x}} = \frac{\frac{3 - 1/5}{x}}{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = \frac{2/5x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم:

$$x = 1 \rightarrow \tan \beta = \frac{2/5 \times 1}{1^2 + \frac{3}{2}} = \frac{2/5}{1^2 + \frac{3}{2}} = 1$$

از طرفی می دانیم که $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ پس جواب های معادله $\tan \beta = 1$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta = \frac{\pi}{4}$ را به دست می دهد قابل قبول می باشد.

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169} \\ \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \end{cases}$$

تمرین

فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

ب) $\sin 2\alpha$

نسبت‌های مثلثی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

$$\sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 2x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

ب) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - \sin x + 1 = 0$

ت) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

ج) $\tan(2x - 1) = 0$

ح) $\tan 2x = \tan \pi x$

درمورد

مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با

این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$\frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ kez}$$

$$\alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \text{ kez}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ و } \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ دو مثلث می‌توان ساخت}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان



الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \pi x$

$$\pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{\pi} + \frac{1}{4}$$

ب) $\cos \pi x - \cos \pi x + 1 = 0$

$$2\cos \pi x - 1 - \cos \pi x + 1 = 0$$

$$2\cos \pi x - \cos \pi x = 0 \rightarrow \cos \pi x (2\cos \pi x - 1) = 0 \begin{cases} \cos \pi x = 0 \\ \cos \pi x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ج) $\cos \pi x - \sin \pi x + 1 = 1 \rightarrow -\pi \sin \pi x + 1 - \sin \pi x = 0 \rightarrow \pi \sin \pi x + \sin \pi x - 1 = 0$

$$(\sin \pi x + 1)(\pi \sin \pi x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \pi x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \sin \pi x = \frac{1}{\pi} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

د) $\cos \pi x = \cos \pi x$

$$x = 2k\pi \pm \pi$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{\pi} \end{cases}$$

ه) $\pi \sin \pi x + \sin \pi x - 1 = 0 \rightarrow (\sin \pi x + 1)(\pi \sin \pi x - 1) = 0 \begin{cases} \sin \pi x = -1 \\ \sin \pi x = \frac{1}{\pi} \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

و) $\sin \pi x - \cos \pi x = 0 \rightarrow \sin \pi x + \pi \sin \pi x - 1 = 0 \rightarrow (\sin \pi x + 1)(\pi \sin \pi x - 1) = 0$

$$-\pi \sin \pi x + 1$$

$$\begin{cases} \sin \pi x = -1 \\ \sin \pi x = \frac{1}{\pi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

ز) $\tan(\pi x - 1) = 0$

$$\pi x - 1 = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi + 1}{\pi}$$

ح) $\tan \pi x = \tan \pi x$

$$\pi x = k\pi + \pi x$$

$$(\pi - \pi)x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{\pi - \pi}$$



حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت

۱. حدهای نامتناهی

۲. حد در بی نهایت

فصل

آفریقای جنوبی (مپومالانگ)

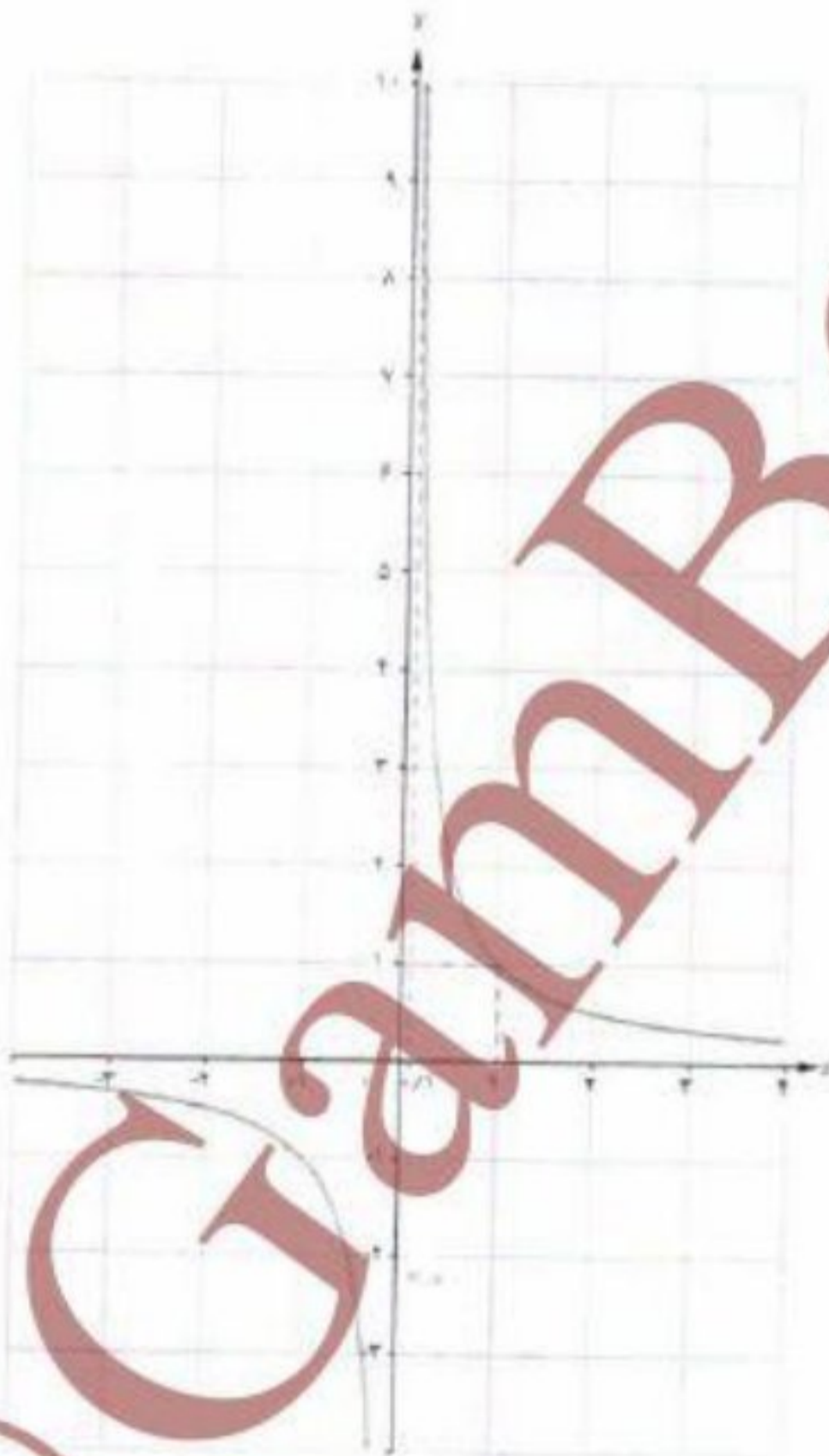
بسیاری از پدیده‌های طبیعی به وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، یا تابع $f(x) = \frac{2500x}{1000 - x}$ مدل‌سازی می‌شود. که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه بسیار زیاد خواهد بود. به طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

حدهای نامتناهی

درس

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محدوق یک نقطه آشنا می شویم.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ آشنا شدیم می خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x = 0$ بررسی کنیم.

©

جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰/۸	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	... →
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰.۰۰۰	... →

اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک تر شود؟ **یک میلیونیم (۱۰^{-۶})**

وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می شوند؟ چرا؟ **خیر**
وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر $f(x)$ مرتباً بزرگ می شوند
 با توجه به این فعالیت مشاهده می شود که وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به بیان دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ تر کرد به شرطی که x را

به اندازه کافی با مقادیر بزرگ تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

تذکره: این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگ تر باشد.

کاردر کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول زیر را کامل کنید:

x	$\frac{1}{2}$	۰/۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	... →
$f(x)$	۲	۰.۵	۱۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	... →

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از 10^6 کوچک تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟ **باید $x < 10^{-6}$ باشد**

ب) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می کند؟ **مقادیر $f(x)$ مرتباً کوچک می شوند**

اما به عدد خاصی نزدیک نمی شود.

ت) در مورد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ چه می توان گفت؟

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



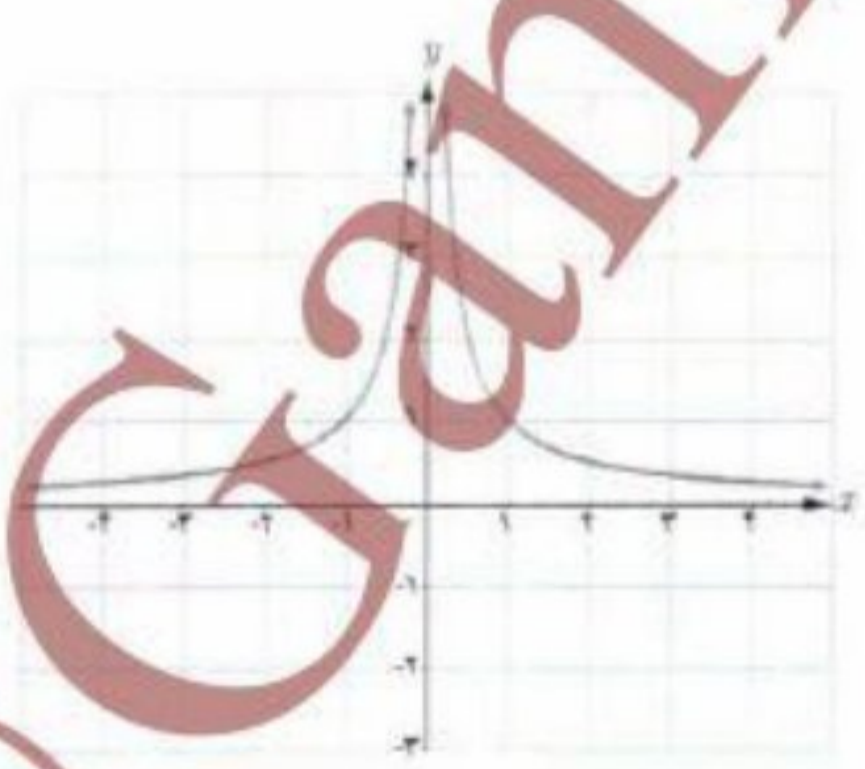
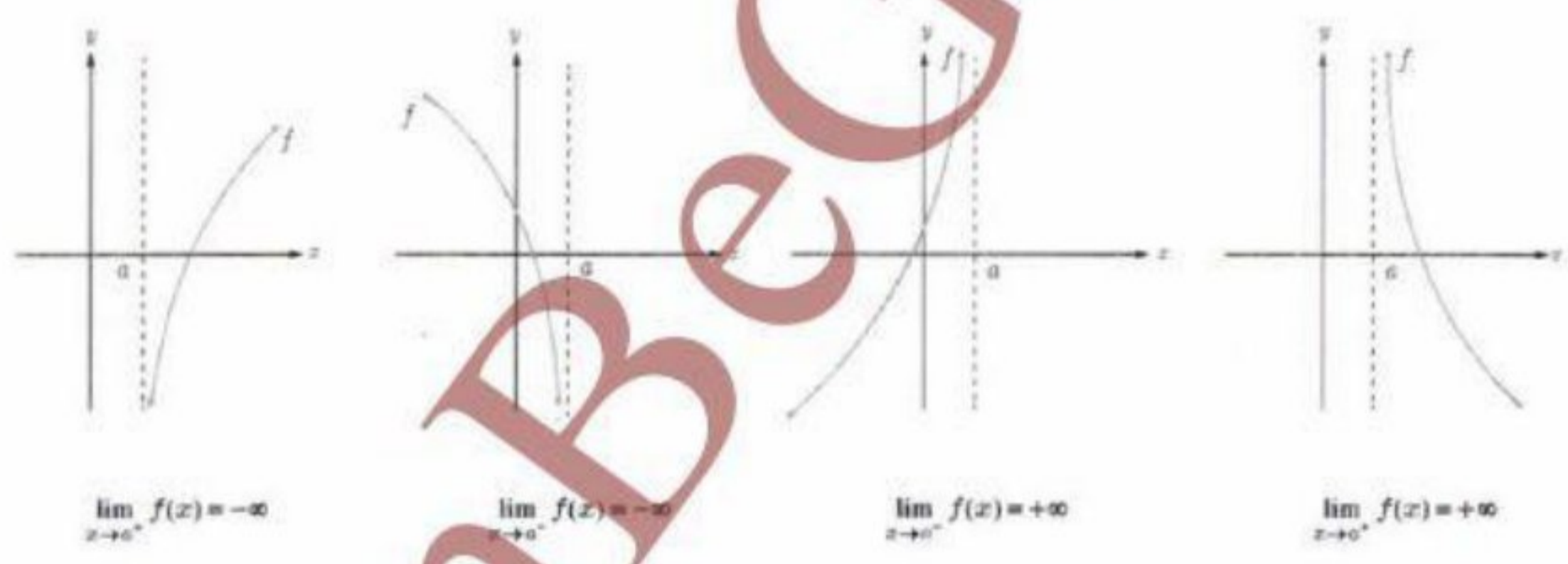
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه‌ی قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تذکره: تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x = 0$ بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید:



فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

x	$-1/5$	$-1/1$	$-1/1$	$-1/0.1$	$\dots \rightarrow$	0	$\leftarrow \dots$	$1/0.1$	$1/1$	$1/1$	$1/5$
$f(x)$	2	10	100	1000	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow \dots$	1000	100	10	2

مشاهده می شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواه بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

تعریف:

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می توانیم a را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حد در مورد تابع هایی که وقتی x به a نزدیک می شود مقدار تابع خیلی کوچک تر می شود در زیر وجود دارد.

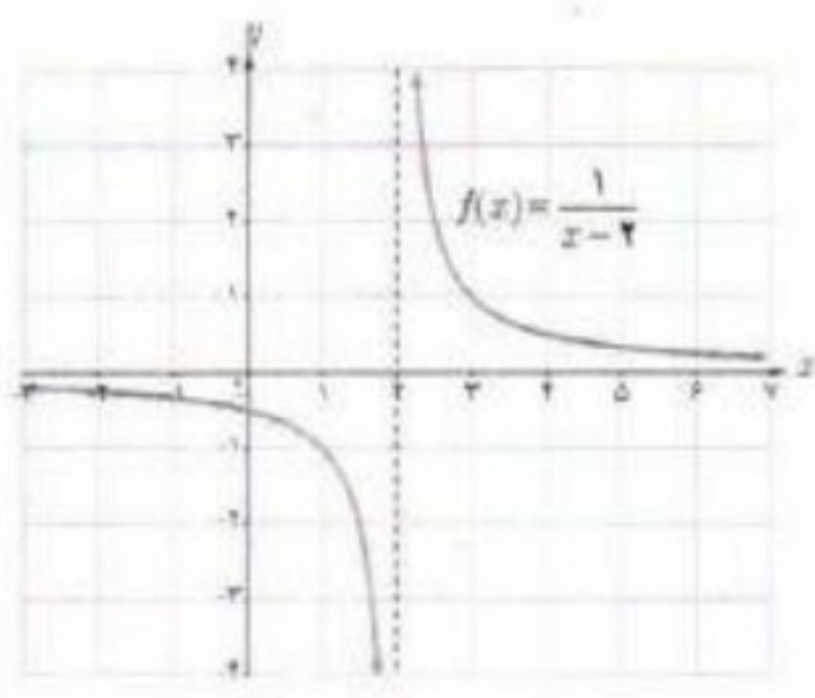
تعریف:

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ یعنی اینکه می توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثال: برای حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

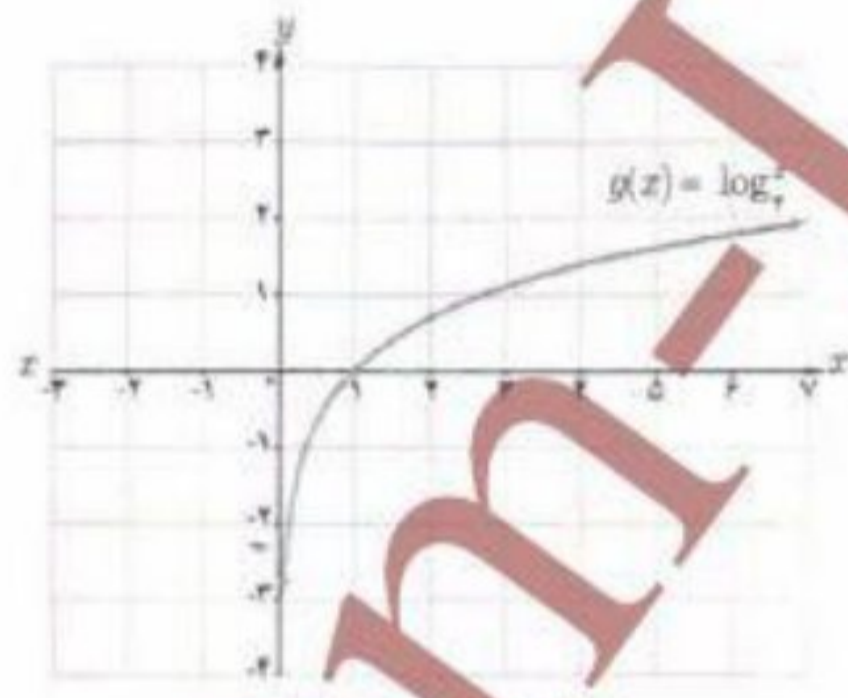
مثال: در مورد حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$

نمودار توابع f و h در شکل های زیر داده شده اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

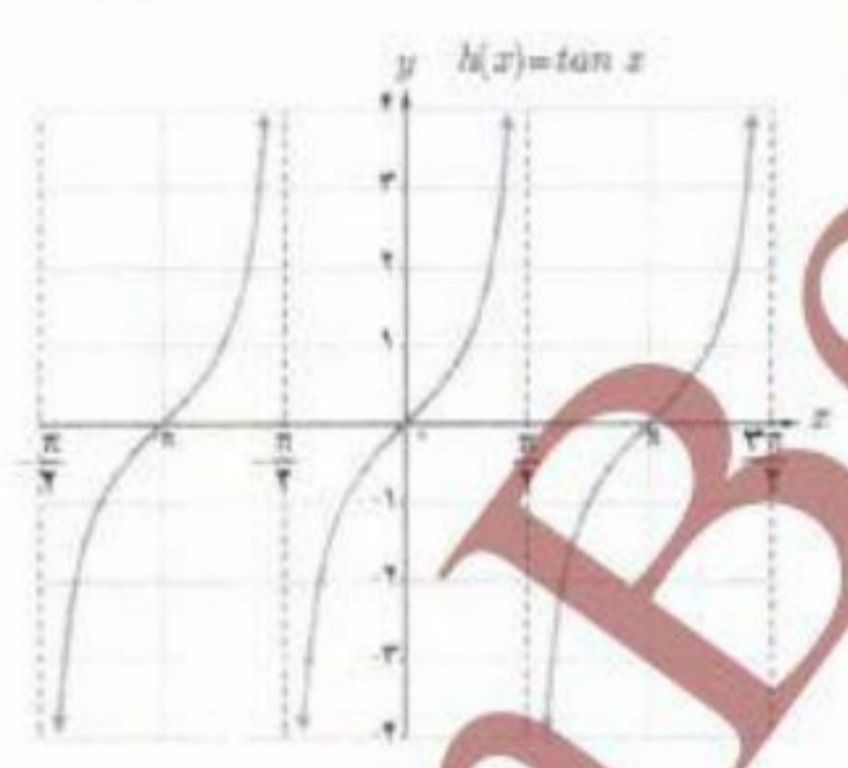
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

نهیته گفته:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = -\infty$$

خواندنی

بی نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته های مختلف ریاضیات با تعبیرات مختلف به کار می رود و معمولاً به معنای «فرا تر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به کار می رود و نشانه آن در ریاضیات ∞ می باشد.

این نماد به صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی نهایت به معنای حدی بی پایان است $x \rightarrow \infty$ یعنی متغیر x فرا تر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می کند.

بی نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت اند مفهوم فیزیکی بی نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف «برای طرف متفاوت است». به عنوان مثال می گوئیم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی نهایت تشکیل می شود. حال اگر دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی نهایت تشکیل می شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی شود. یعنی بی نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی نهایت فیزیکی است در ریاضیات می گوئیم «بی نهایت مفاداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی نهایت» در نظر گرفته می شود. به عنوان مثال در حد تابع می گوئیم $x \rightarrow \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده ای بزرگ تر باشد.



برخی از فضای حدهای بی نهایت

قضیه ۱: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ عددی زوج باشد،} \\ -\infty & n \text{ عددی فرد باشد.} \end{cases}$$

مثال: با توجه به قضیه فوق می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

قضیه ۲: الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

مثال: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$

کاردر کلاس

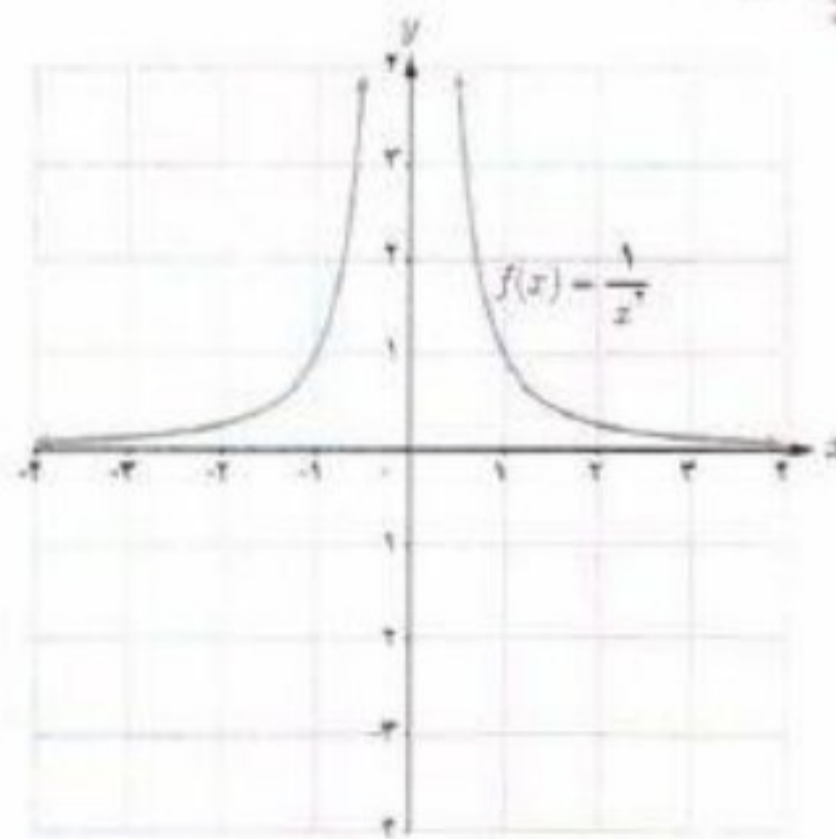
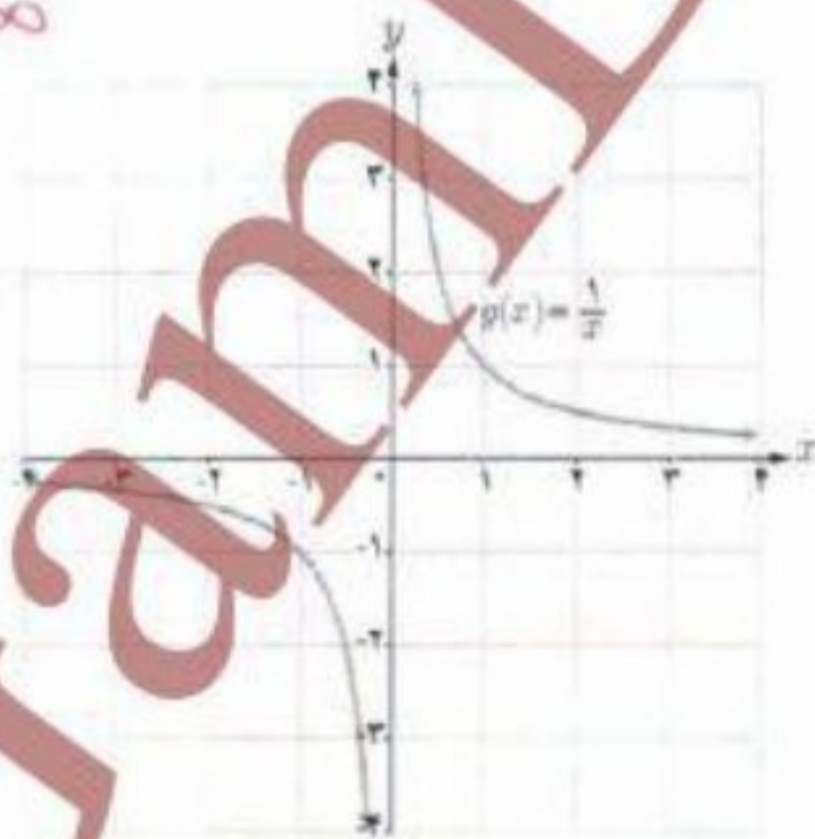
با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین فضای بالای حاصل حدود زیر را به دست آورید. طبق قضیه ۱ $n=1$ (مزا است)

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1}{n} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



۱- ما در این کتاب به بیان برخی از فضای حدهای بی نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی کنیم.



قضیه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن گاه:

الف) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه ۳ در حالتی که $x \rightarrow a$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی، با ضابطه $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع $(0, 100)$ می‌باشد. مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه ۶۲۰۷۵ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(95) = 24845$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با توجه به قضیه فوق داریم: $\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{255x}{100-x} = +\infty$ و این بدان معناست که با نزدیک شدن x به عدد ۱۰۰ مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد لذا نمی‌توان صد درصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.



سد سیهامپور، اندیکا، خوزستان، مکرر سیلاب صیبا

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4-x^2}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که $4-x^2 = (2-x)(2+x)$ وقتی x در همسایگی جب ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 2} x+1 = 3$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty$



مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل: وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر -1 و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در

همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است، در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که حد فوق به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید و چون $x \neq -1$ پس می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کرد.

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

کار در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1+2}{-2+2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[2]-2}{2-2} = \frac{1-2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

قضیه ۴: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (و یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$)، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

تذکر: قضیه فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ را به دست آورید.

حل: در یکی از کار در کلاس‌های قبل به صورت شهودی دیده شد که: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = +\infty$ از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \quad \text{طبق قضیه فوق} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

نوع تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 + 1 = 1$$

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را به دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x)$ را محاسبه کنید.

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x^2} + (x+1) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = +\infty$$

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ بیان کنید.

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{x^2} \times (x+1) = \frac{x+1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$$

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = -\infty$$

قضیه ۵: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \quad \text{ب)}$$

تذکر: قضیه فوق برای حالتی که $x \rightarrow a'$ با $x \rightarrow a$ نیز برقرار است.

مثال: برای به دست آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1 + \frac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$ را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}$ از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

۱- این قضیه در حالت $L = 0$ در این کتاب بررسی نمی‌شود و در آرنشایی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت $0 \cdot \infty$ در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.



$$\lim_{n \rightarrow a} g(n) = L, \lim_{n \rightarrow a} f(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f+g)(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f \cdot g)(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f-g)(n) = +\infty$$

فصل سوم: جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

در کلاس

قضیه ۵ را در حالتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ بازنویسی کنید.

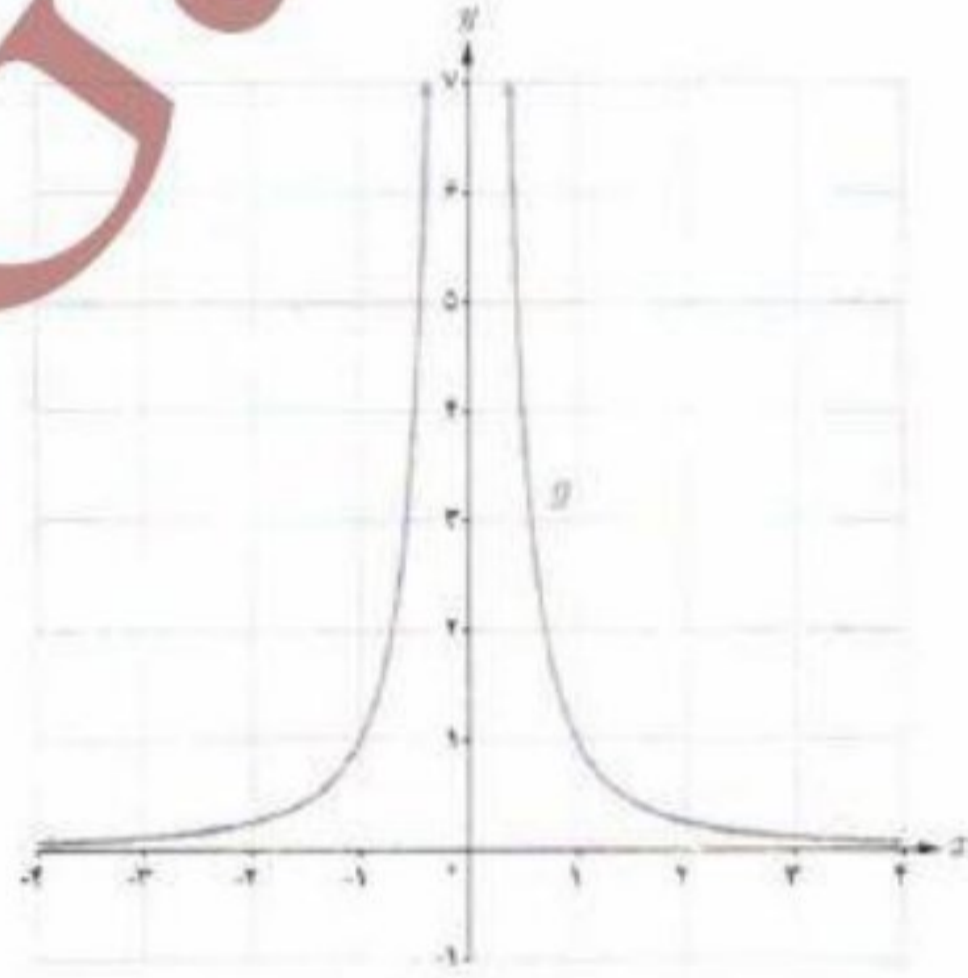
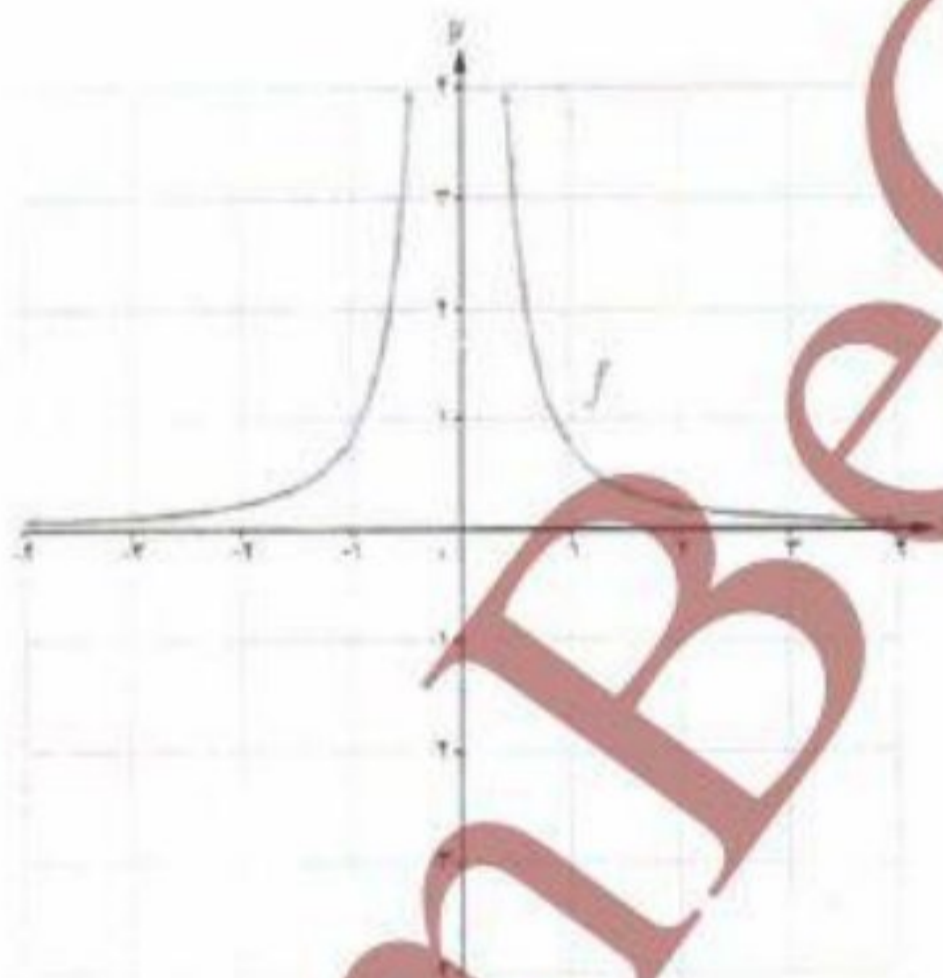
حاصل حدود زیر را به دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x}) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2+2x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{n+2}{(n+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{-2+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ت) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \cos 2x}{x} = \frac{2 - \cos(0)}{0} = \frac{2-1}{0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

مجاناب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$ را در هر دو منحنی، مجاناب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف:

خط $x = a$ را مجاناب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

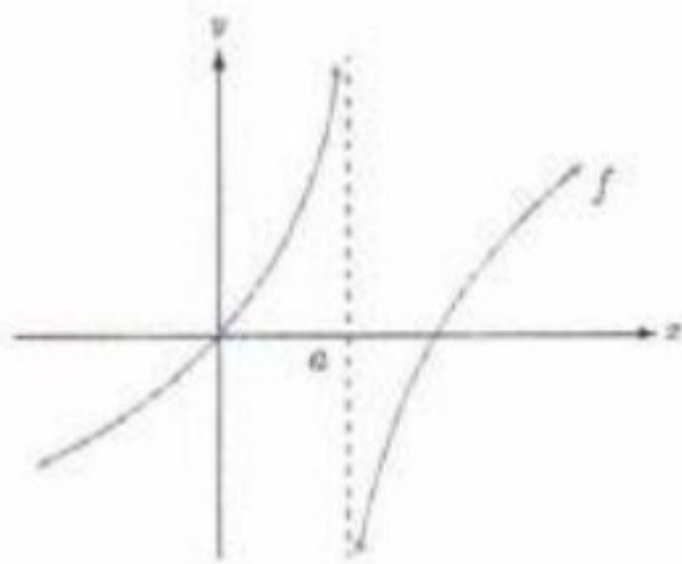
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

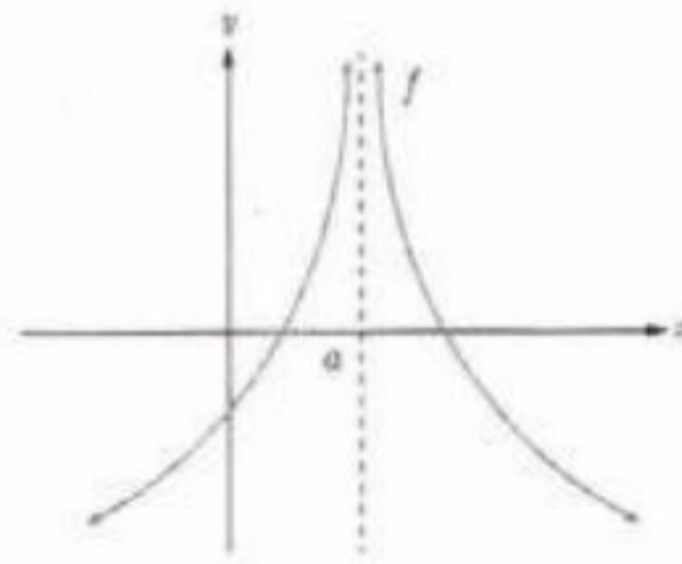


مثال: در هر یک از شکل های زیر خط $x = a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



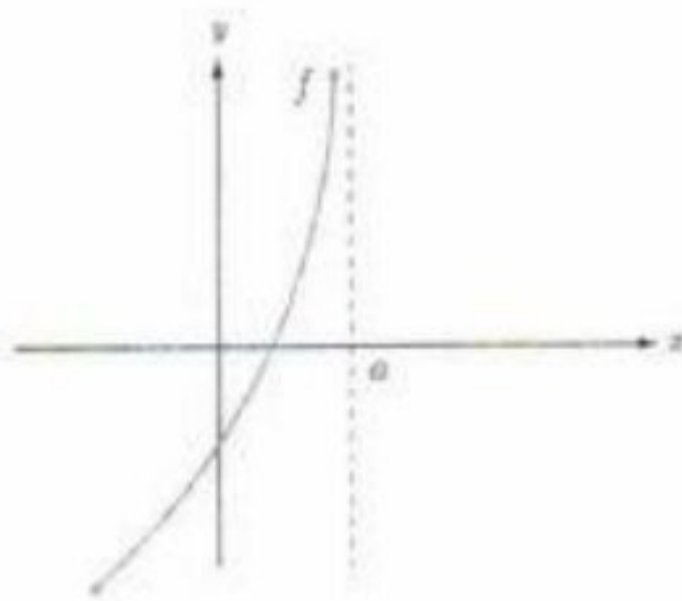
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



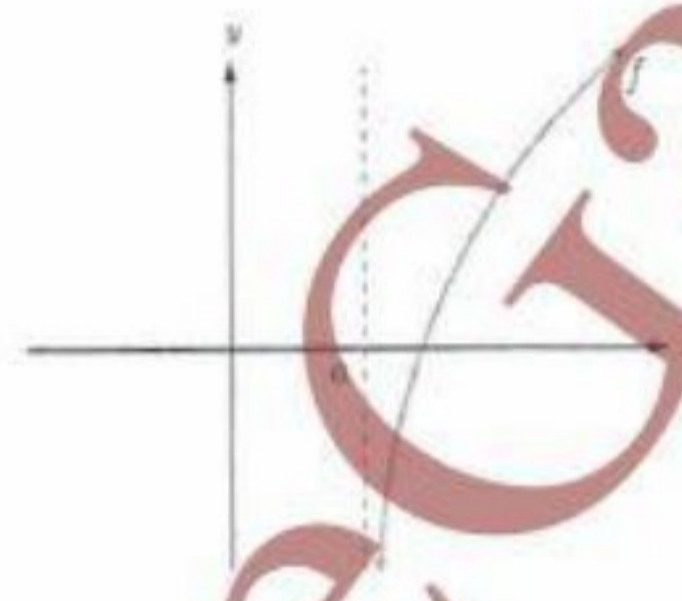
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

مثال: کدام یک از خطوط $x = -1$ و $x = 3$ مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ می توانستیم بگوییم $x = -1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{4}$$

خط $x = 3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به صورت $x = -1$ دارد.



فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۵۷

مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



پس خط $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت رویه رو خواهد بود.

کار در کلاس

$$x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 4} = \frac{9 - 9 + 2}{9 - 3 - 4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 4} = \frac{4 + 6 + 2}{4 + 2 - 4} = \frac{12}{2} = 6$$

مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 4}$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$



سوال 1

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+n^2} = \sqrt{3}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 0^+$
 طبق قاعده $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+n^2}}{n^2} = +\infty$

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تعریف

با استفاده از فضای اعداد حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{2+x} = +\infty$

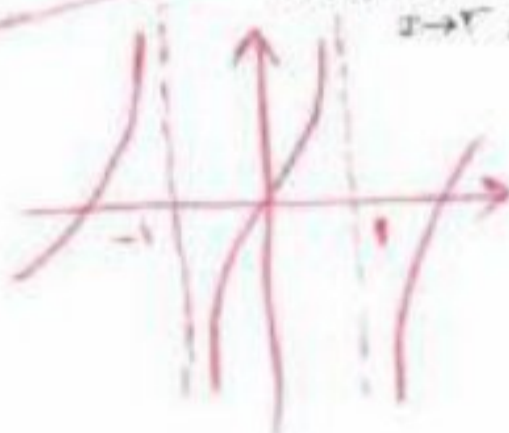
ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow 2} (1) = 1$
 $\lim_{n \rightarrow 2} (n-2)^2 = 0^+$
 طبق قاعده $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{1}{(n-2)^2} = +\infty$

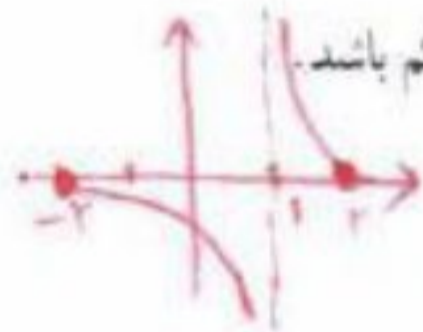
$\lim_{n \rightarrow -2} \frac{|5-n|}{2+n} = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow -2} |5-n| = 7$
 $\lim_{n \rightarrow -2} \frac{7}{2+n} = +\infty$

حدهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0^+} = +\infty$
 ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \frac{9+6-1}{9+3-12} = \frac{14}{0^+} = +\infty$
 ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{4}{9-9} = \frac{4}{0^-} = -\infty$



نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-2, 2] - \{1\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

ب) $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

$x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$
 اینها نقاط تقاطع با محور x است.

$x=3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2+n}{n^2-x} = \frac{2}{0} = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-n} = \frac{1}{1} = 1$

$x=1$ می‌باشد قائم است

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

$D_f = (-\infty, 0)$

کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



(ت)

(ب)

(ب)

(الف) ✓

$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



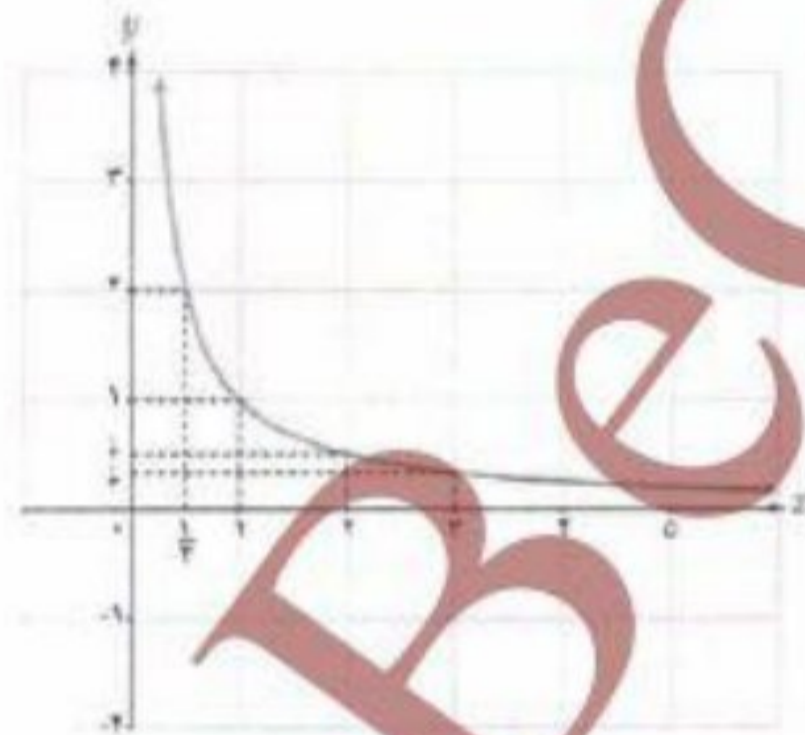
۲

درس

حد در بی نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود. در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (تزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	10^2	10^5	10^6
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^6}$

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ‌ها از $\frac{1}{5}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ‌ها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰

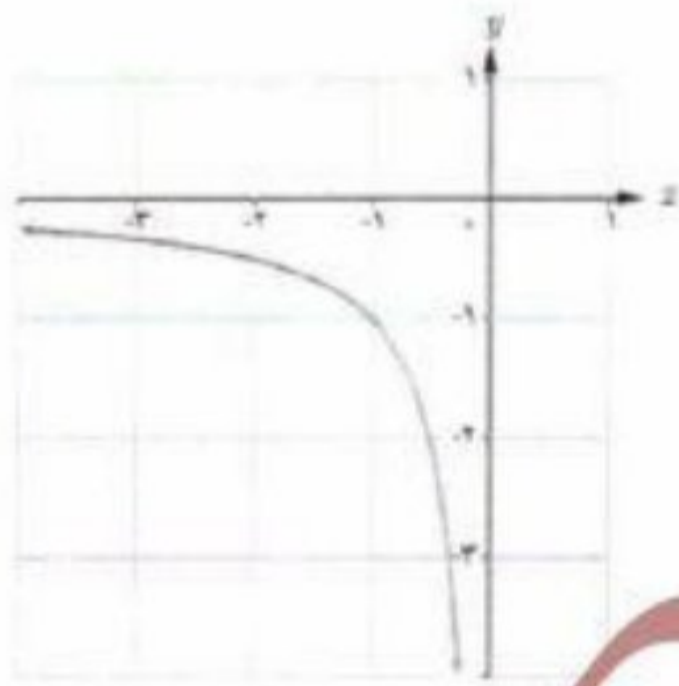
۱۰۰ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{100}$ کوچک تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

۱۰۱ آیا فاصله $f(x)$ تا محور x ها را می توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟ **پلم با آنتی ب لام های بزرگ**

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازه کافی بزرگ اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل کند

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{برابر صفر است و می نویسیم}$$

کاردر کلاس



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-1	-2	-5	-10	-100	-10 ²	-10 ³	...
$f(x)$	-1	-1/2	-1/5	-1/10	-1/100	-1/10 ²	-1/10 ³	...

۱ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها کمتر از $\frac{1}{10}$ شود x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۳

۱ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{100}$ کمتر شود x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۱۰۲

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول بالا می توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک تر (یعنی از هر عدد منفی

کوچک تر) شود آن گاه $f(x)$ را می توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



تذکره : منظور از $x \rightarrow \pm\infty$ آن است که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل به طور خلاصه می توان نوشت :

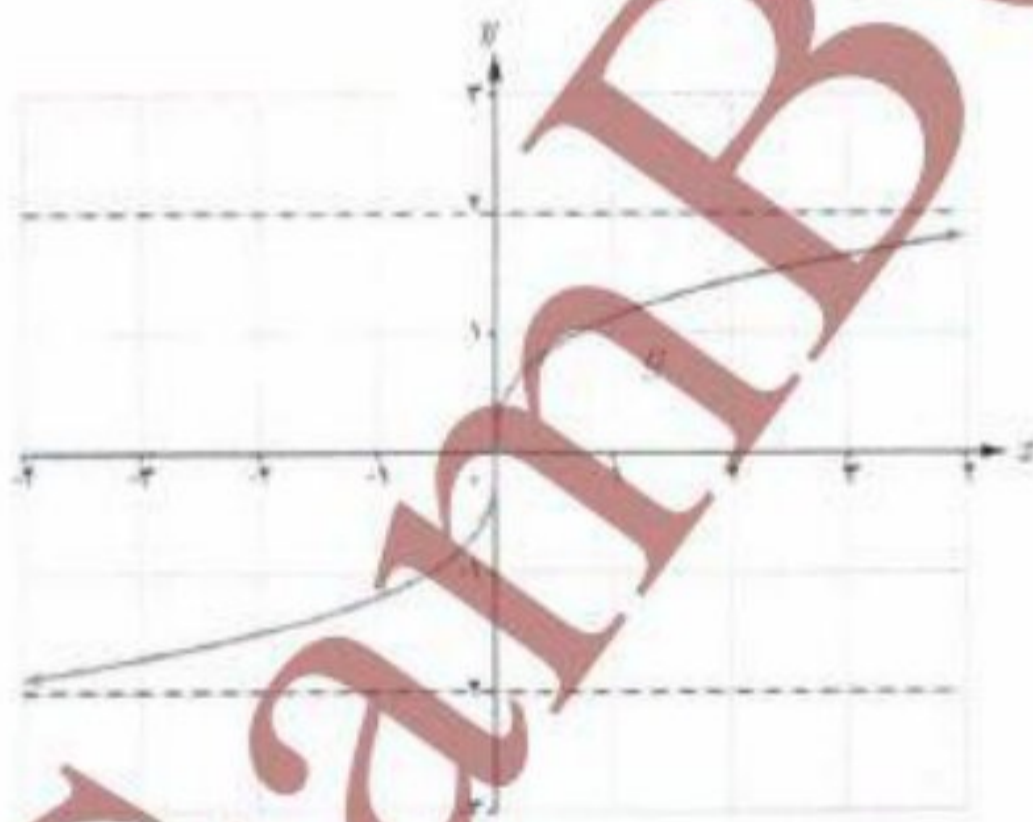
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

تعریف :

- اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، می گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

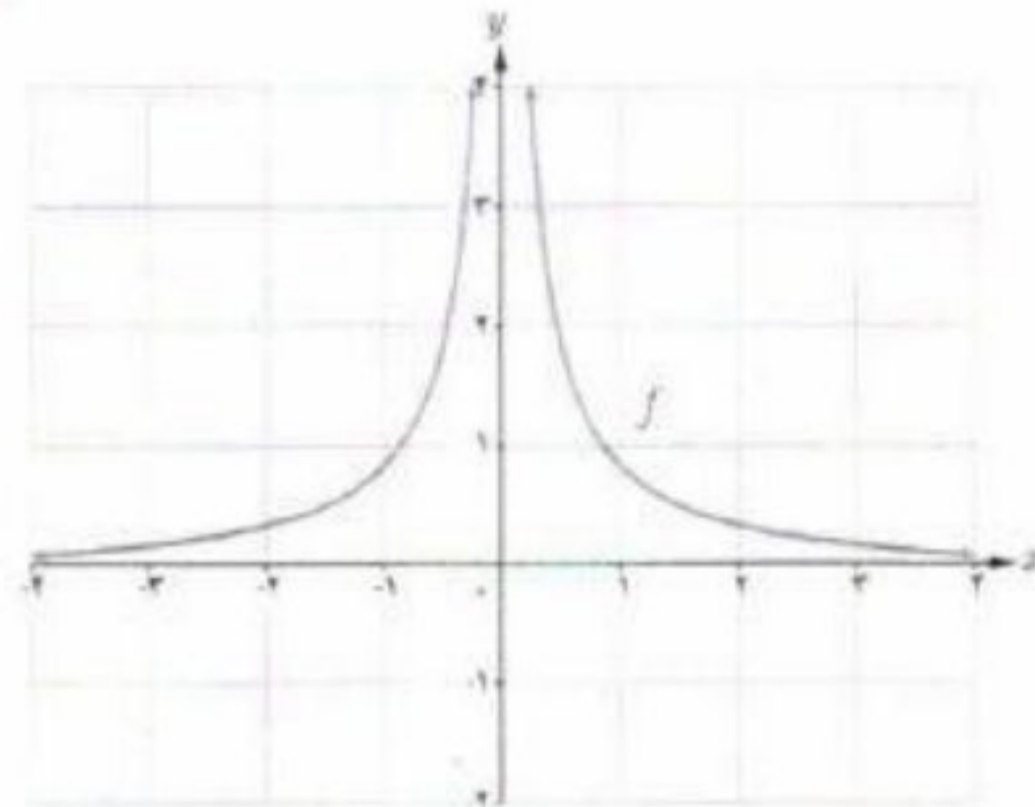
کار در کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

قضیه ۶: اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

مثال: حاصل هر یک از حدود $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{2x^3}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2}$ برابر صفر است.

قضیه ۷: اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$

توجه کنید:

گروه ریاضی اطلاع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \cdot L_2$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ ($L_2 \neq 0$ با فرض)

تذکر: قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند نیز برقرار است.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4}$

حل:

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$$

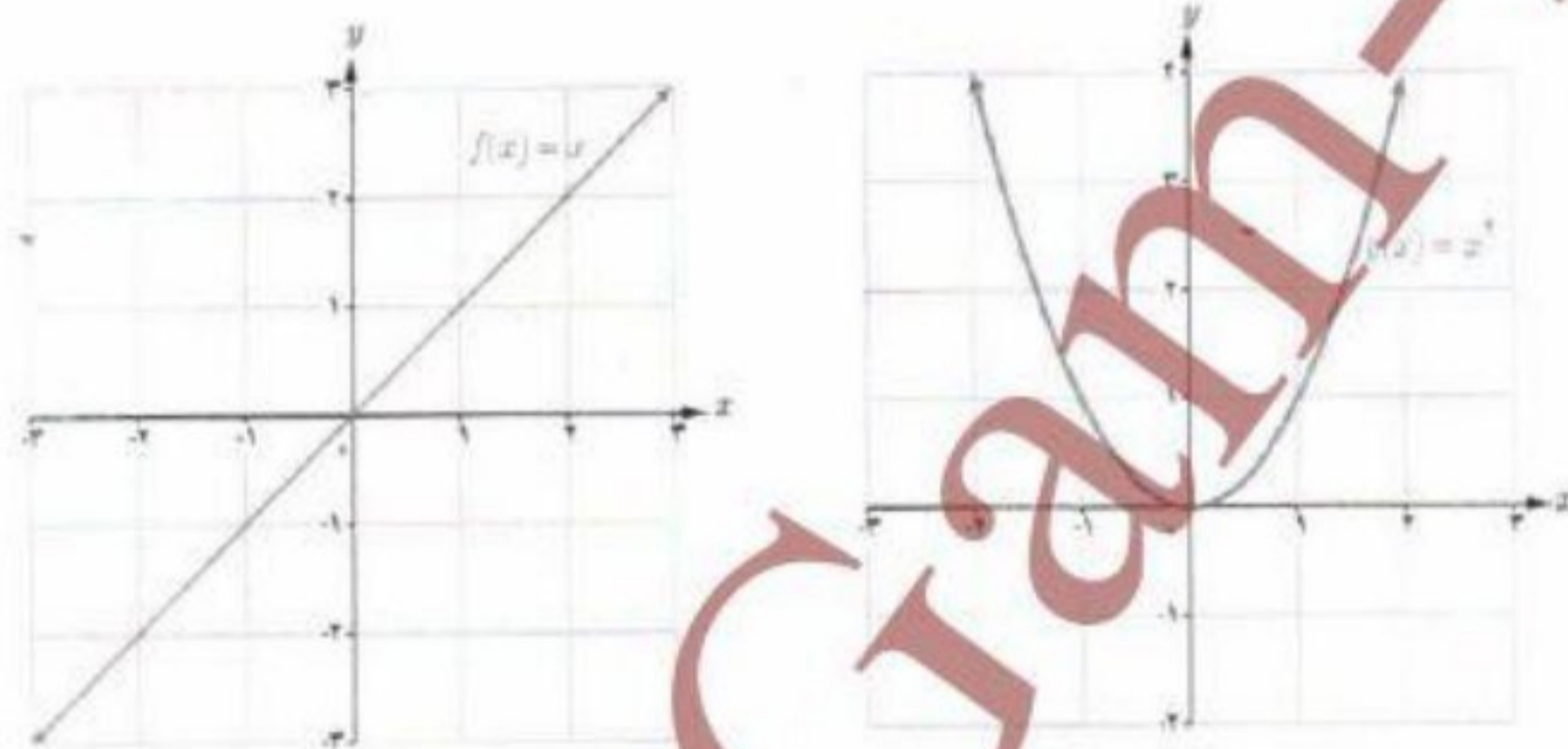
ب) با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$



حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.



همچنین با کوچک شدن مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک‌تر می‌شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود. در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ نیز به سمت

$+\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم

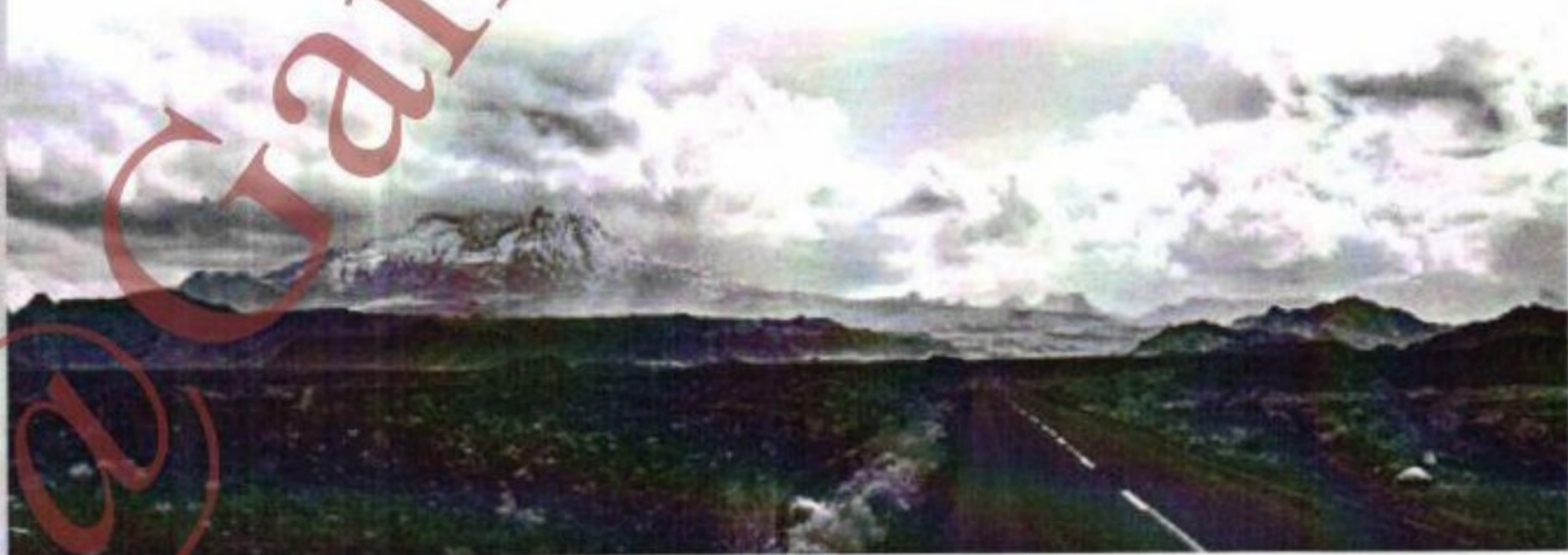
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

برای مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

همچنین اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

به عنوان مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$



$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = +\infty$ یعنی کاهش مقدار n مقادیر $f(n)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگتری شود.
 $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = -\infty$ یعنی کاهش مقدار n مقادیر $f(n)$ از هر عدد منس دلخواهی کوچکتری شود.

۶۲

کاردر کلاس

۱ مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ را بیان کنید.

۲ با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x$ حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

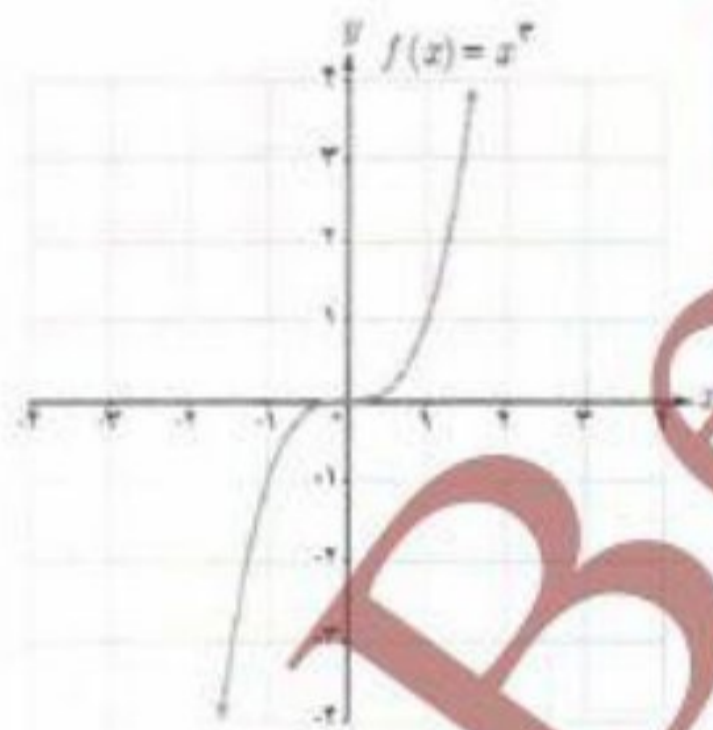
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

نهیه کتله:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

تابع $f(x) = x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$\dots \leftarrow$	-10^4	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^4	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	-10^{12}	-10^9	-10^6	-1	1	1000	10^6	10^9	10^{12}	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش) x ، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ با افزایش (کاهش) $f(x)$ افزایش (کاهش) x می‌یابیم.

۳ در مورد حدهای $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 = -\infty$



❖ قضیه ۸ : اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ (ب) اگر } n \text{ فرد باشد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \text{ : (الف) اگر } n \text{ زوج باشد :}$$

❖ قضیه ۹ : اگر l عددی حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۹ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ قضیه ۱۰ : اگر l عددی حقیقی و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x). \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$

حل :

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

به‌طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

شکل کلی: $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

در کلاس

الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

اگر $m > n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

اگر $m < n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

اگر $m = n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

به کمک نتیجه قسمت قبل حد‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^3 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3}{4x^3} = -\frac{3}{4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{5x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{5x} = 0$

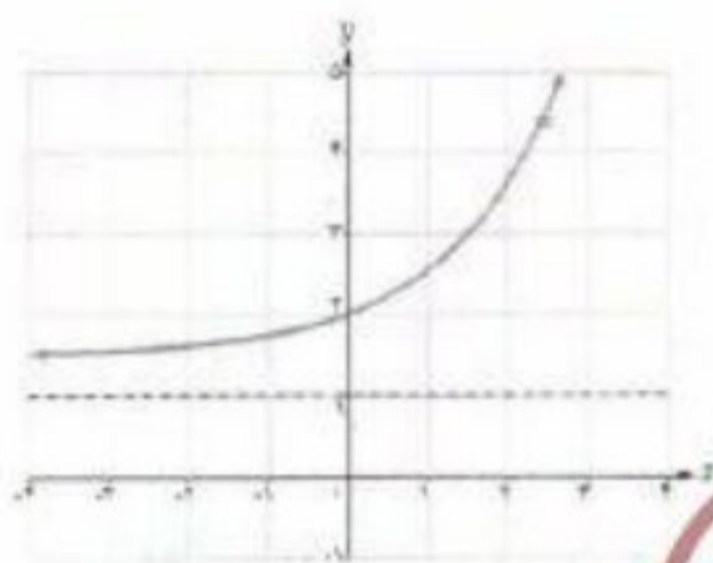


مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$
 برقرار باشد.

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟



مثال: مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

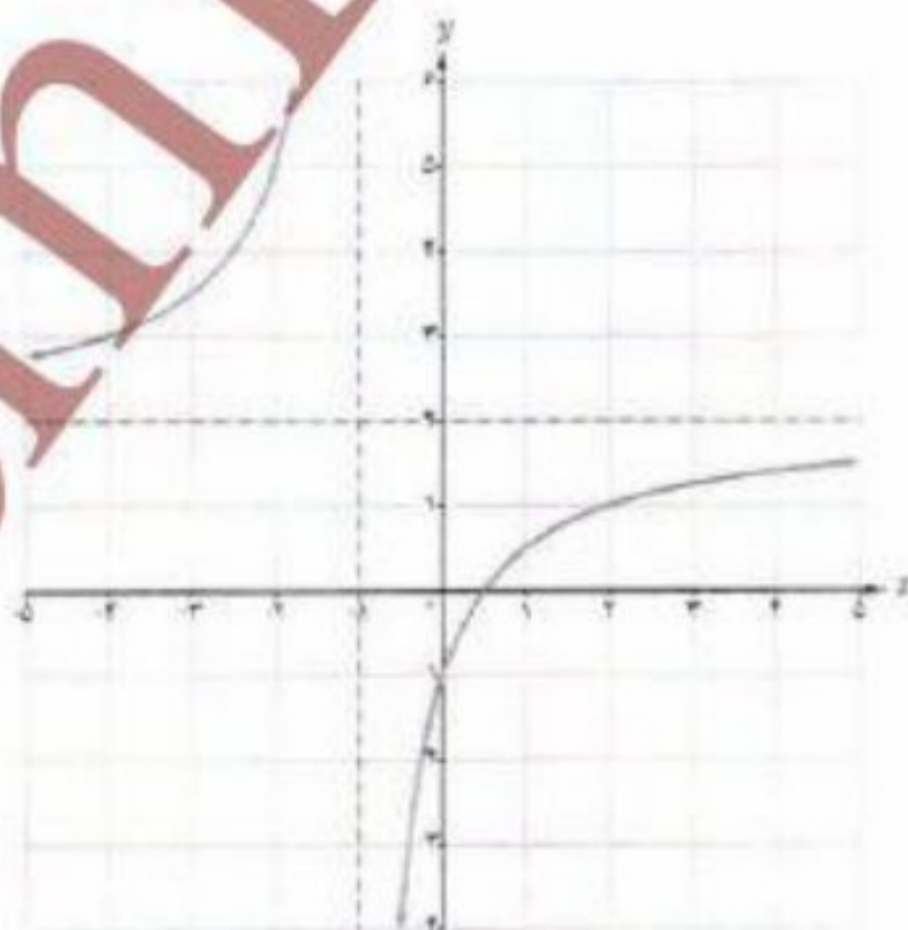
حل: برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم داریم:

پس خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

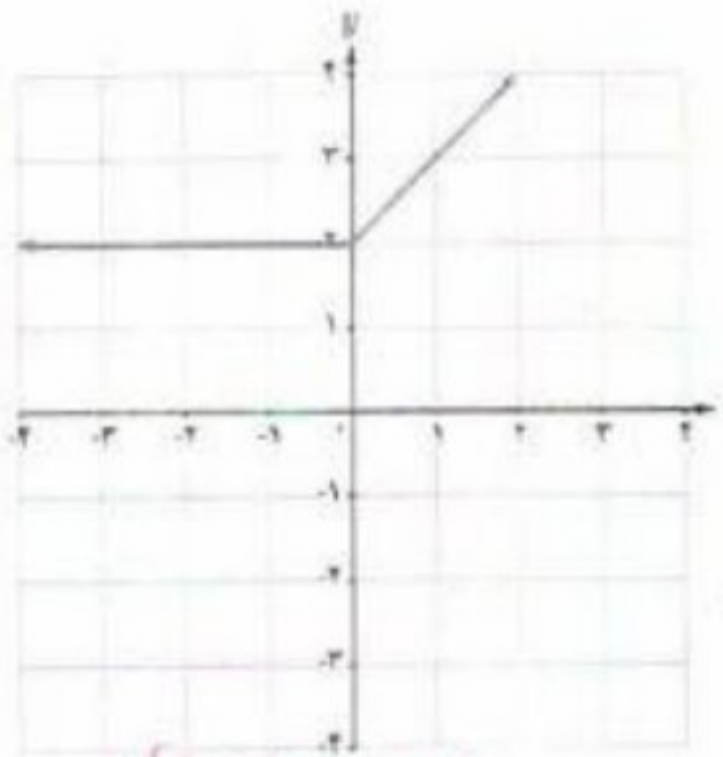
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$$

این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -1$ مجانب قائم تابع است زیرا:

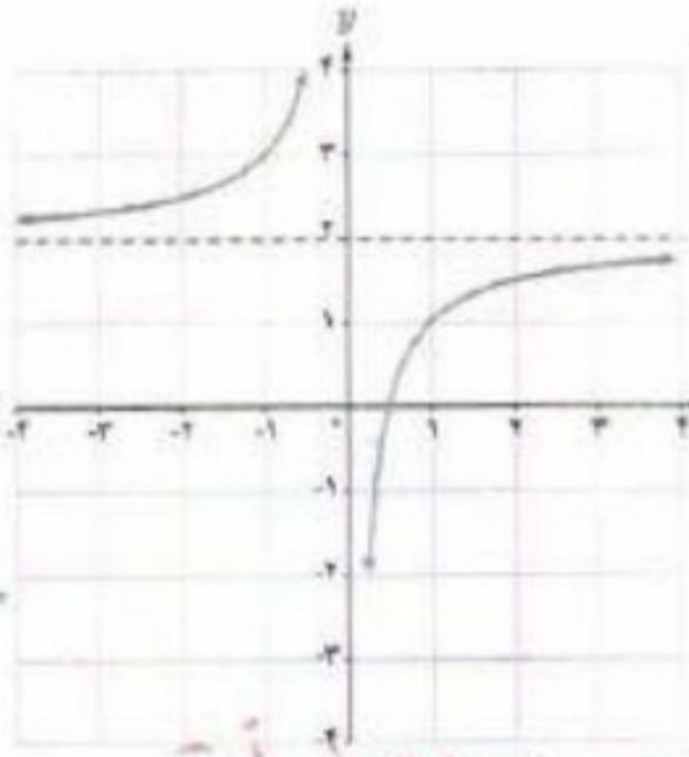
نمودار تابع به صورت زیر است.



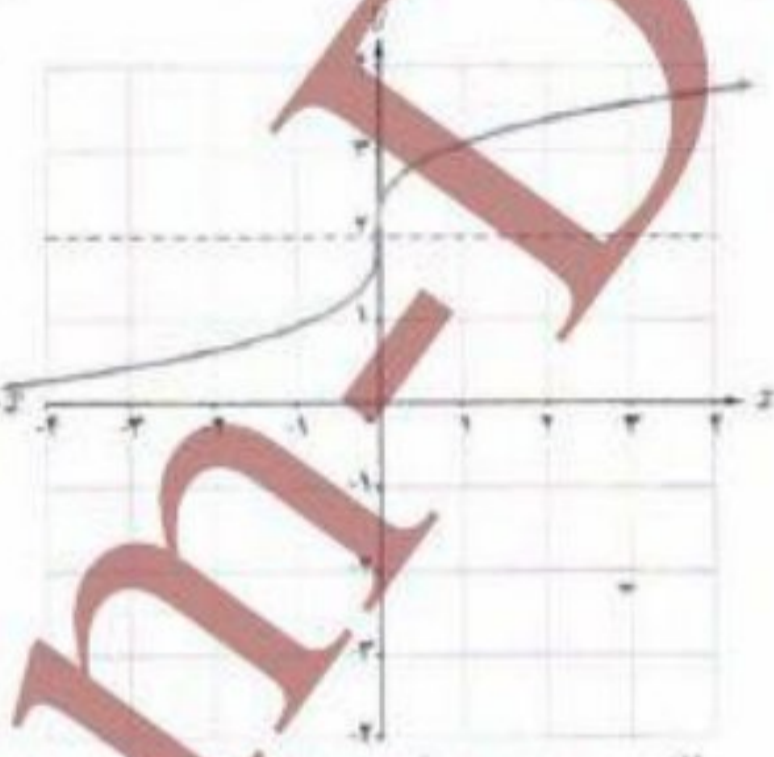
۱ کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



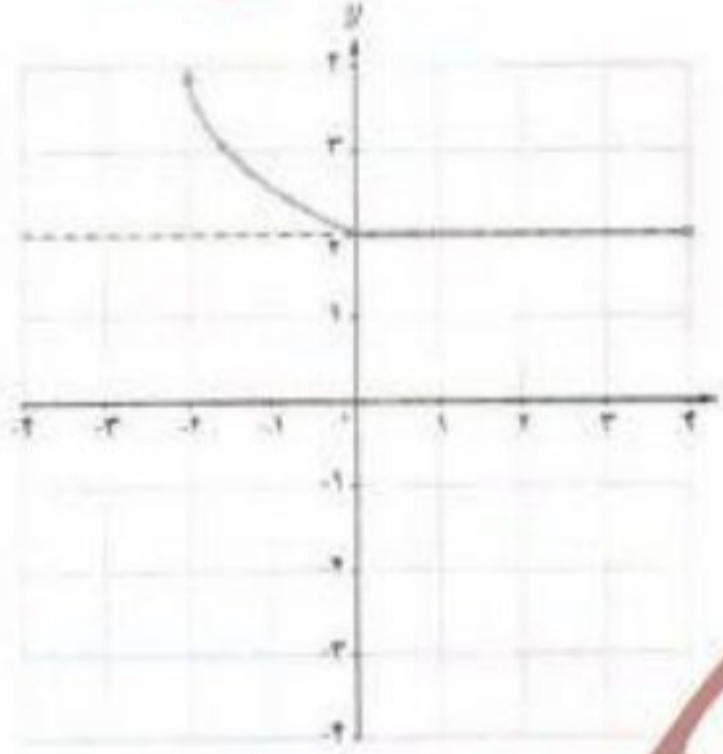
ب) هیچ مجانب افقی ندارد



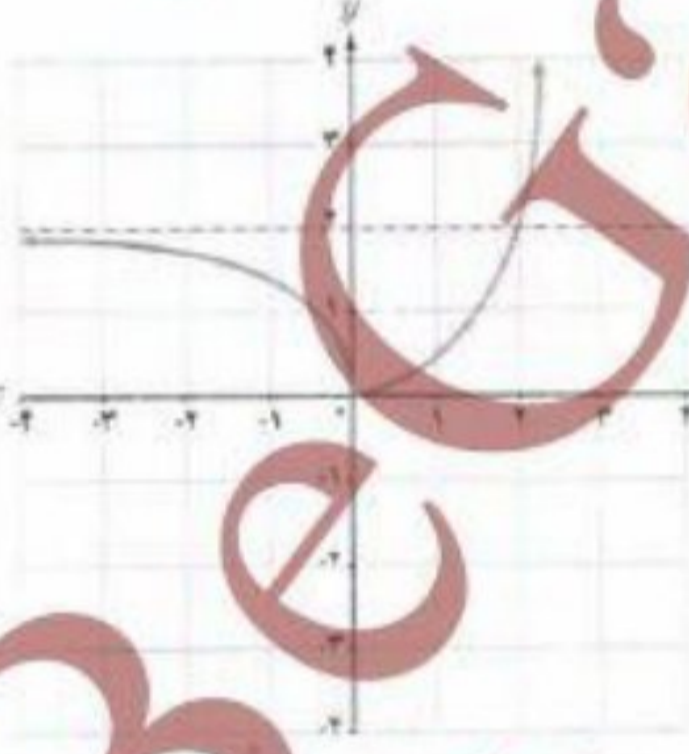
پ) $y=2$ مجانب افقی



الف) هیچ مجانب افقی ندارد



ت) هیچ مجانب افقی ندارد



ث) $y=2$ هیچ مجانب افقی

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲ مجانب های افقی و قائم تابع های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{n+1}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{n} = 0$

مجانب افقی $y=0$

ب) $g(x) = x^2$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} n^2 = \pm \infty$

هیچ مجانب افقی ندارد

پ) $h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{n^2-1}{n+1} = \pm \infty$

هیچ مجانب افقی ندارد



تمرین

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

حرفه مقدار x بزرگتر شود مقدار $f(x)$ به دور ۲ نزدیک می‌شود.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

حرفه مقدار x کوچکتر شود مقدار $f(x)$ به دور ۴ نزدیک می‌شود.

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

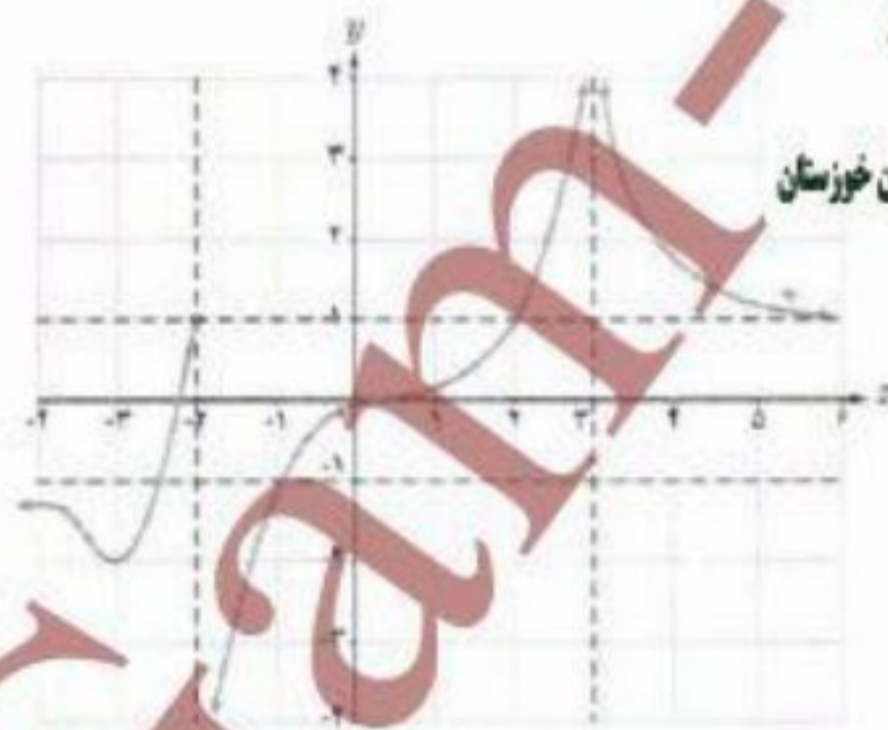
ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$

مجانب‌های افقی و قائم (ج)

$x = -1$ و $x = 1$ می‌باشد
 $y = 1$ و $y = -1$ افقی



نبه کتبه:

گروه ریاضی منبع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳ حاصل حدود زیر را به دست آورید :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{n} = 3$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$

$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1}$

$= \lim_{\epsilon n} \frac{-\epsilon^2 n^2}{4\epsilon n} = -\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$

$= \lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 = -\infty$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید :

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3}$

$x = 3$ می‌باشد
 $y = 2$ افقی

ب) $y = \frac{x}{x^2-4}$

$x = 2$ و $x = -2$ می‌باشد
 $y = 0$ افقی

ب) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

$x = 1$ و $x = -1$ می‌باشد
 $y = -1$ افقی

ت) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

می‌باشد
 $y = 0$ افقی

۵ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

ب) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

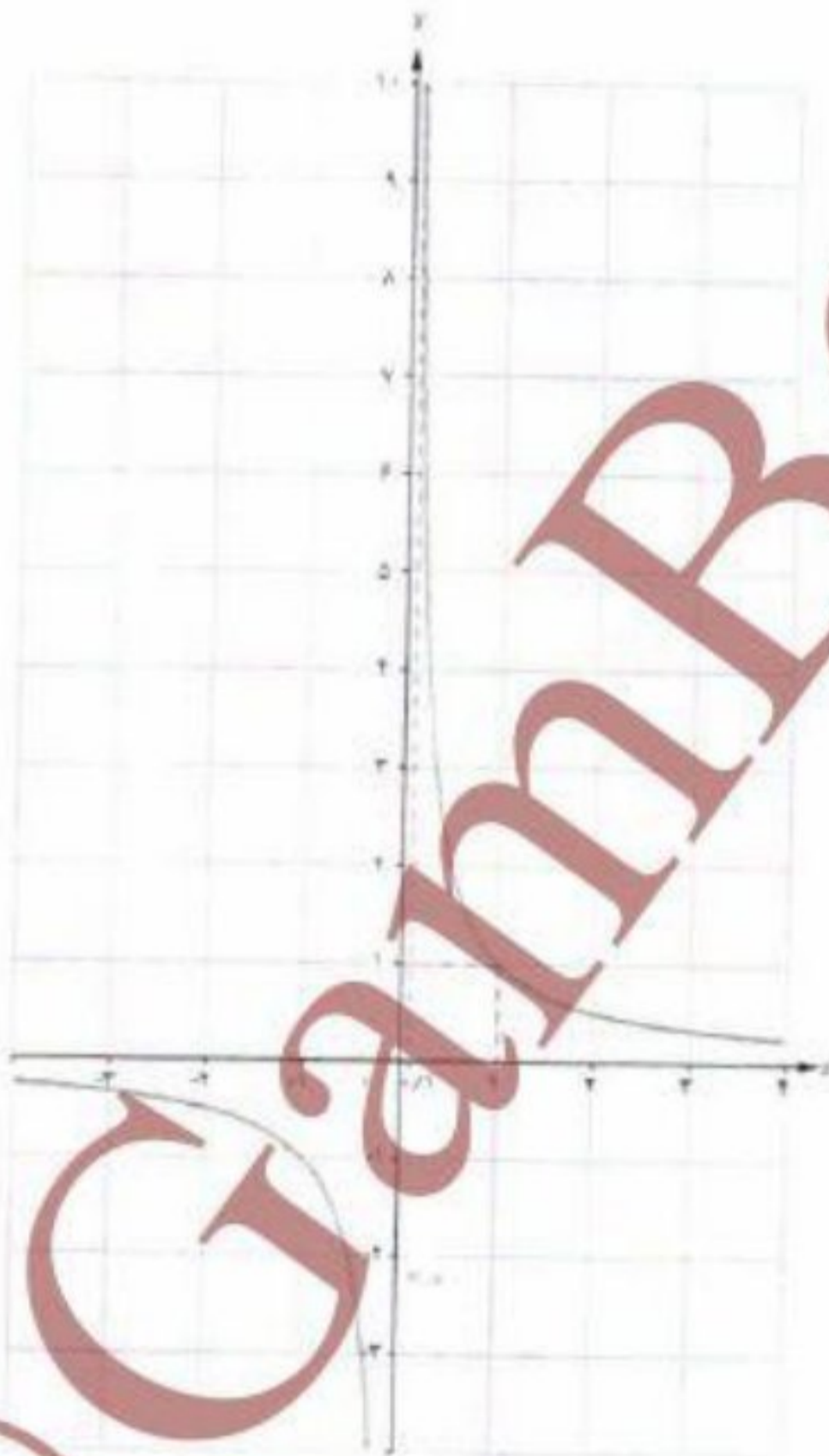


حدهای نامتناهی

درس

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقدارهای $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محدوق یک نقطه آشنا می شویم.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ آشنا شدیم می خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x = 0$ بررسی کنیم.

©

جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد آن را تکمیل کنید.

x	۰/۸	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	... →
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰.۰۰۰	... →

اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟ **یک میلیونیم (۱۰^{-۶})**

وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟ **خیر**
وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ مرتباً بزرگ‌تر می‌شوند
 با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را

به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

تذکره: این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

کاردر کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول زیر را کامل کنید:

x	$\frac{1}{2}$	۰/۲	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	... →
$f(x)$	۲	۰.۵	۱۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	... →

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از 10^6 کوچک‌تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟ **باید $x < 10^{-6}$ باشد**

ب) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ **مقادیر $f(x)$ مرتباً کوچک‌تر می‌شوند**

اما به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند.

ت) در مورد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



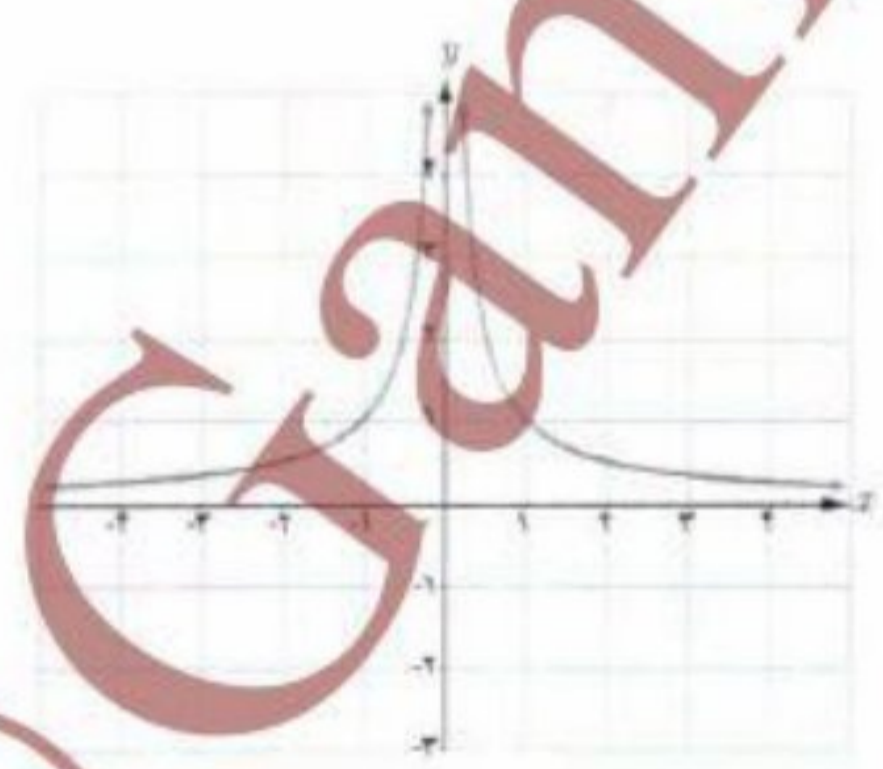
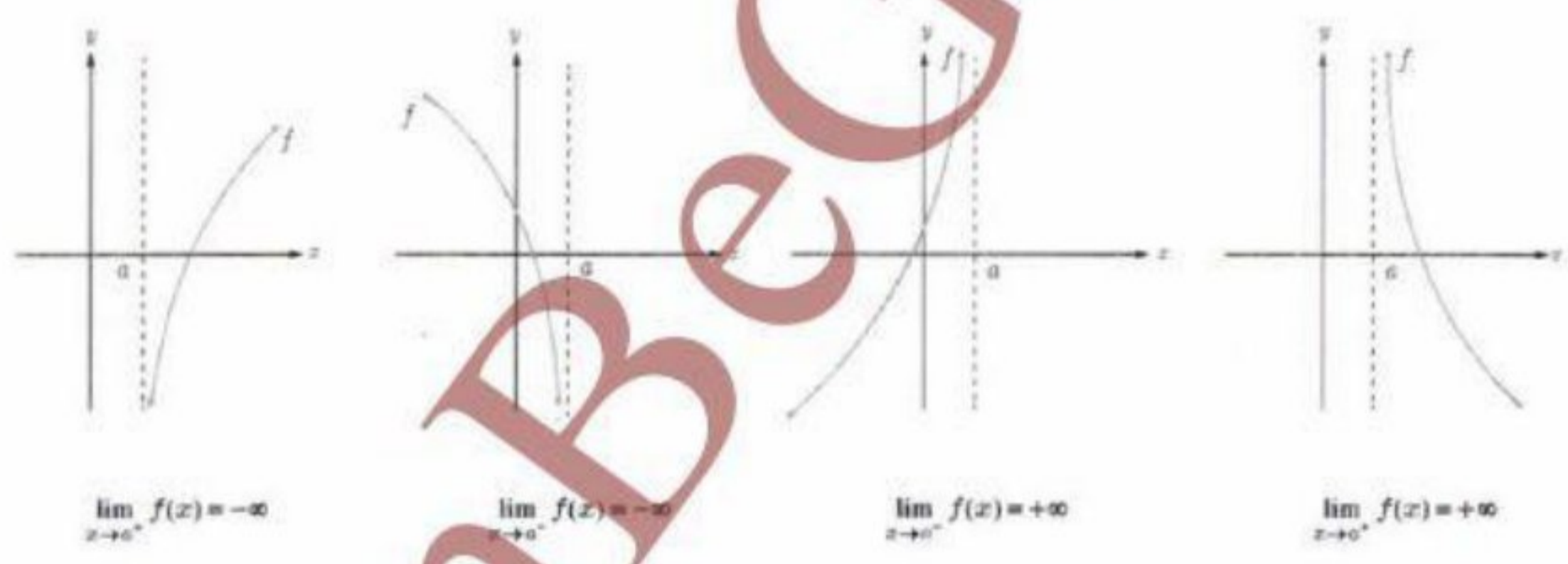
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه‌ی قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تذکره: تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است می‌خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x = 0$ بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید:



فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

x	$-1/5$	$-1/1$	$-1/1$	$-1/0.1$	$\dots \rightarrow$	0	$\leftarrow \dots$	$1/0.1$	$1/1$	$1/1$	$1/5$
$f(x)$	2	10	100	1000	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow \dots$	1000	100	10	2

مشاهده می شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواه بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می نویسیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

تعریف:

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می توانیم a را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حد در مورد تابع هایی که وقتی x به a نزدیک می شود مقدار تابع خیلی کوچک تر می شود در زیر وجود دارد.

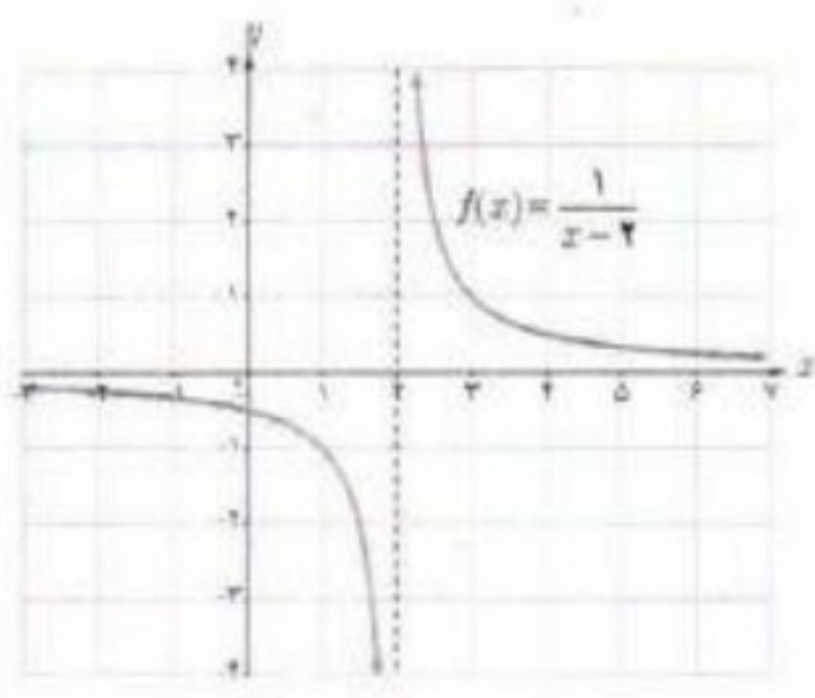
تعریف:

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ یعنی اینکه می توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثال: برای حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

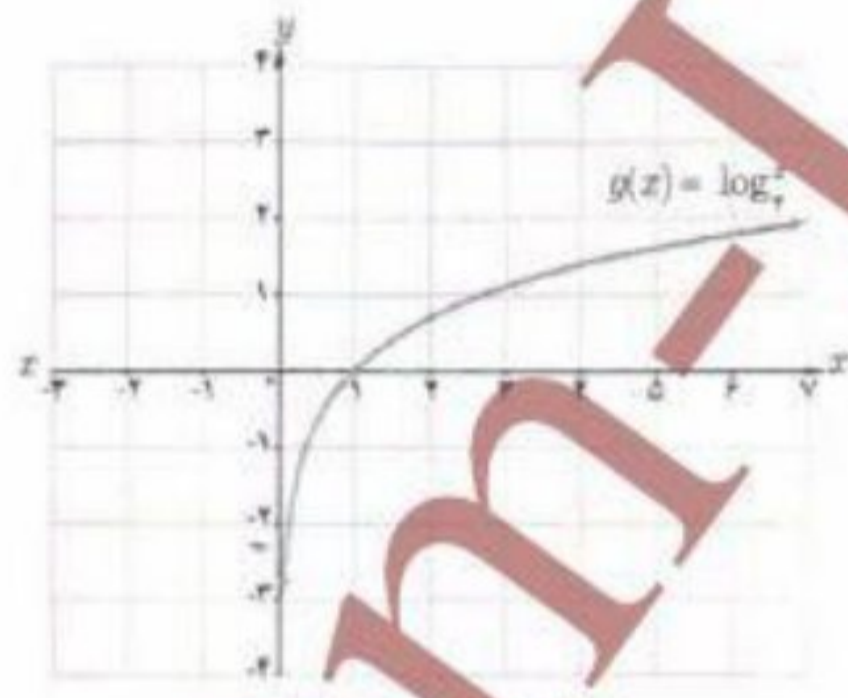
مثال: در مورد حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$

نمودار توابع f و h در شکل های زیر داده شده اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

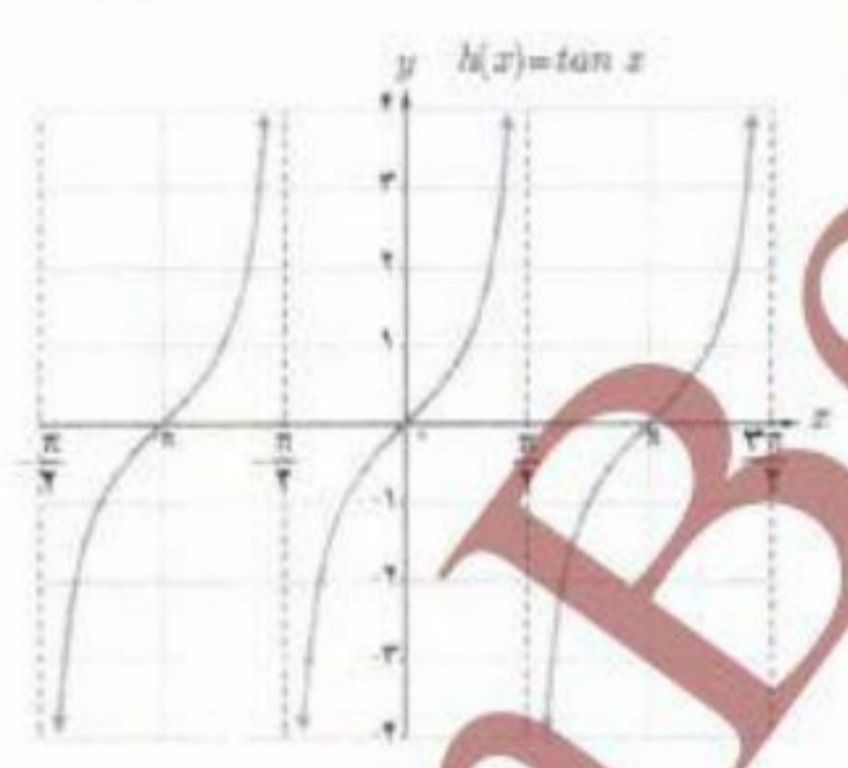
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

نهیته کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

خواندنی

بی نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته های مختلف ریاضیات با تعبیرات مختلف به کار می رود و معمولاً به معنای «فرا تر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به کار می رود و نشانه آن در ریاضیات ∞ می باشد.

این نماد به صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی نهایت به معنای حدی بی پایان است $\infty \rightarrow \infty$ یعنی متغیر x فرا تر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می کند.

بی نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت اند مفهوم فیزیکی بی نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف «برای طرف متفاوت است». به عنوان مثال می گوئیم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی نهایت تشکیل می شود. حال اگر دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی نهایت تشکیل می شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی شود. یعنی بی نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی نهایت فیزیکی است در ریاضیات می گوئیم «بی نهایت مفاداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی نهایت» در نظر گرفته می شود. به عنوان مثال در حد تابع می گوئیم $x \rightarrow \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده ای بزرگ تر باشد.



برخی از فضای حدهای بی نهایت

قضیه ۱: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ عددی زوج باشد،} \\ -\infty & n \text{ عددی فرد باشد.} \end{cases}$$

مثال: با توجه به قضیه فوق می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

قضیه ۲: الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

مثال: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$

کاردر کلاس

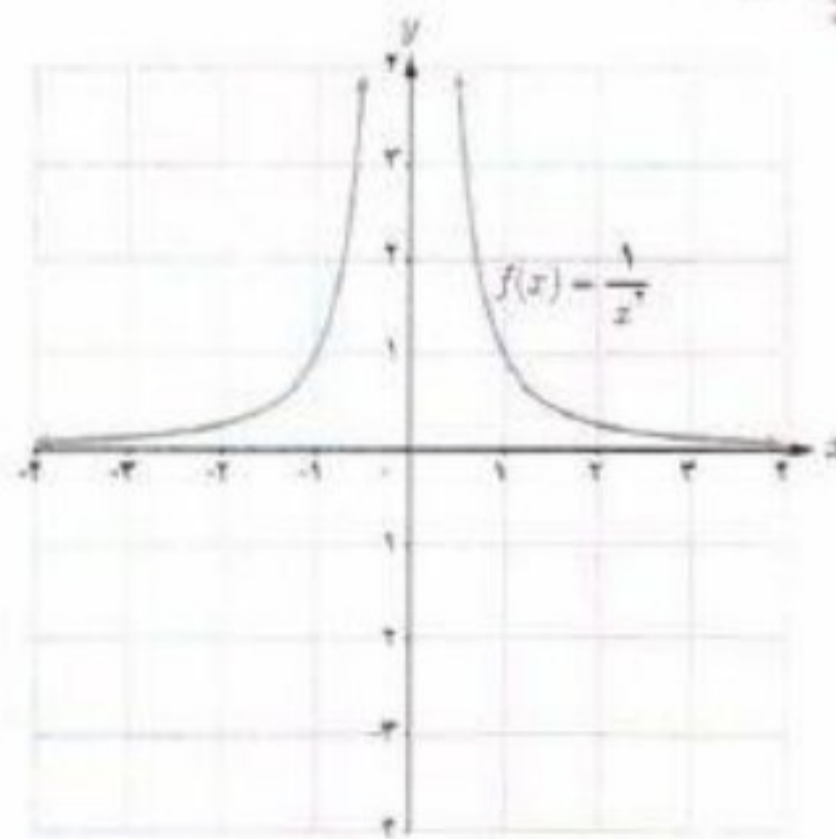
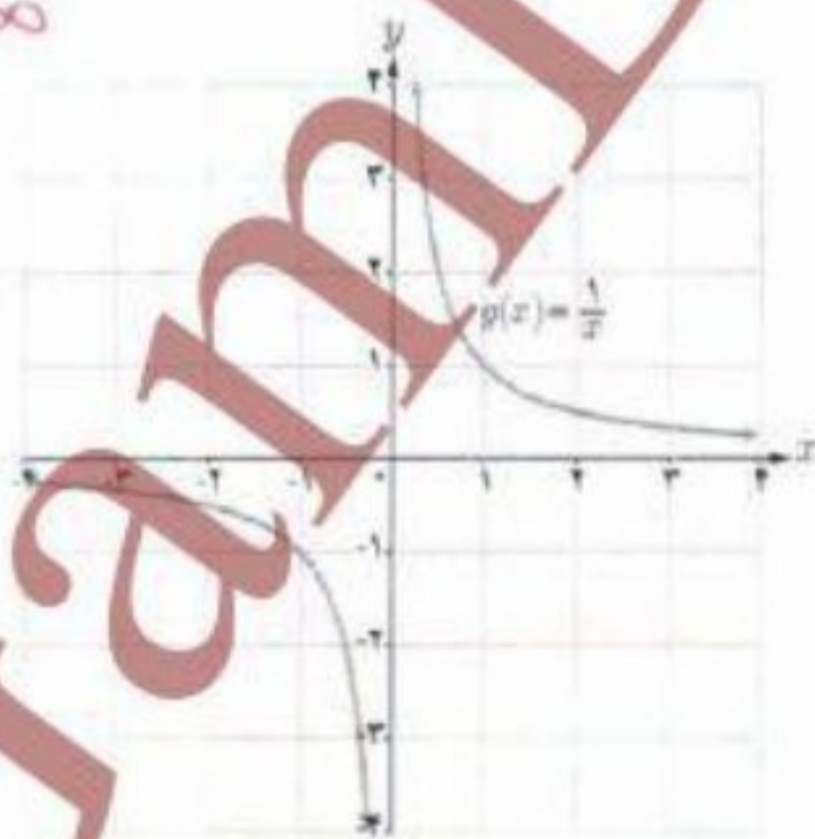
با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین فضای بالای حاصل حدود زیر را به دست آورید. طبق قضیه ۱ $n=1$ (مزا است)

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1}{n} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



۱- ما در این کتاب به بیان برخی از فضای حدهای بی نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی کنیم.



قضیه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن گاه:

الف) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: قضیه ۳ در حالتی که $x \rightarrow a$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی، با ضابطه $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع $(0, 100)$ می‌باشد. مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه ۶۲۰۷۵ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(95) = 24845$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{255x}{100-x} = +\infty$$

توجه به قضیه فوق داریم: و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد 100 مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد. لذا نمی‌توان صد درصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.



سد سبزه عباسپور، اندیکا، خوزستان، کنار سدین سینا

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4-x^2}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که $4-x^2 = (2-x)(2+x)$ وقتی x در همسایگی جب ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty \quad \text{طبق بند (الف) قضیه فوق}$$



مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل: وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر -1 و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در

همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است، در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که حد فوق به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید و چون $x \neq -1$ پس می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کرد.

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

کار در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1-2}{-2+2} = \frac{-1}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[2]-2}{2-2} = \frac{1-2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

قضیه ۴: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (و یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$)، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

تذکر: قضیه فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ را به دست آورید.

حل: در یکی از کار در کلاس‌های قبل به صورت شهودی دیده شد که: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = +\infty$ از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \quad \text{طبق قضیه فوق} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

نوع تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 + 1 = 1$$

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را به دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x)$ را محاسبه کنید.

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x^2} + (x+1) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = +\infty$$

ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ بیان کنید.

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{x^2} \times (x+1) = \frac{x+1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$$

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = -\infty$$

قضیه ۵: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \quad \text{ب)}$$

تذکر: قضیه فوق برای حالتی که $x \rightarrow a'$ با $x \rightarrow a$ نیز برقرار است.

مثال: برای به دست آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1 + \frac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$ را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}$ از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

۱- این قضیه در حالت $L = -\infty$ در این کتاب بررسی نمی‌شود و در آرنشایی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت $L = 0$ در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.



$$\lim_{n \rightarrow a} g(n) = L, \lim_{n \rightarrow a} f(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f+g)(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f \cdot g)(n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow a} (f-g)(n) = +\infty$$

فصل سوم: جدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

در کلاس

توجه کنید!

قضیه ۵ را در حالتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ بازنویسی کنید.

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

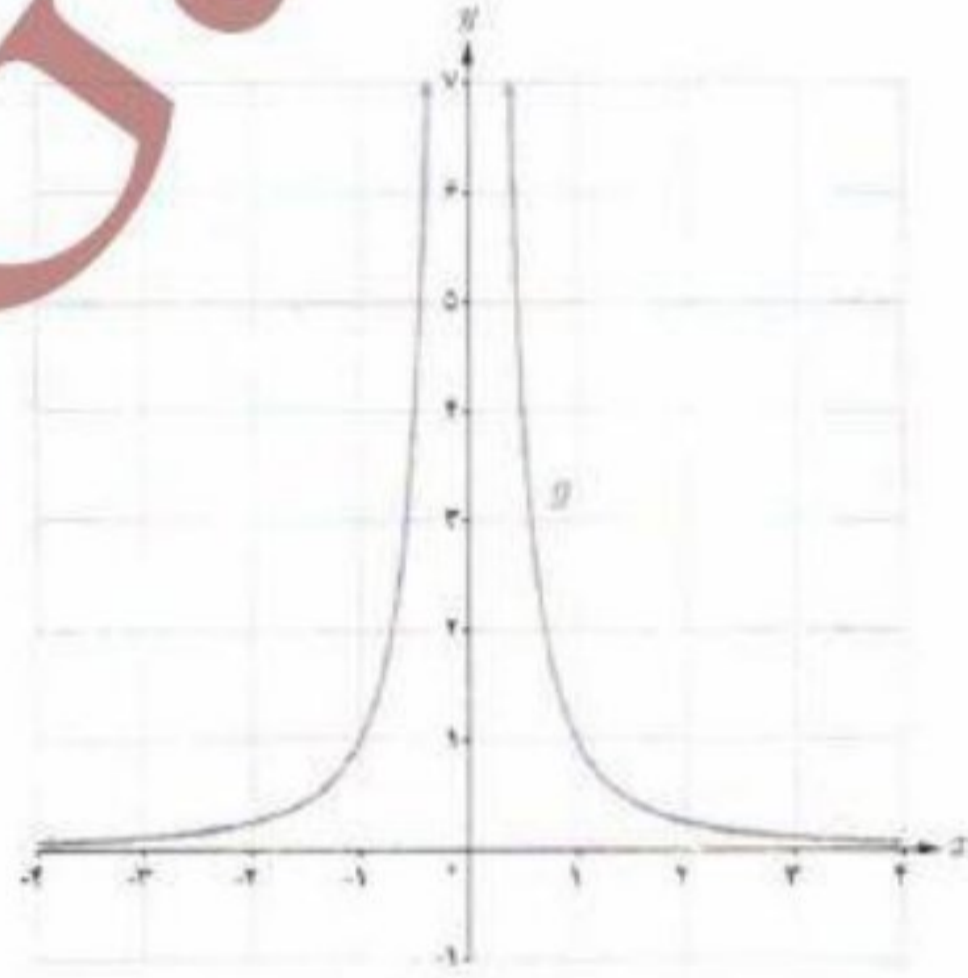
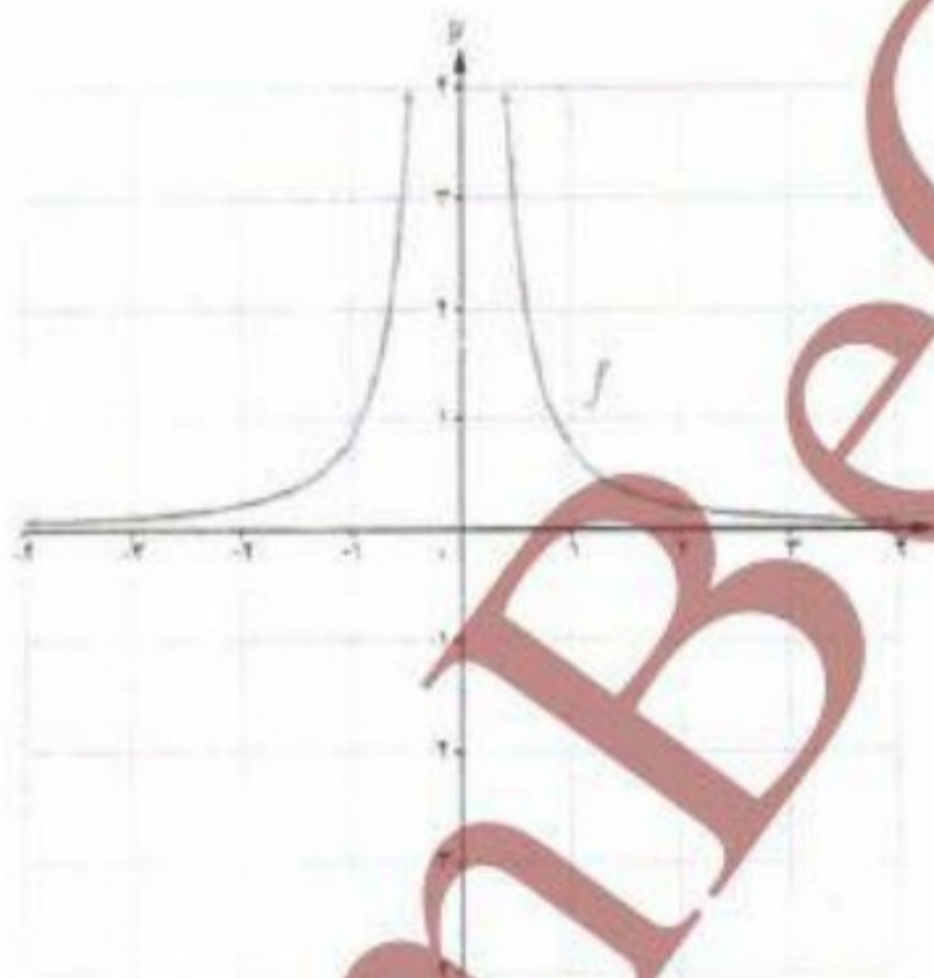
حاصل حدود زیر را به دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = -\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x}) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+4x+4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+2} = \frac{1}{0} = +\infty$ ت) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \cos 2x}{x} = \frac{2 - \cos(0)}{0} = \frac{2-1}{0} = \frac{1}{0} = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+2} = \frac{1}{0} = +\infty$ **مجاناب قائم**

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$ خط $x=0$ را در هر دو منحنی، **مجاناب قائم نمودار** می‌گویند.

تعریف:

خط $x=a$ را **مجاناب قائم نمودار تابع $f(x)$** گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

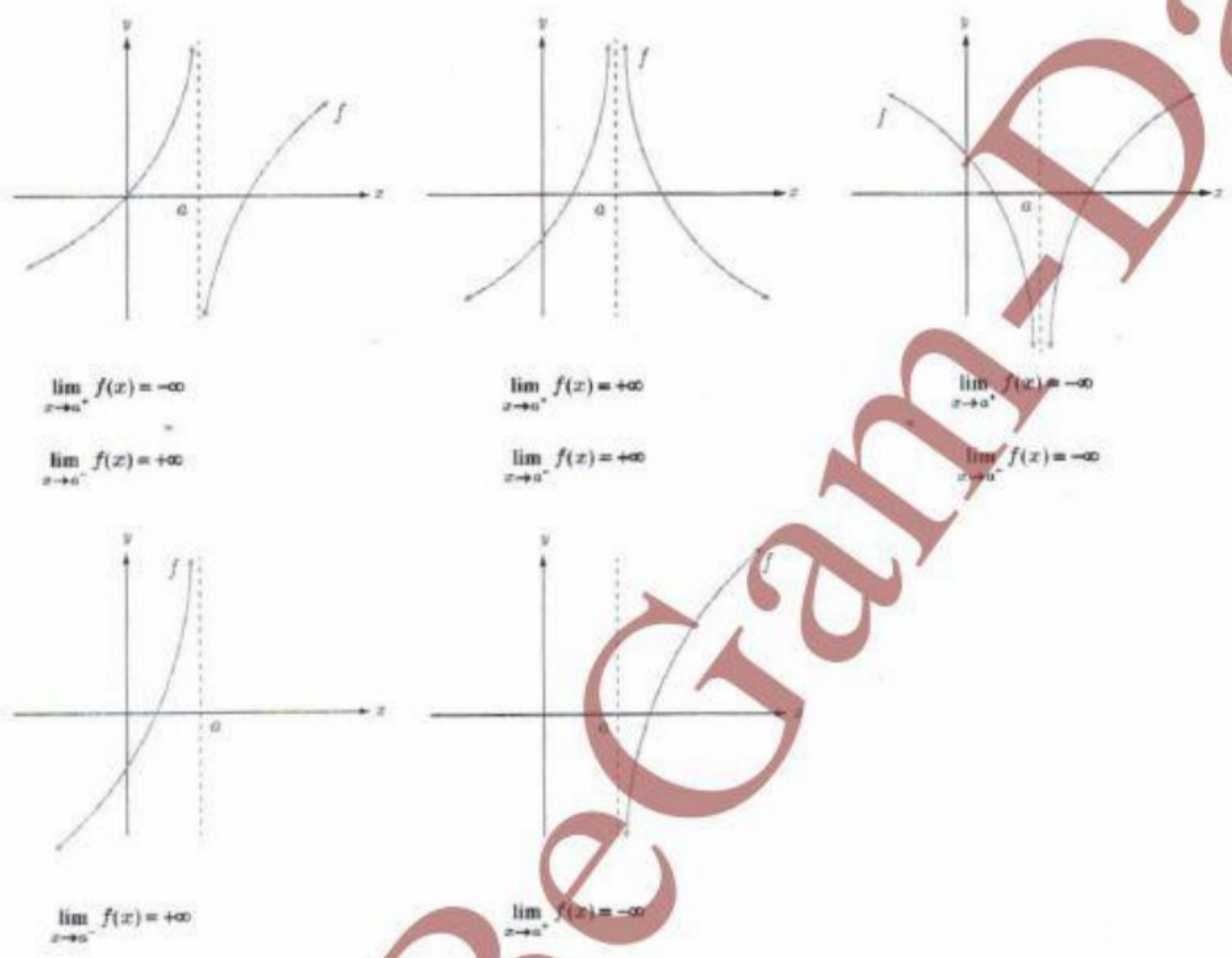
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



مثال: در هر یک از شکل های زیر خط $x = a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



مثال: کدام یک از خطوط $x = -1$ و $x = 3$ مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ می توانستیم بگوییم $x = -1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{4}$$

خط $x = 3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به صورت $x = -1$ دارد.



فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۵۷

مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



پس خط $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت رویه رو خواهد بود.

کار در کلاس

$$x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 4} = \frac{9 - 9 + 2}{9 - 3 - 4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 4} = \frac{4 + 6 + 2}{4 + 2 - 4} = \frac{12}{2} = 6$$

مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 4}$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$x = 3$$

$$x = -2$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$



سوال 1

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3+n^2} = \sqrt{3}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$
 طبق تقسیر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+n^2}}{n^2} = +\infty$

توجه کننده:

گروه ریاضی سطح دوم متوسطه، استان خوزستان

تعریف

با استفاده از فضای اعدادی نامتناهی درستی حدی زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

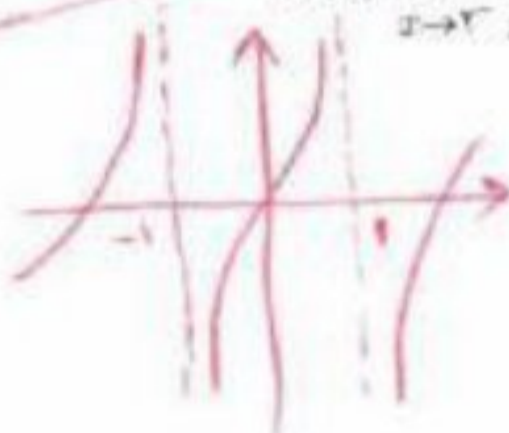
ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{2+x} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

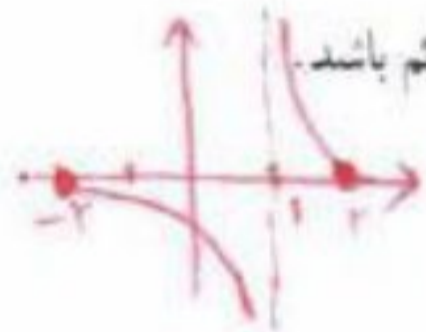
$\lim_{n \rightarrow 2} (1) = 1$
 $\lim_{n \rightarrow 2} (n-2)^2 = 0^+$
 طبق تقسیر $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{1}{(n-2)^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|5-x|}{2+x} = \frac{|5-(-2)|}{2+(-2)} = \frac{7}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -2} (2+x) = 0^+$
 حدی زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{4-4} = \frac{4}{0^+} = +\infty$
 ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \frac{9+6-1}{9+3-12} = \frac{14}{0^+} = +\infty$
 ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{4}{9-9} = \frac{4}{0^-} = -\infty$



نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-2, 2] - \{1\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

مجانب های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

ب) $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

$x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$
 همبندی نیست
 همبندی است

$x=3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2+n}{n^2-n} = \frac{2}{0} = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-n} = \frac{1}{1} = 1$

$x=1$ همبندی قائم است

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

$D_f = (-\infty, 0)$

کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می دهد؟ چرا؟



2

$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{n^2-2n+1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

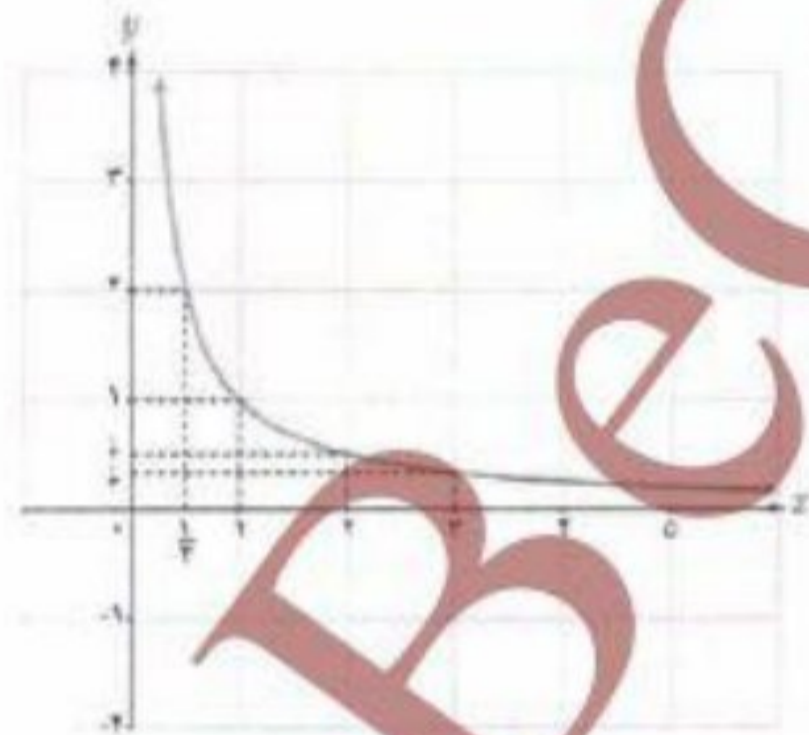
۲

درس

حد در بی نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ‌تر می‌شود. در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (تزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	10^2	10^5	10^6
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-6}

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ‌ها از $\frac{1}{5}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ‌ها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟ ۱۰

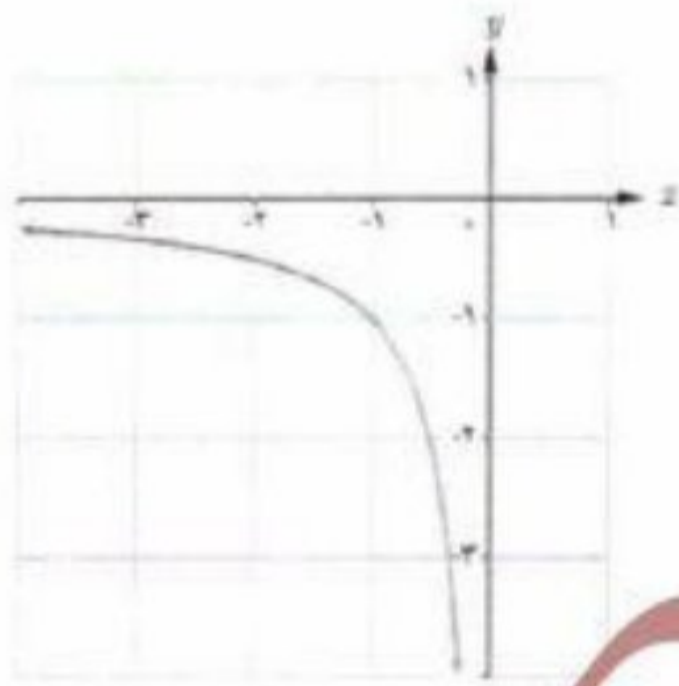
۱۰۰ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{100}$ کوچک تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

۱۰۱ آیا فاصله $f(x)$ تا محور x ها را می توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟ **پلم با آنتی ب لام های بزرگ**

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازه کافی بزرگ اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل کند

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ می نویسیم}$$

کاردر کلاس



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-1	-2	-5	-10	-100	-1000	-10000	...
$f(x)$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{10000}$...

۱ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها کمتر از $\frac{1}{10}$ شود x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۳

۱ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{100}$ کمتر شود x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟ -۱۰۰

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول بالا می توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک تر (یعنی از هر عدد منفی

کوچک تر) شود آن گاه $f(x)$ را می توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



تذکره : منظور از $x \rightarrow \pm\infty$ آن است که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل به طور خلاصه می توان نوشت :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

تعریف :

- اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، می گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

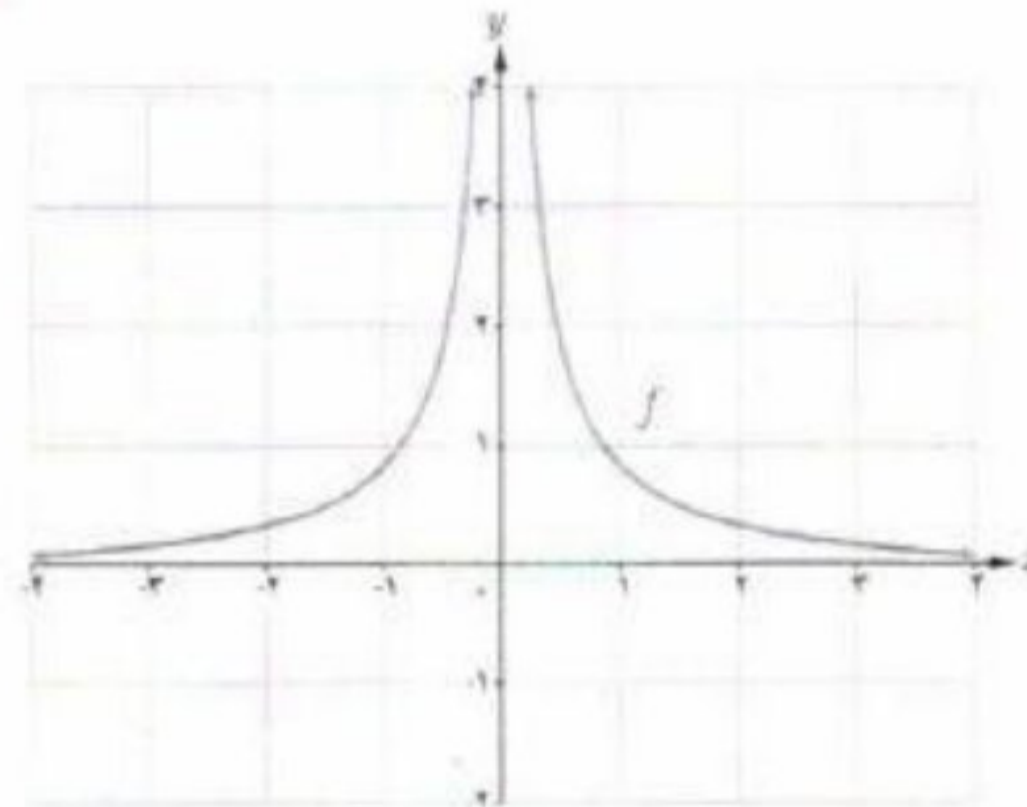
کار در کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

قضیه ۶: اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$

مثال: حاصل هر یک از حدود $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{2x^3}$ برابر صفر است.

قضیه ۷: اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \cdot L_2$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ (با فرض $L_2 \neq 0$)

تذکر: قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند نیز برقرار است.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{5}{x^3})$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4}$

حل:

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{5}{x^3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$$

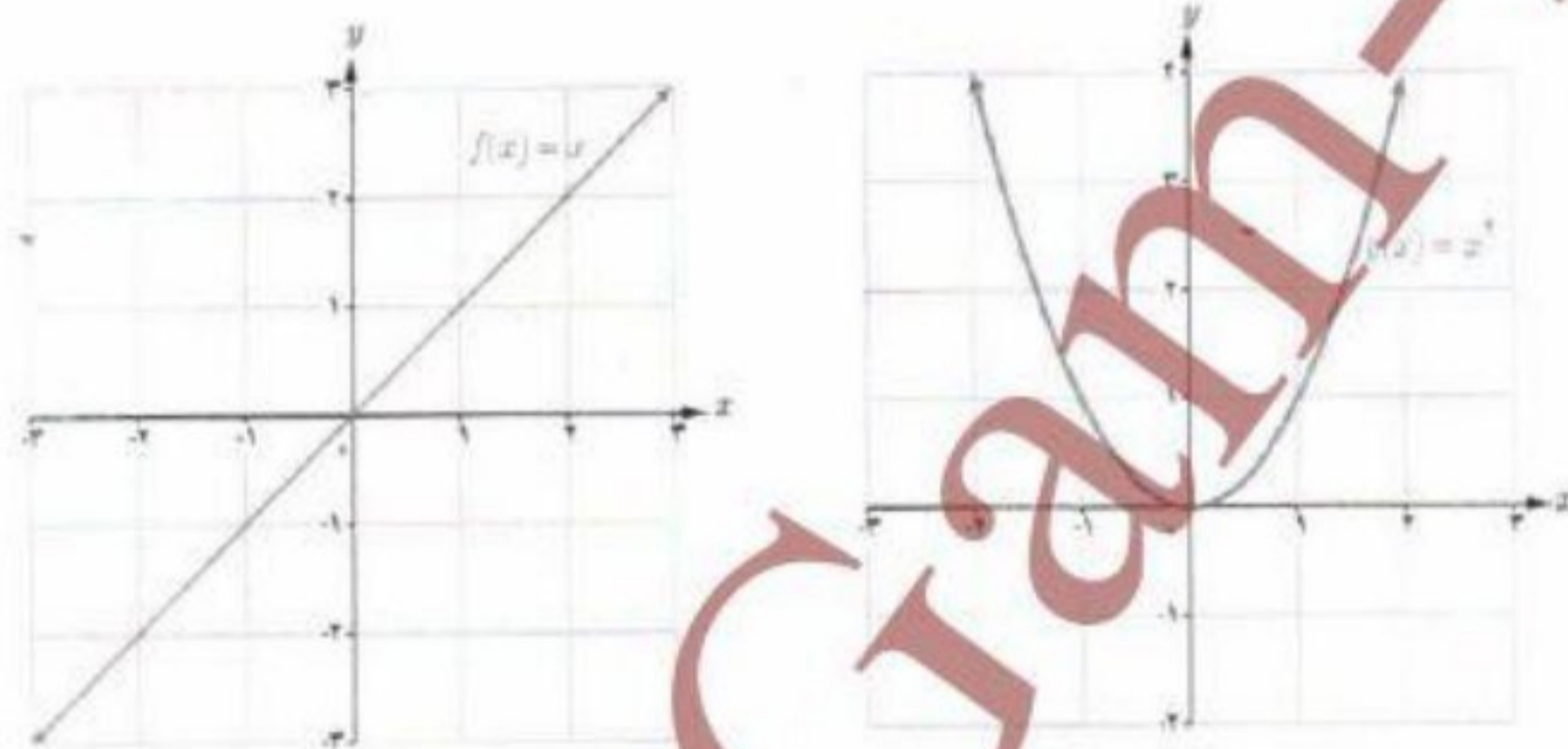
ب) با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$



حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ‌تر شوند همان‌طور که در نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در شکل زیر دیده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.



همچنین با کوچک شدن مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک‌تر می‌شود. در نمودارهای بالا می‌توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود.

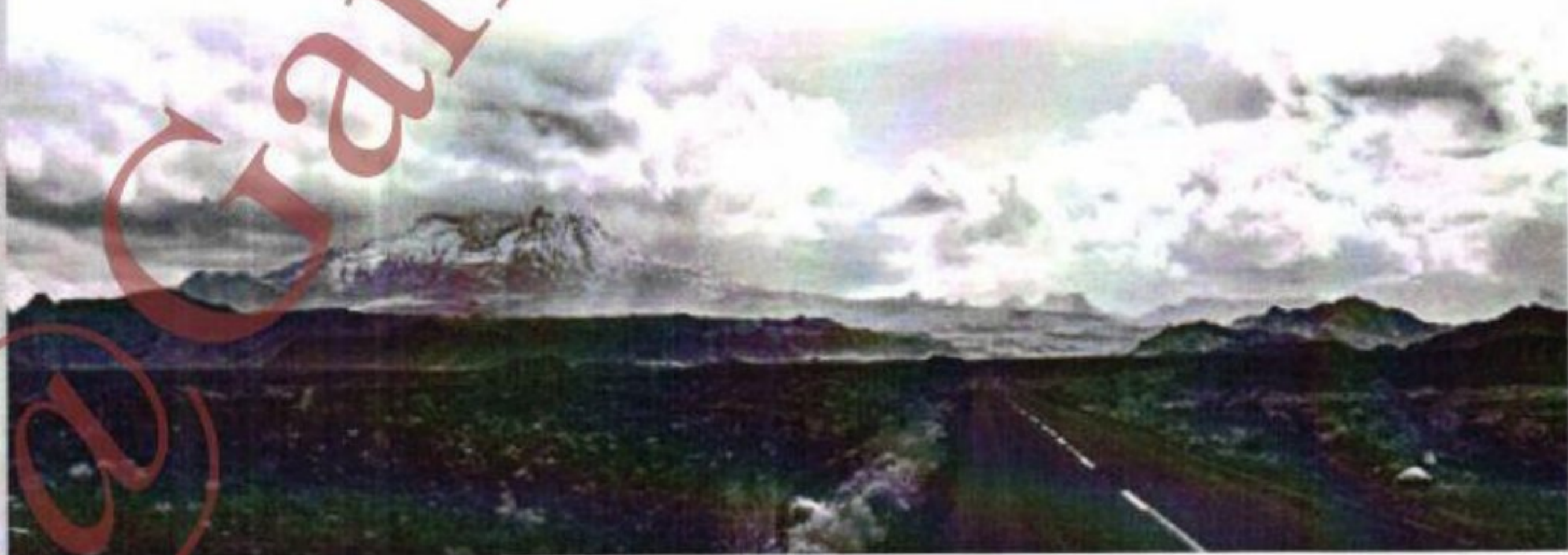
در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{برای مثال } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

همچنین اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می‌گوییم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ به عنوان مثال } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$



$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = +\infty$ یعنی کاهش مقدار n مقادیر $f(n)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگتری شود
 $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = -\infty$ یعنی کاهش مقدار n مقادیر $f(n)$ از هر عدد متن دلخواهی کوچکتری شود

۶۲

کاردر کلاس

۱ مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ را بیان کنید.

۲ با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x$ حدود زیر را مشخص کنید.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

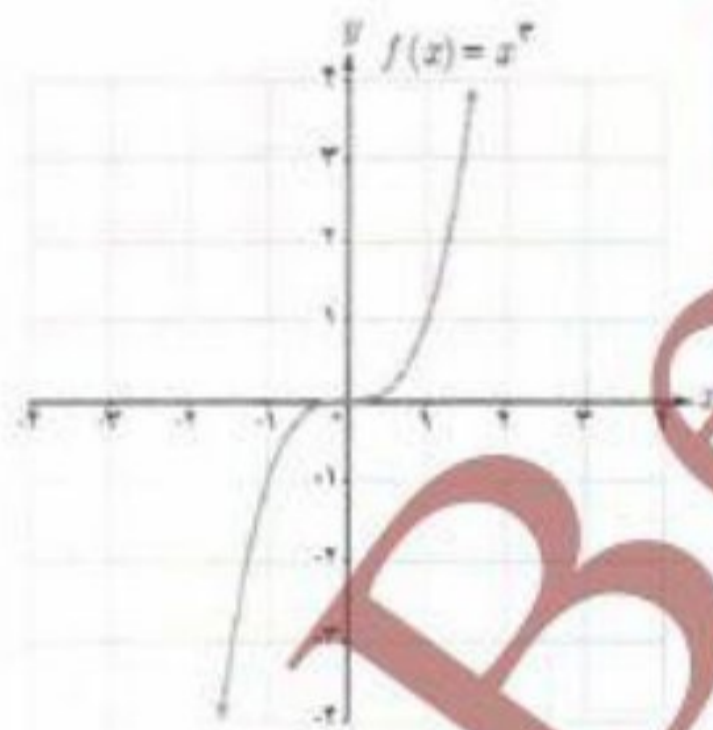
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

نیه کنه:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

تابع $f(x) = x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$\dots \leftarrow$	-10^4	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^4	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	$(-10^4)^3$	$(-1000)^3$	$(-100)^3$	$(-1)^3$	1^3	10^3	100^3	1000^3	$(10^4)^3$	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش) x ، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ با افزایش (کاهش) $f(x)$ افزایش (کاهش) x می‌یابیم.

۳ در مورد حدهای $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 = -\infty$



❖ قضیه ۸ : اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ (ب) اگر } n \text{ فرد باشد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \text{ : (الف) اگر } n \text{ زوج باشد :}$$

❖ قضیه ۹ : اگر l عددی حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۹ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ قضیه ۱۰ : اگر l عددی حقیقی و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ آن‌گاه،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ تذکر : قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ مثال : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$

حل :

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

به‌طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

شکل کلی: $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

در کلاس

الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

الف) $m > n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

ب) $m < n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

ج) $m = n \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

نکته:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به کمک نتیجه قسمت قبل حد‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^3 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{4x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$

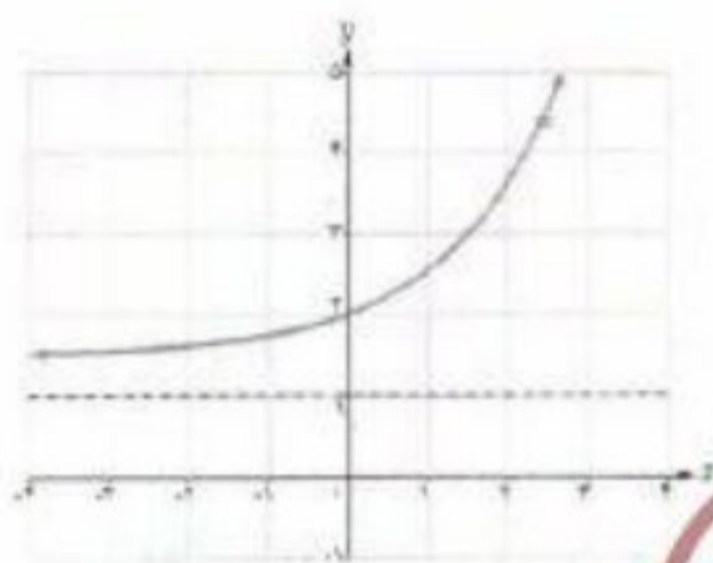


مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$
 برقرار باشد.

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟



مثال: مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

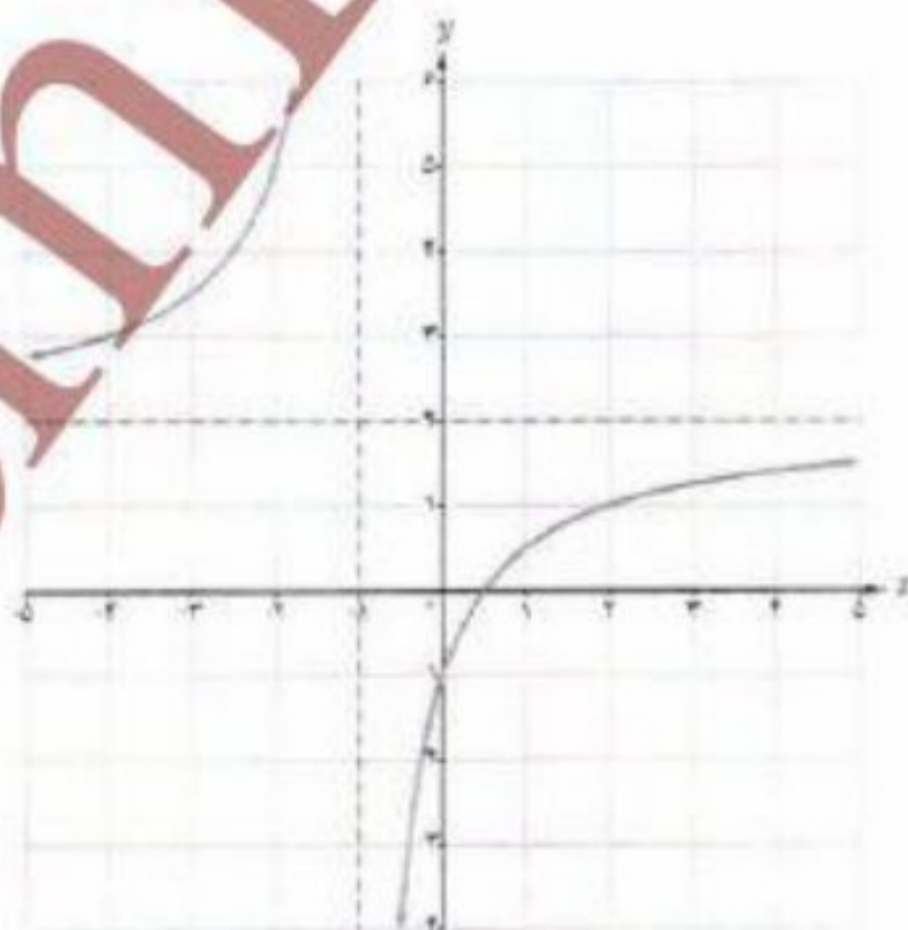
حل: برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم داریم:

پس خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

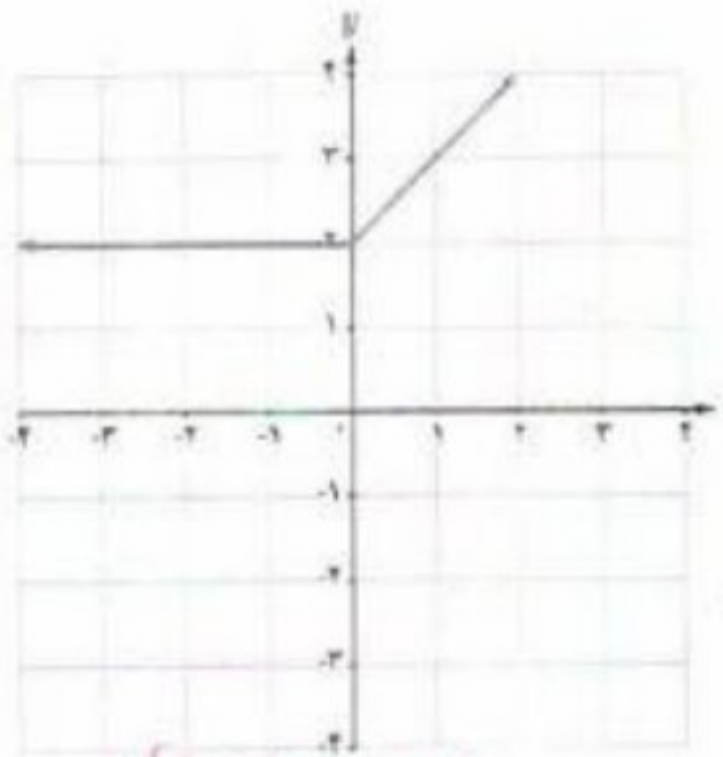
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$$

این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -1$ مجانب قائم تابع است زیرا:

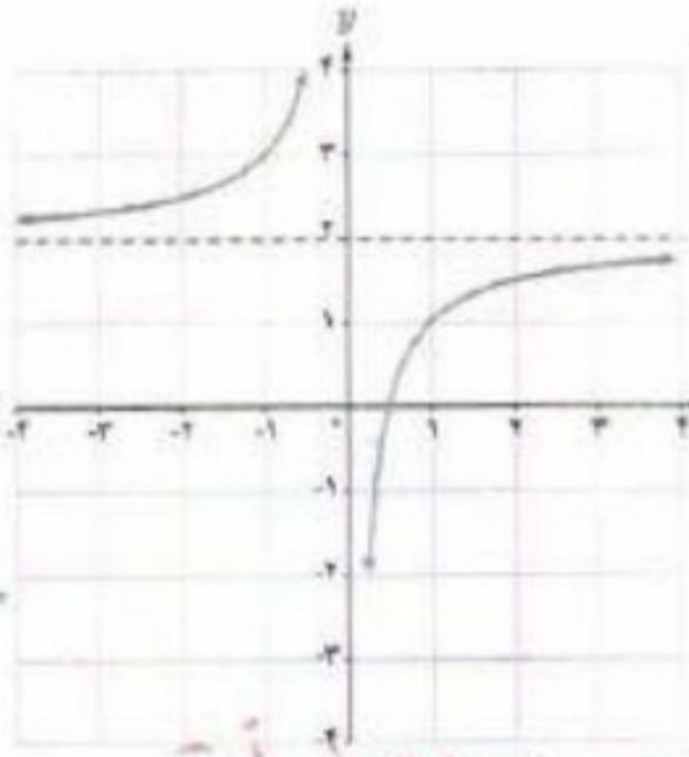
نمودار تابع به‌صورت زیر است.



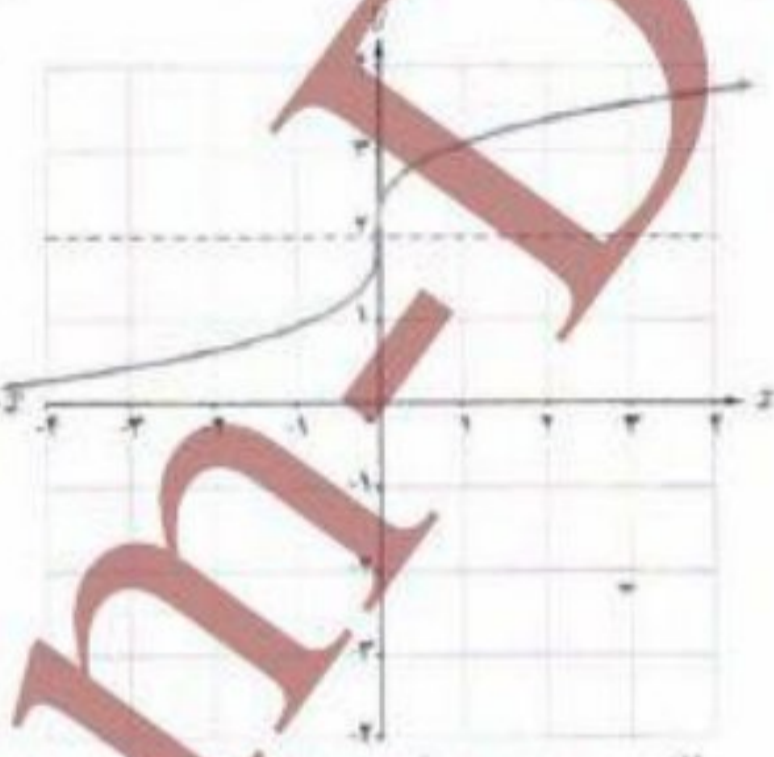
۱ کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی دارد؟ آن را مشخص کنید.



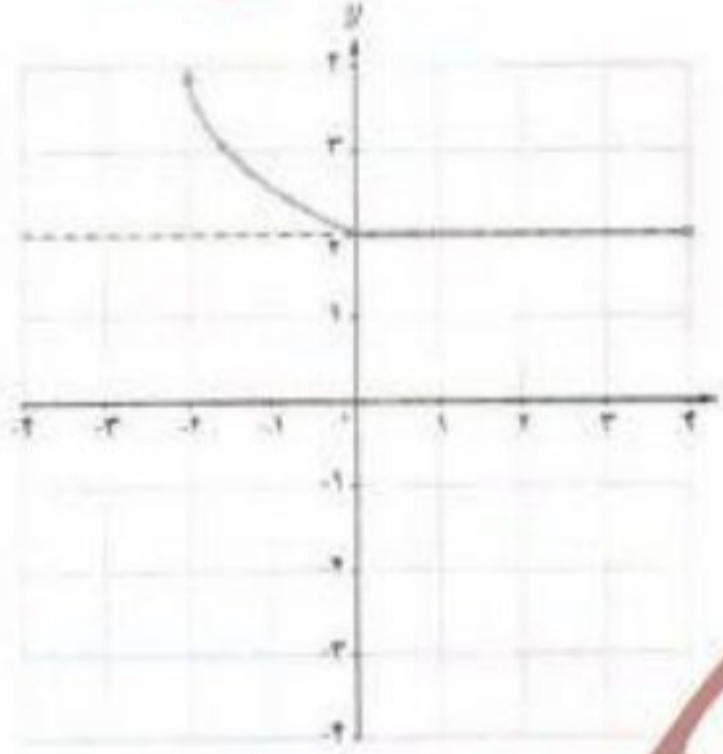
ب) مجانب افقی ندارد



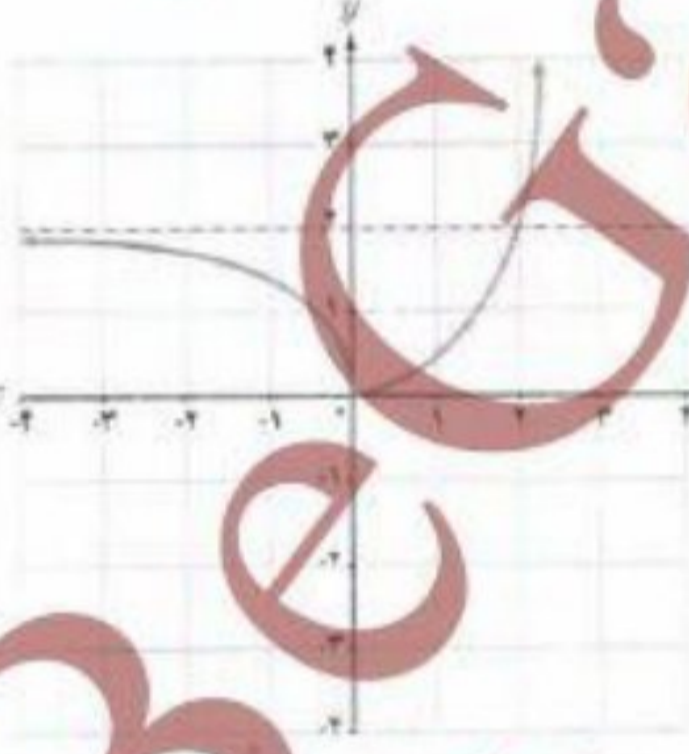
ب) $y=2$ مجانب افقی



الف) مجانب افقی ندارد



ب) مجانب افقی ندارد



ت) $y=2$ مجانب افقی

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲ مجانب های افقی و قائم تابع های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{n+1}{n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{n} = 0$

مجاذب افقی: $y=0$

ب) $g(x) = x^2$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} n^2 = \pm \infty$

مجاذب افقی ندارد.

ب) $h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

$y = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{n^2-1}{n+1} = \pm \infty$

مجاذب افقی ندارد.



تمرین

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

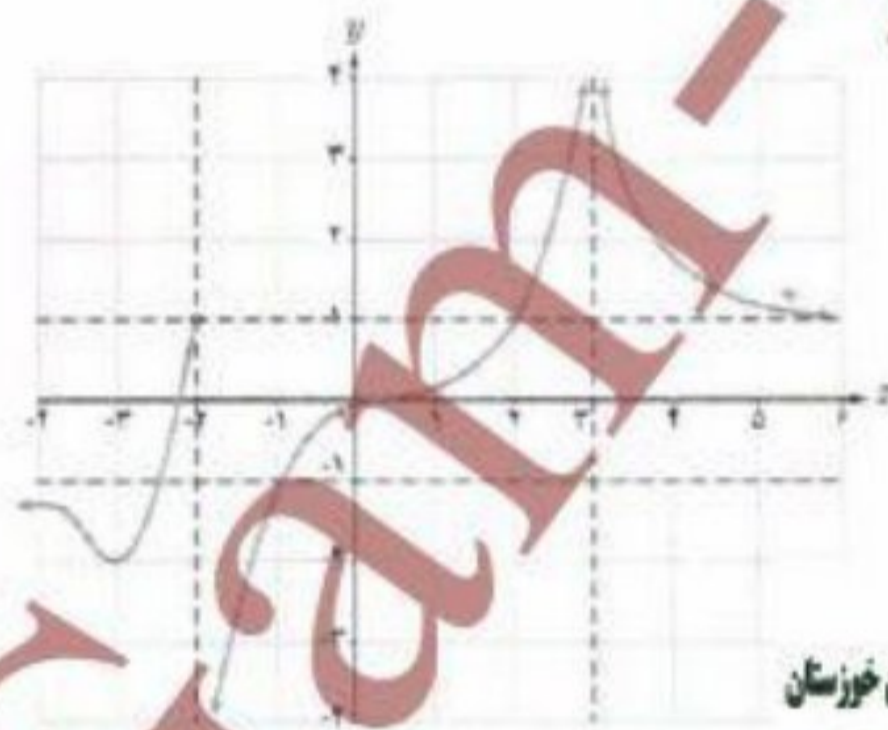
الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

هر چه مقدار x بزرگتر شود مقدار $f(x)$ به دور ۲ نزدیک می‌شود.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

هر چه مقدار x کوچکتر شود مقدار $f(x)$ به دور ۴ نزدیک می‌شود.

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:



توجه کننده:

گروه ریاضی دبیران متوسطه، استان خوزستان

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

مجاانب‌های افقی و قائم (ج)

$x = -2$ و $x = 2$ می‌باشد
 $y = 1$ و $y = -1$ افقی

۳ حاصل حدود زیر را به دست آورید:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{n} = 3$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$

$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1}$

$= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{-n^2}{4n} = -\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$

$= \lim_{n \rightarrow -\infty} n^3 = -\infty$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3}$

$x = 3$ می‌باشد
 $y = 2$ افقی

ب) $y = \frac{x}{x^2-4}$

$x = 2$ و $x = -2$ می‌باشد
 $y = 0$ افقی

ب) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

$x = 1$ و $x = -1$ می‌باشد
 $y = -2$ افقی

ت) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

می‌باشد
 $y = 0$ افقی

۵ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

ب) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.



مشتق

- ۱ آشنایی با مفهوم مشتق
- ۲ مشتق پذیری و پیوستگی
- ۳ آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

فصل



ماهواره بر سیمرغ پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

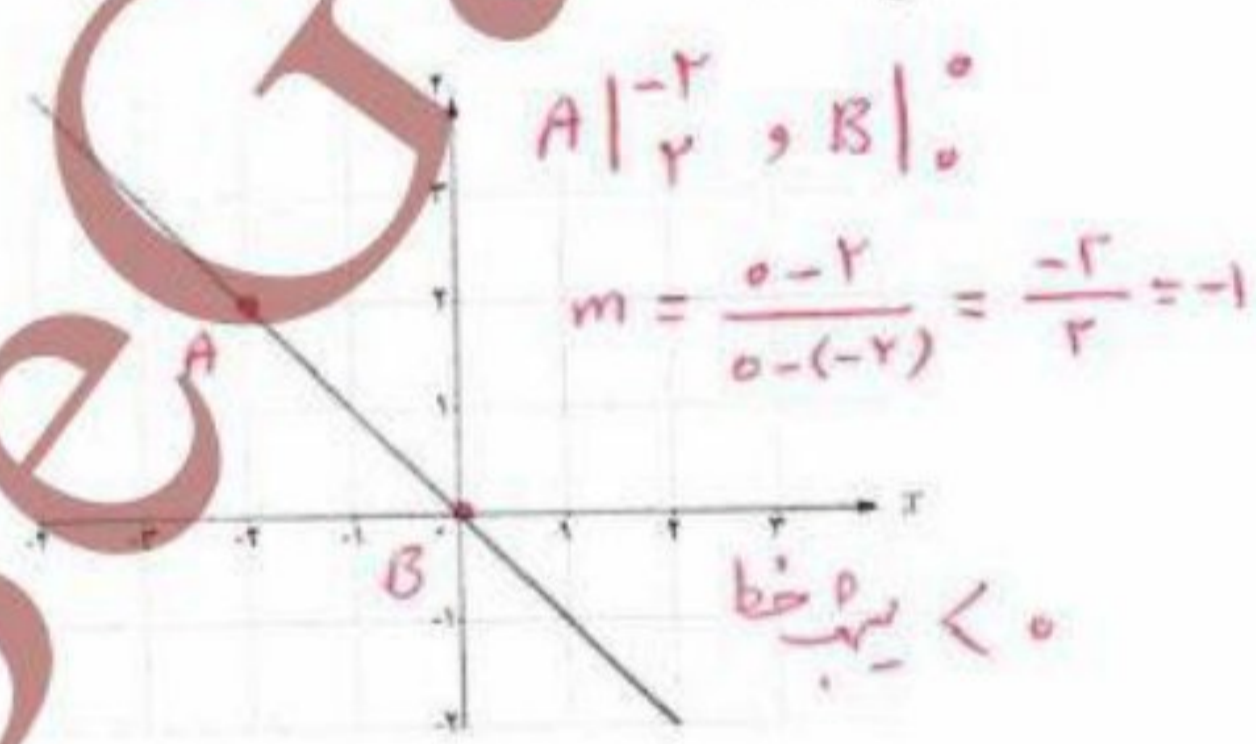
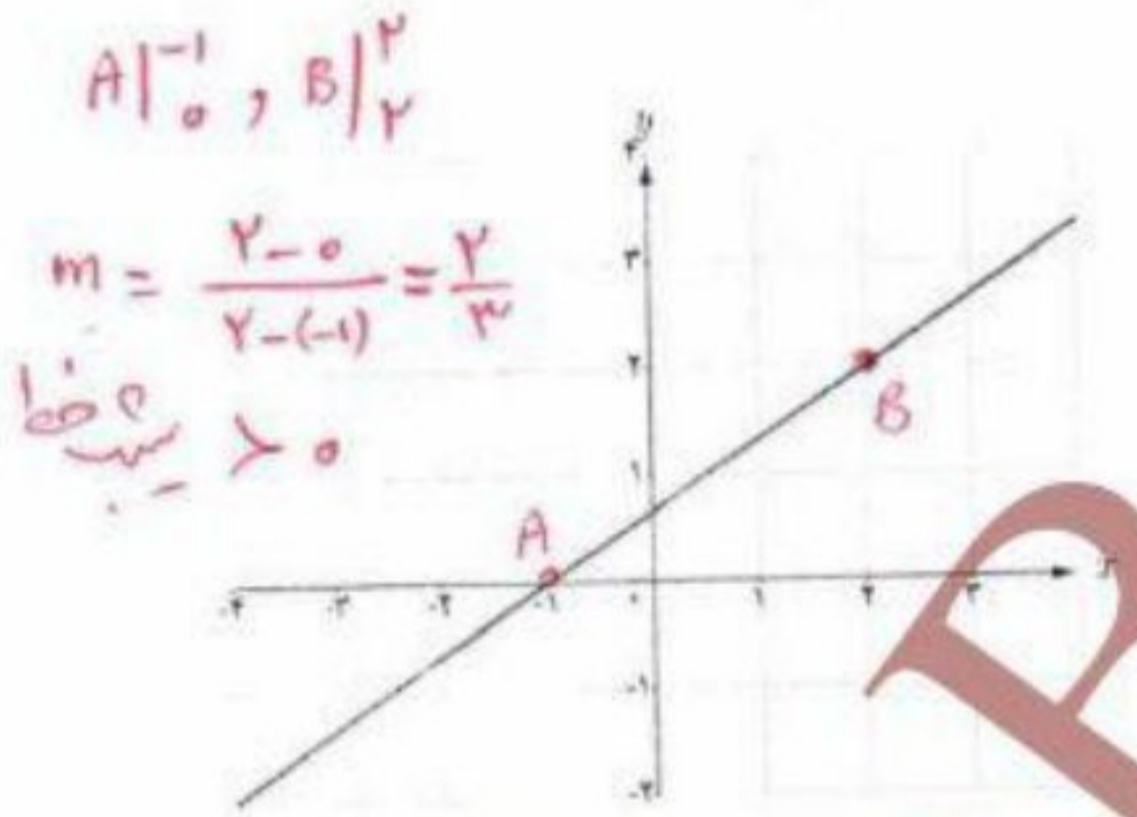


آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به سبب یک خط مربوط می شود. به کمک این ایده به تدریج به صورت دقیق تری با مفهوم مشتق آشنا می شویم.

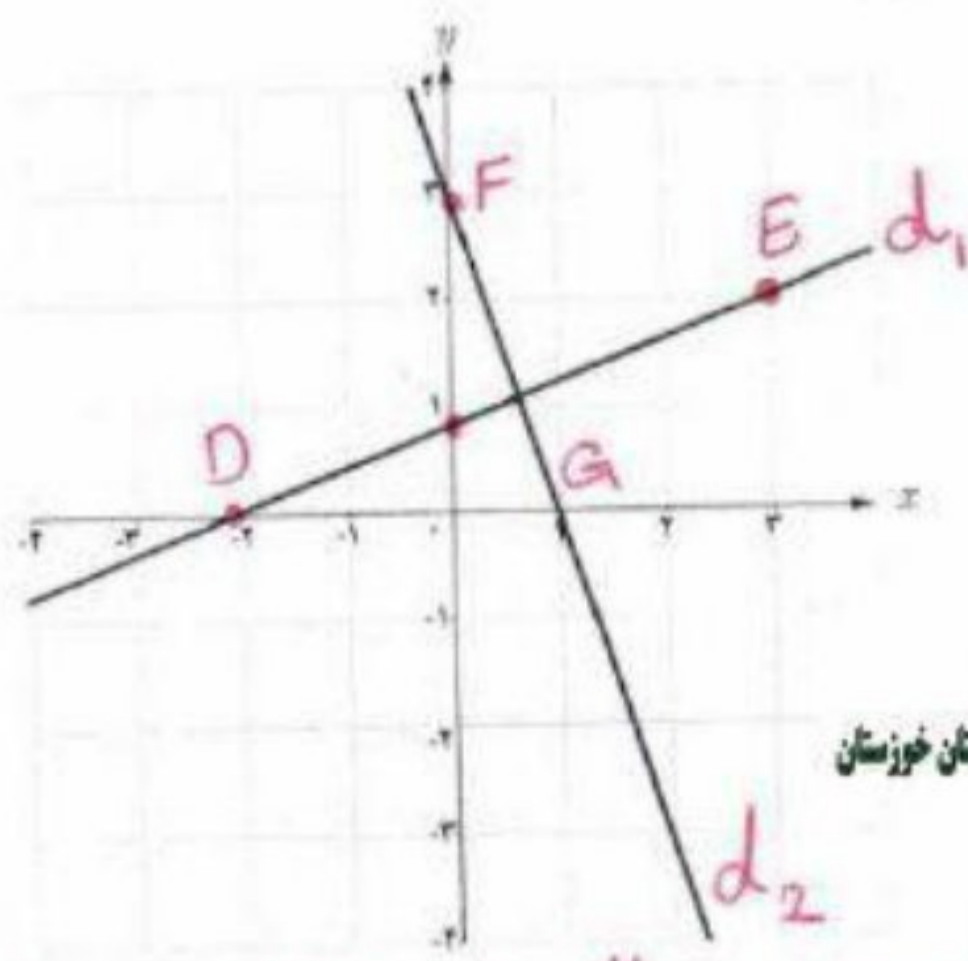
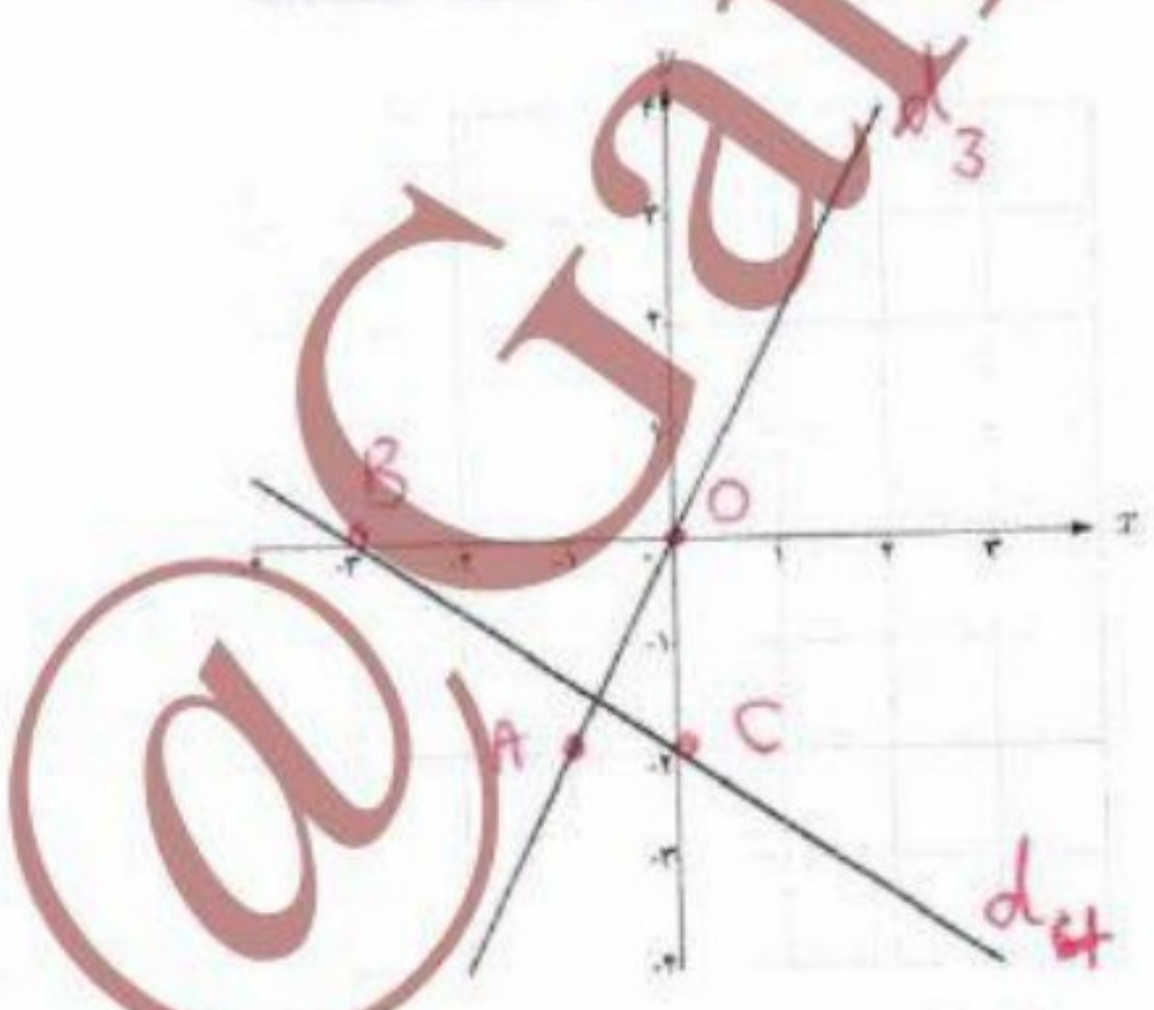
مثال

1. سبب هر یک از خط‌های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



خط	d_1	d_2	d_3	d_4
سبب	$\frac{2}{3}$	-1	2	$-\frac{2}{3}$

2. با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1, d_2, d_3, d_4 را روی شکل مشخص کنید.



نویسنده: گروه ریاضی دانش‌آموزی، استان خوزستان

$A|_0^{-1}, C|_0^0 \rightarrow m = \frac{0-(-2)}{0-(-1)} = 2 = md_3$

$B|_0^{-3}, D|_0^0 \rightarrow m = \frac{-2}{3} = md_4$

$D|_0^0, E|_2^2 \rightarrow m = \frac{2}{2} = md_1$

$A|_0^0, F|_2^3 \rightarrow m = \frac{3}{-1} = md_2$

خط مماس بر یک منحنی

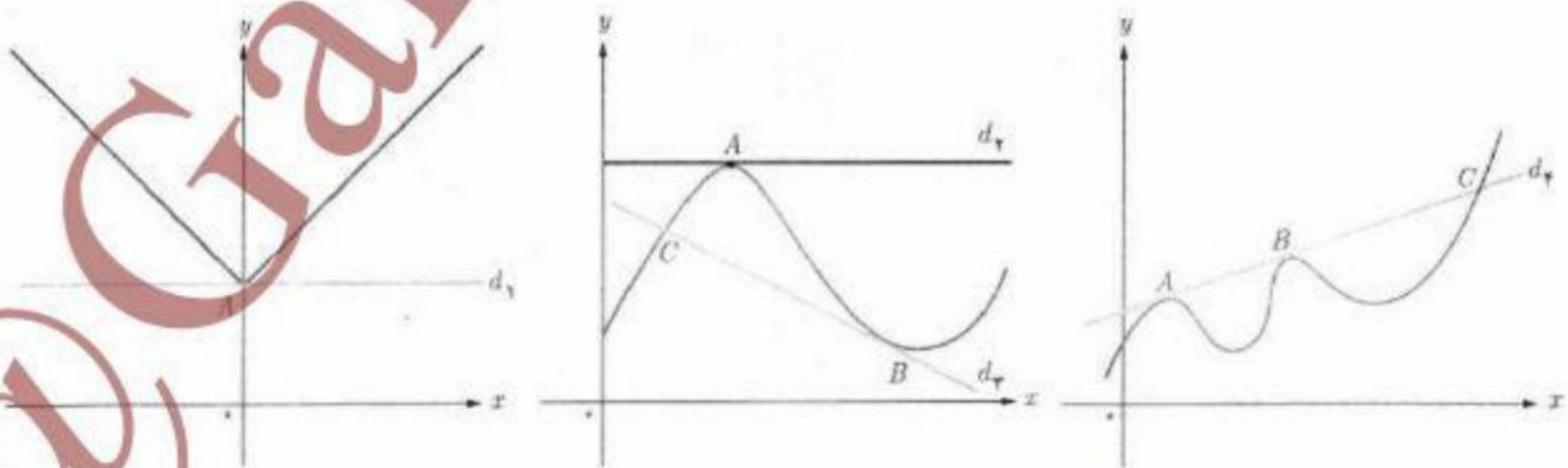


یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خواندنی

از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۳۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

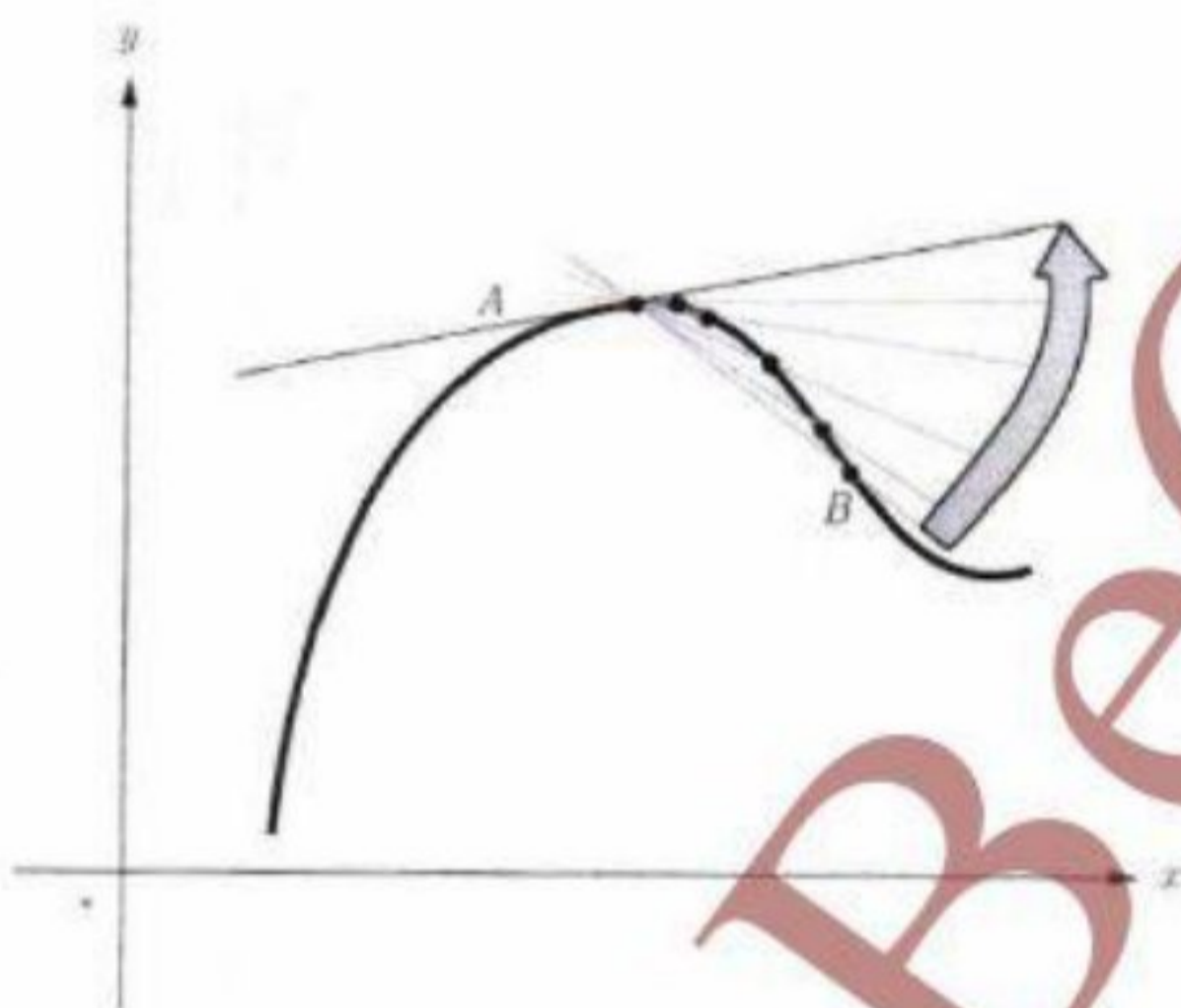
خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_4 در نقطه A ، خط d_3 در نقطه B و خط d_2 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



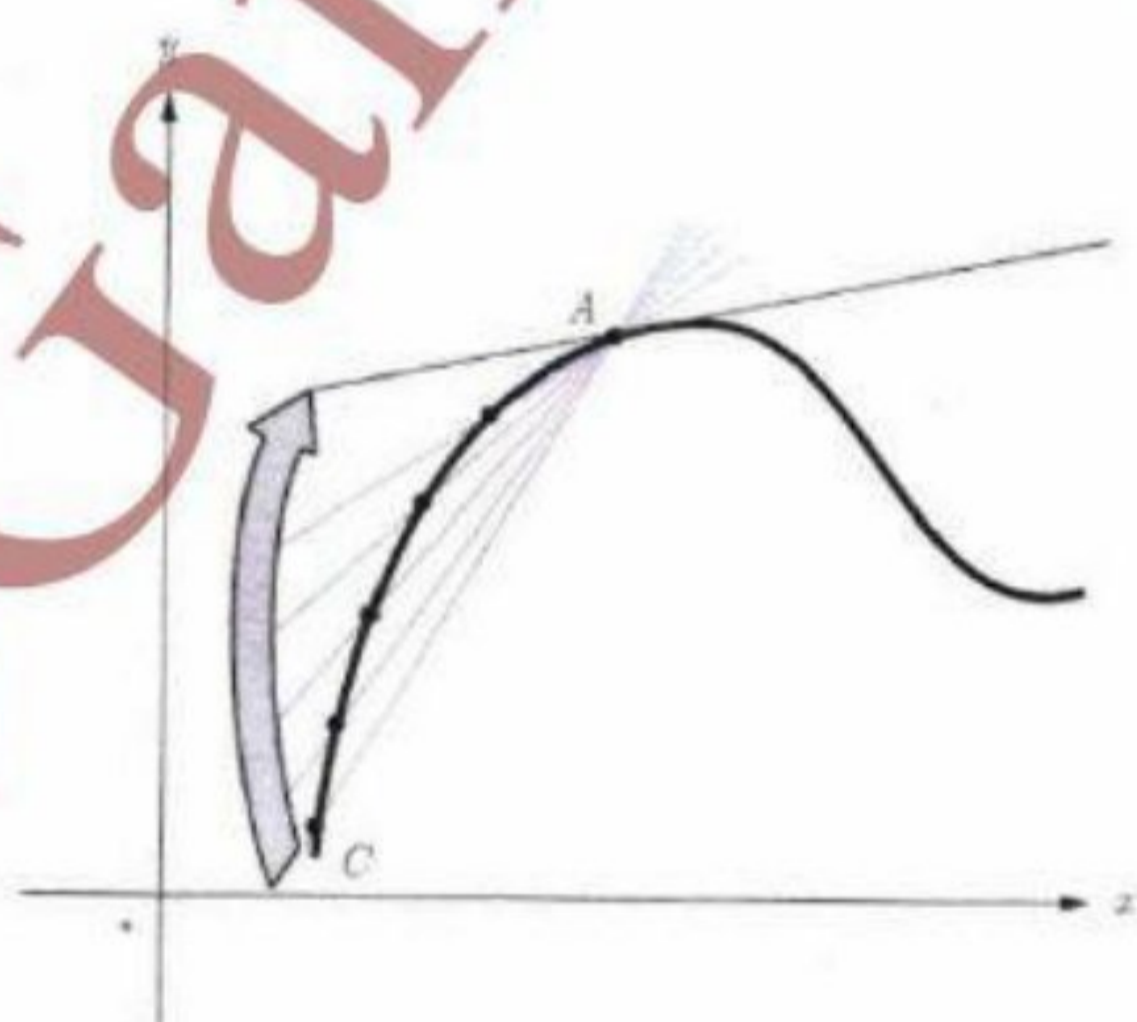
اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ **خط مماس**

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به طور شهودی می‌توان گفت: **خط مماس نزدیک می‌شوند.**

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



تهیه کننده:



در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف) تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ داده شده است، اگر $0 \leq x \leq 10$ نقاط $A(2, f(2))$ ، $B(6, f(6))$ ، $C(5, f(5))$ ، $D(4, f(4))$ و $E(3, f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$A | 2 | 16$ ، $B | 6 | 24$ ، $C | 5 | 25$ ، $D | 4 | 16$ ، $E | 3 | 9$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به دست آورید.

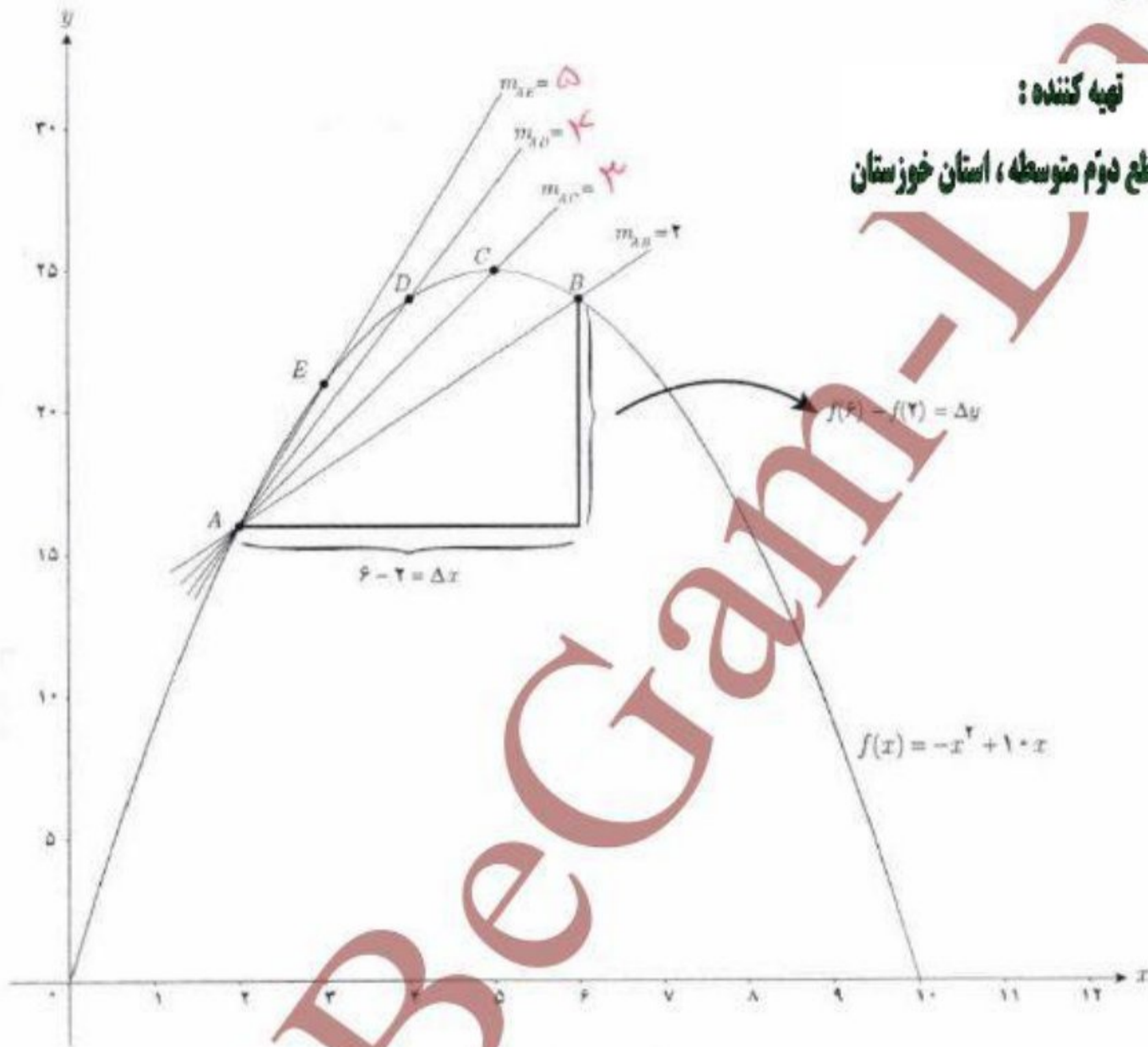
$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{25 - 16}{5 - 2} = 3$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{16 - 16}{4 - 2} = 0$$

$$m_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{9 - 16}{3 - 2} = -7$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

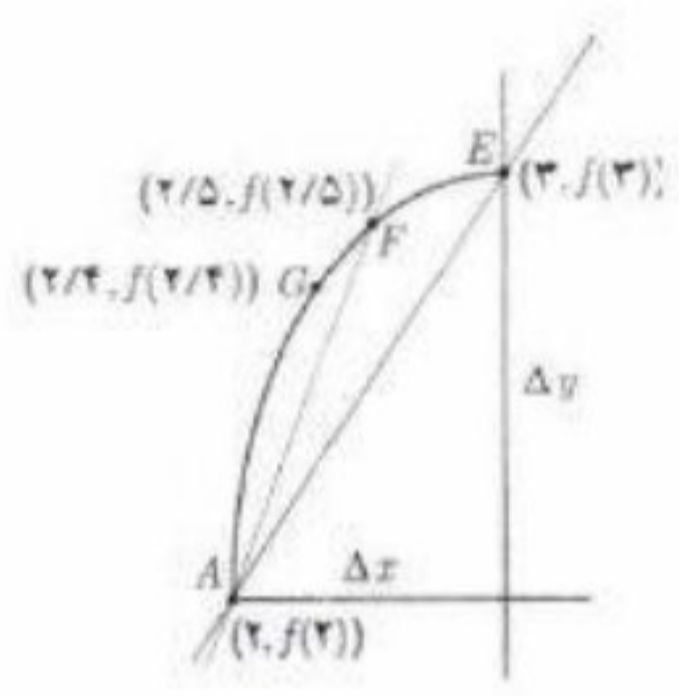


همان طور که می دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را بر تغییر افقی به دست می آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می کنند؟

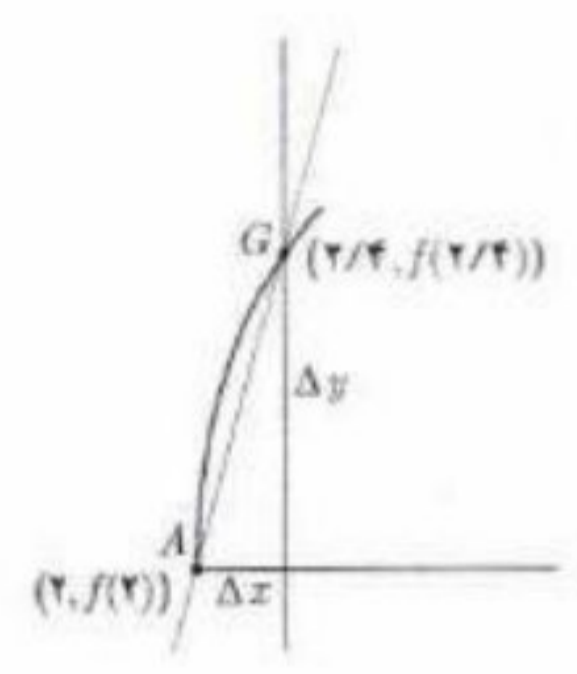
$[2, 6]$	۲ ————— ۶	$\Delta x = 6 - 2 = 4$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 5]$	۲ ————— ۵	$\Delta x = 5 - 2 = 3$	$\Delta y = 25 - 16 = 9$
$[2, 4]$	۲ ————— ۴	$\Delta x = 4 - 2 = 2$	$\Delta y = 24 - 16 = 8$
$[2, 3]$	۲ ————— ۳	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	$\Delta y = 21 - 16 = 5$



$$m_{AF} = \frac{f(2.5) - f(2)}{2.5 - 2}$$

$$= \frac{18.75 - 16}{0.5}$$

$$= \frac{2.75}{0.5} = 5.5$$



$$m_{AG} = \frac{f(2.4) - f(2)}{2.4 - 2}$$

$$= \frac{18.24 - 16}{0.4}$$

$$= 5.6$$

با حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه [۲, ۳] رسم شده است.

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه [a, b]	شیب خطی که از نقاط (a, f(a)) و (b, f(b)) می‌گذرد.
[۲, ۲.۴]	$\frac{f(2.4) - f(2)}{2.4 - 2} = \frac{18.24 - 16}{0.4} = 5.6$
[۲, ۲.۳]	$\frac{f(2.3) - f(2)}{2.3 - 2} = \frac{17.75 - 16}{0.3} = 5.83$
[۲, ۲.۲]	$\frac{f(2.2) - f(2)}{2.2 - 2} = \frac{17.16 - 16}{0.2} = 5.8$
[۲, ۲.۱]	$\frac{f(2.1) - f(2)}{2.1 - 2} = \frac{16.59 - 16}{0.1} = 5.9$
[۲, ۲.۰۱]	$\frac{f(2.01) - f(2)}{2.01 - 2} = \frac{16.0599 - 16}{0.01} = 5.99$
[۲, ۲.۰۰۱]	$\frac{f(2.001) - f(2)}{2.001 - 2} = \frac{16.005999 - 16}{0.001} = 5.999$
⋮	⋮

[۲, ۲+h]
 یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \longrightarrow ?$$

مقدار به دست آمده به $\frac{2}{5}$ نزدیک می‌شوند.



اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$ کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 1 \cdot (2+h) - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(h^2 + 4h + 4) + 2 + 1 \cdot h - 16}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 2 + 1 \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 6h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(-h - 6) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h - 6) = 6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، $[1/5, 2]$ ، $[1/6, 2]$ ، $[1/7, 2]$ ، $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$ ، $6/4$ ، $6/3$ ، $6/2$ ، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به

قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت:

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$f(3) = -(3)^2 + 10(3) = -9 + 30 = 21$$

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2) = 6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x) = -x^2 + 10x$ محاسبه شده است:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 10(3+h) - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 30 + 10h - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 4) = 4$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

حل: با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد:

کاردرکلاس

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه ای به طول 2 بنویسید.

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 3 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4$$

تذکر: با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خطهای قاطع می توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به دست آورد، به طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می گذرد برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

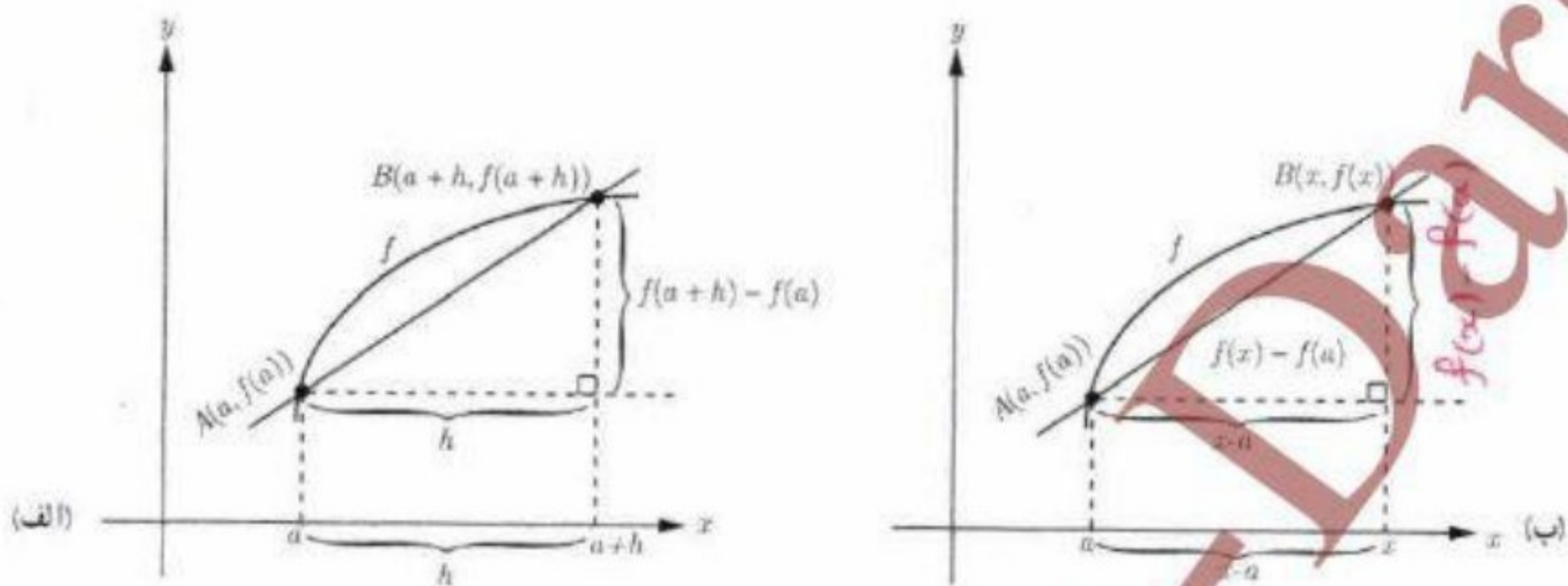
و از آنجا:

مثال: اگر $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(2)$ را از دستور بالا به دست آورید.

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2 + \Delta x)^2 + 10(2 + \Delta x) - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 - 4\Delta x - \Delta x^2 + 20 + 10\Delta x - 16}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-\Delta x + 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 6) = 6$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ به صورت: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x = a$ می یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده تر می کند.



با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم:

$$AB \text{ خط شیب} = m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$A \text{ در منحنی بر مماس خط شیب} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x, f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$AB \text{ خط شیب} = m_{AB} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به

$$a \text{ نزدیک شود). به عبارت دیگر: } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مثال: اگر $f(x) = x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به دست آورید.

حل:

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h}$$

روش اول:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

روش دوم:

$$f(1) = -(1)^2 + 10(1) = 9 \quad f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-9)}{x-1} = -9$$

$$f(5) = -(5)^2 + 10(5) = 25 \quad f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 10x - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)^2}{x-5} = 0$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد. معادل بودن این دو روش را به شیوه هندسی ملاحظه نمودید. در کار در کلاس بعد به شیوه جبری نیز معادل بودن دو روش بالا را بررسی کنید.

کار در کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اگر قرار دهیم $a+h=x$ پس $a+h=x$ و $h=x-a$

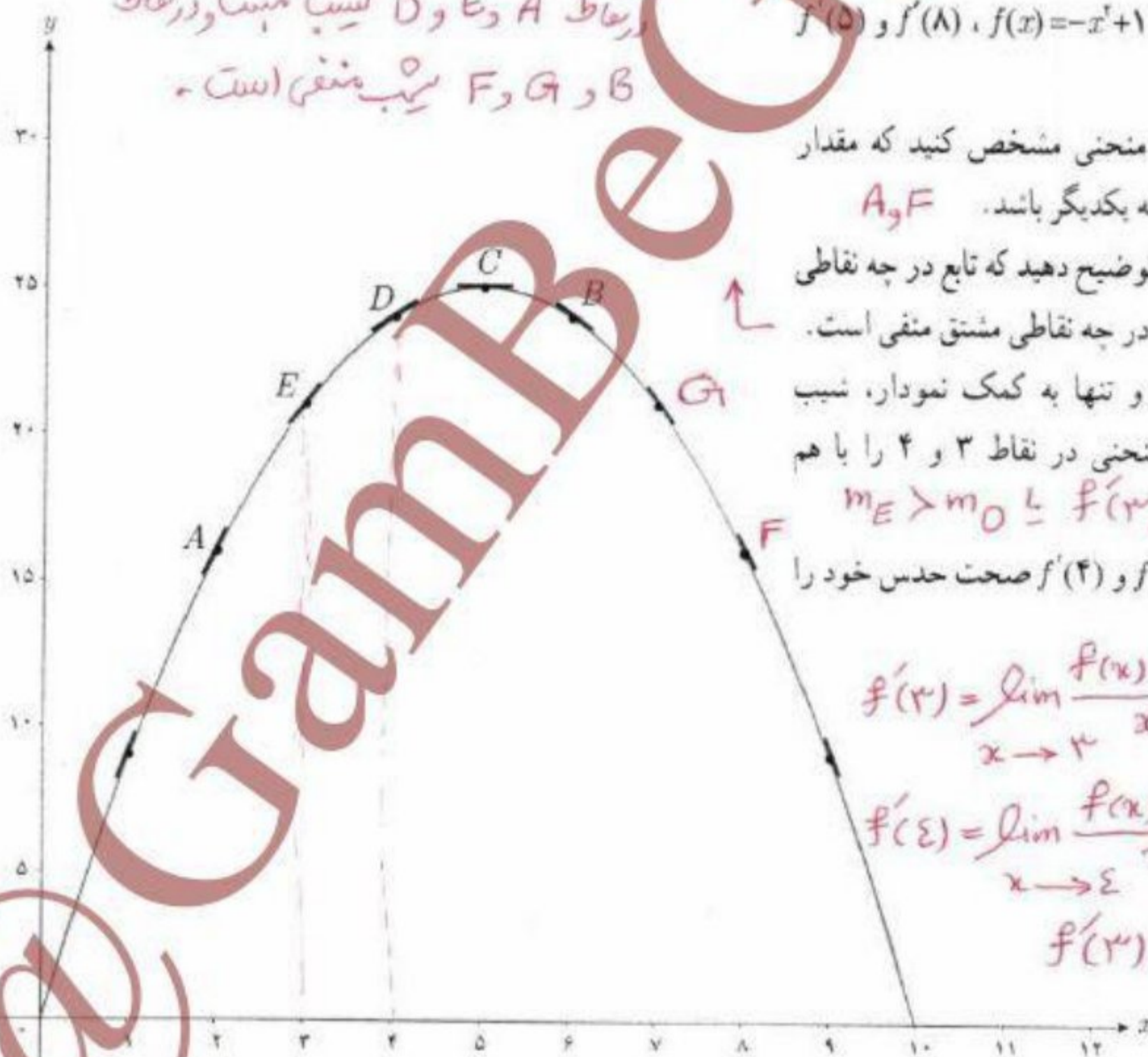
حال اگر $h \rightarrow 0$ پس $x-a \rightarrow 0$ پس $x \rightarrow a$ لذا

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(راه‌نمایی: تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید. توجه کنید وقتی که $h \rightarrow 0$ آنگاه $x \rightarrow a$)

کار در کلاس

نقاط A و E و D و C نسبت مثبت و در نقاط B و G و F نسبت منفی است.



الف) برای تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ ، $f'(5)$ و $f'(8)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. A و F

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، نسبت خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید $m_E > m_D \Rightarrow f'(3) > f'(4)$

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \dots = 4$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \dots = 2$$

لذا $f'(3) > f'(4)$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3x+4) = 10$$

فصل چهارم: مشتق ۸۱

$$y - 9 = 10(x - 2)$$

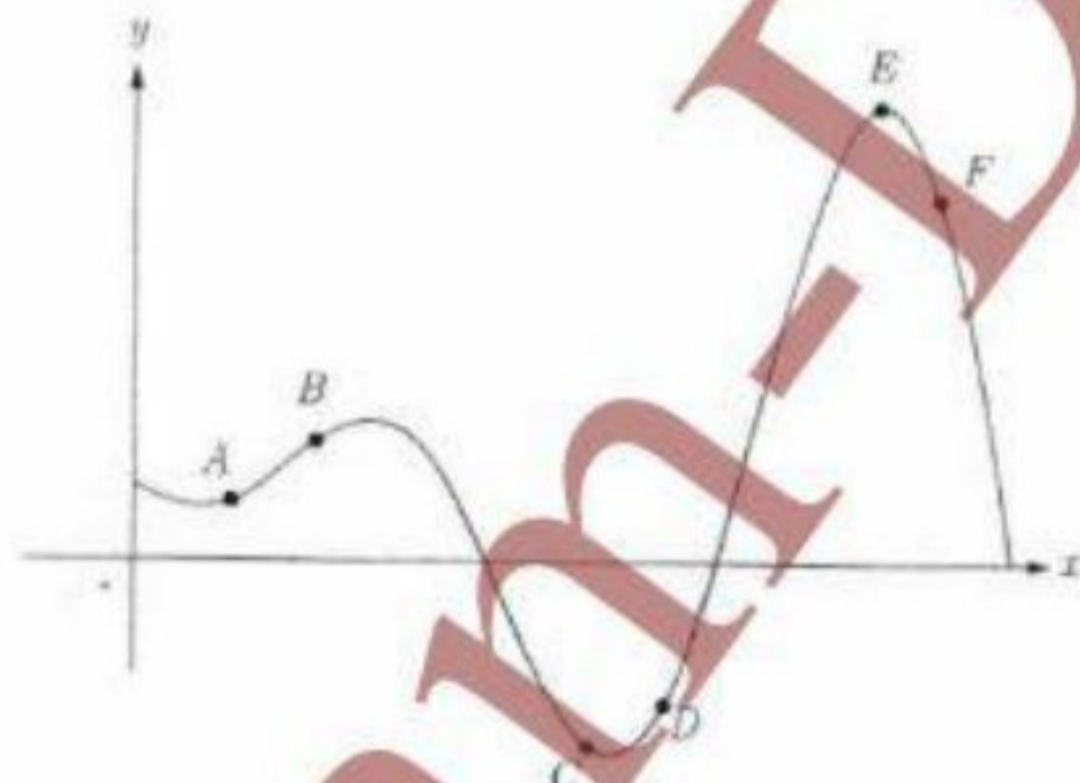
$$y - 9 = 10x - 20 \rightarrow y = 10x - 11$$

معادله خط مماس

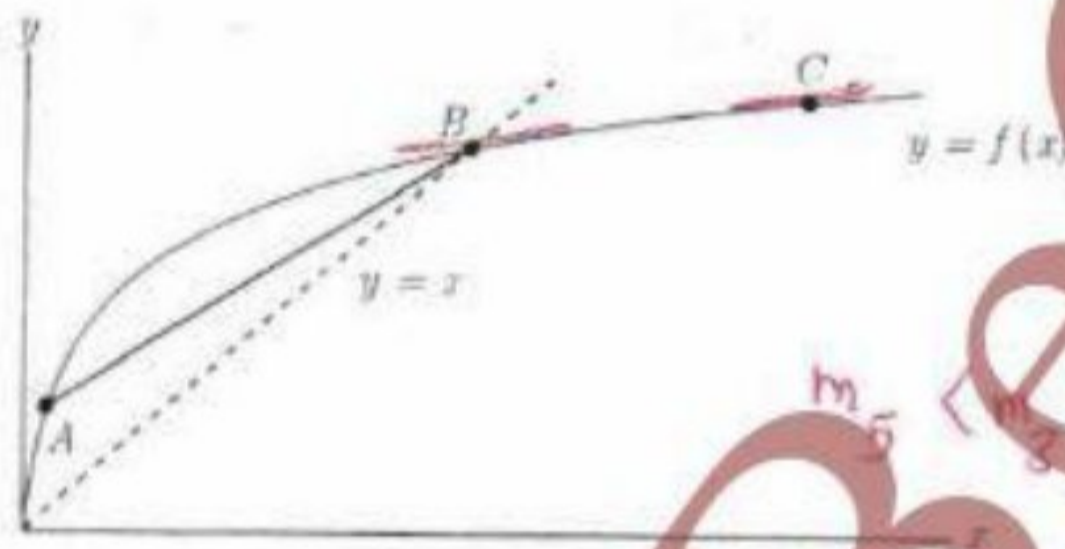
۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ و $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	E
-۱	C
۰	E
-۱	A
۱	B
۲	D



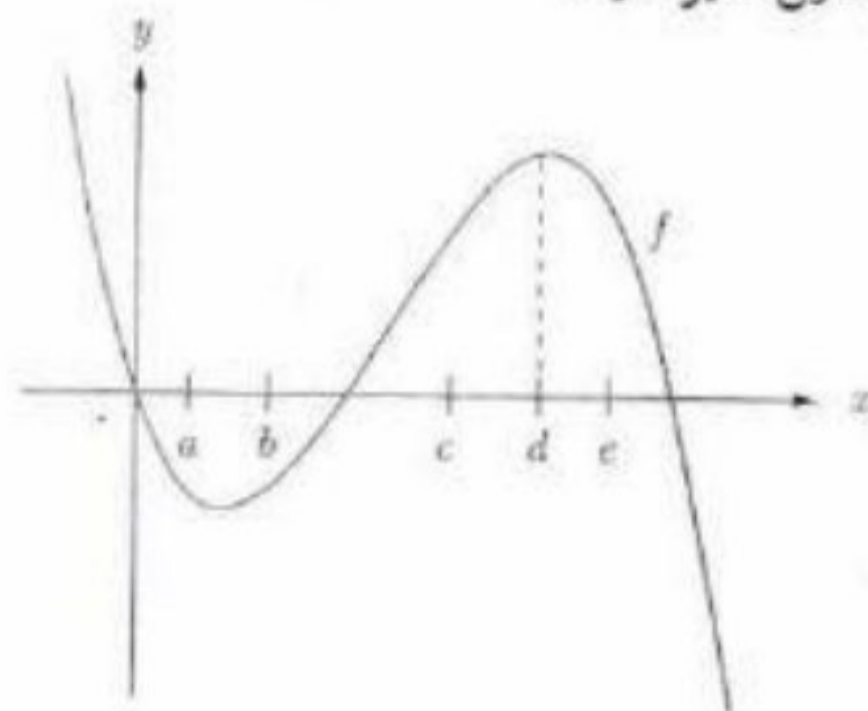
۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



- الف) شیب نمودار در نقطه A m_1
- ب) شیب نمودار در نقطه B m_2
- پ) شیب نمودار در نقطه C m_3
- ت) شیب خط AB m_4
- ث) شیب خط $y=2$ $m_5 = 0$
- ج) شیب خط $y=x$ $m_6 = 1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1, m_2, \dots, m_6 در نظر بگیرید.

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d, e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



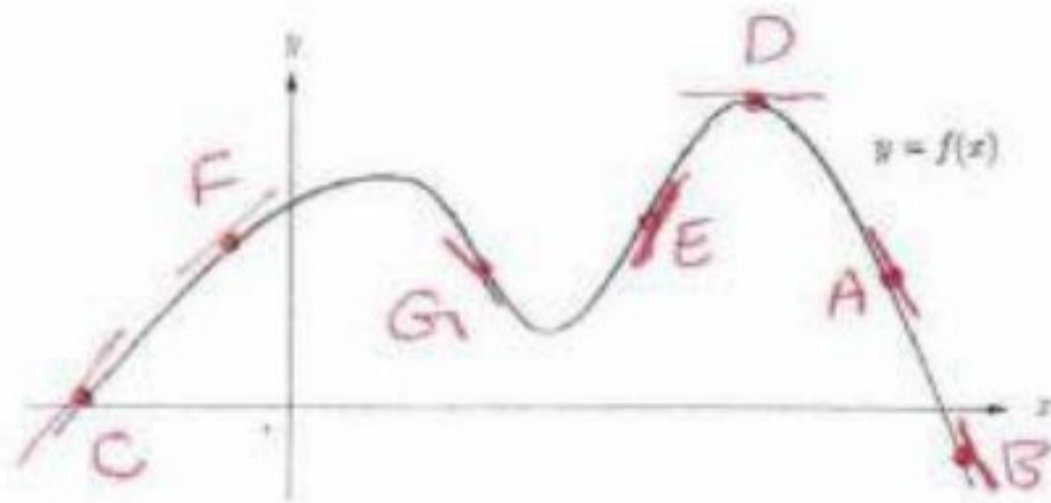
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

x	f'(x)
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F, G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:



(الف) نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

(ب) نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

(پ) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است. $f(x) = 0$ و $f'(x) > 0$

(ت) نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است. $f'(x) = 0$

(ث) نقاط E و F متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند. $f'(x_1) = f'(x_2)$

(ج) نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است. $f(x) > 0$ و $f'(x) < 0$

۶ اگر $f(x) = x^2 - 2 + 3$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

$$f(-1) = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2 + 3 - (-3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1) + 5}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) + \frac{5}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

۷ نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟



(الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست**

(ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) **نادرست**

(ت) شیب منحنی در نقاط C و D, F منفی است. **درست**

(ث) $m_C < m_D < m_F$ **درست** $m_F < m_D < m_C$

(ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



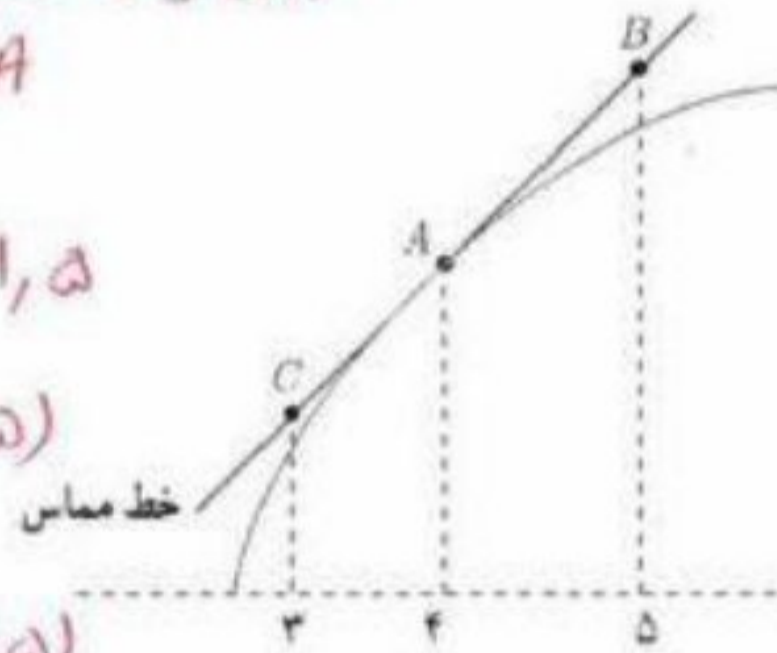
۸ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید.

$$\frac{f(B) - f(A)}{x_B - x_A} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} = f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B) - 25}{1} = \frac{f(C) - 25}{-1} = 1/5$$

$$f(B) = 25/5 \rightarrow B(5, 25/5)$$

$$f(C) = 23/5 \rightarrow C(3, 23/5)$$

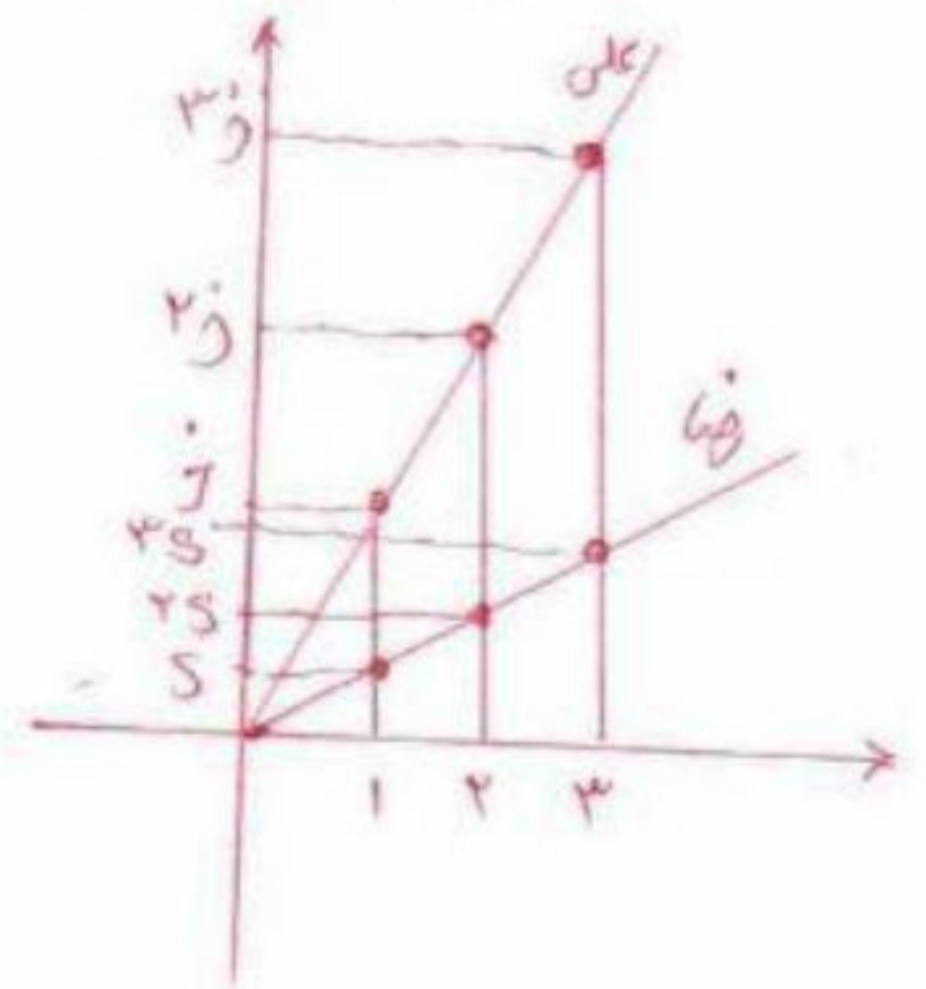


- ۹ در هر ثانیه علی t متر با دو چرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می کنند، به طوری که $t > s$. در یک زمان داده شده، چگونه می توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟
- الف) علی $t - s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
 - ب) علی s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
 - پ) علی t/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.
 - ت) علی s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.
 - ث) علی t/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ثانیه	۱	۲	۳	...	n
علی	t	$2t$	$3t$...	nt
رضا	s	$2s$	$3s$...	ns

لذا نهی $\frac{t}{s}$ ثابت است پس هر چه گفت که

علی $\frac{t}{s}$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.



مشتق پذیری و پیوستگی

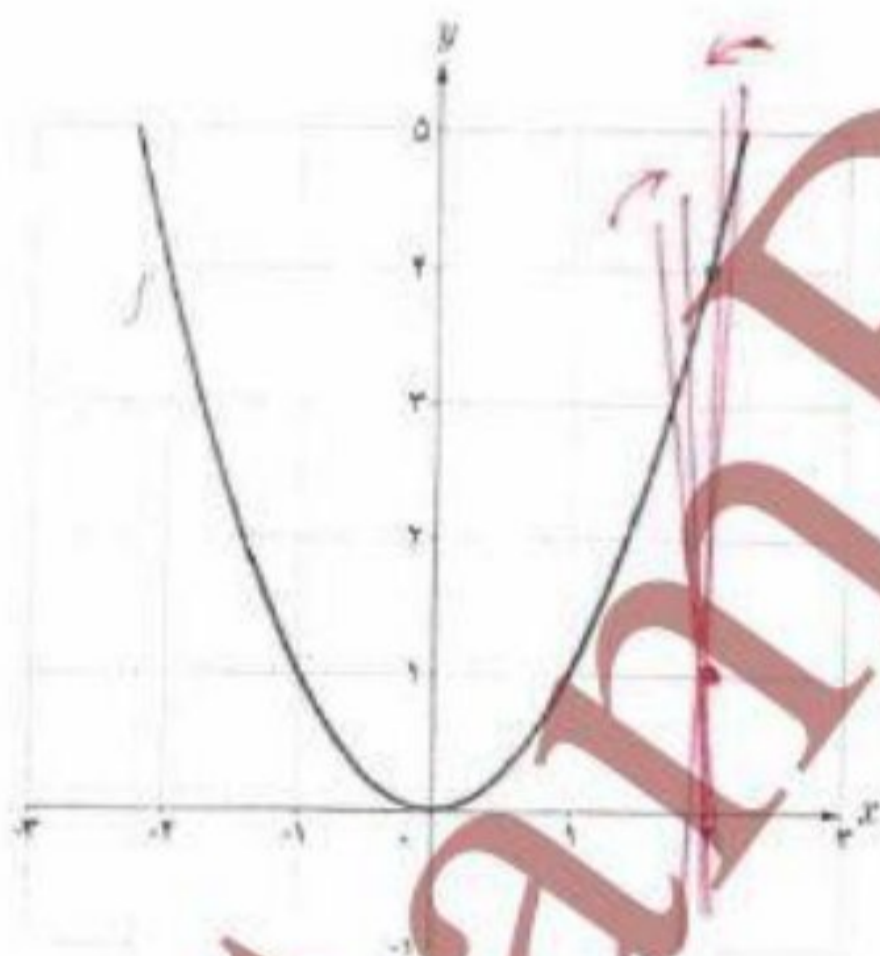
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

زیرا شیب خط‌ها مابین آن نقطه $x=2$ می‌گذرند به عدد حقیقی و منحصراً بزرگی میل نمی‌کنند.

اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به کار گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} =$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

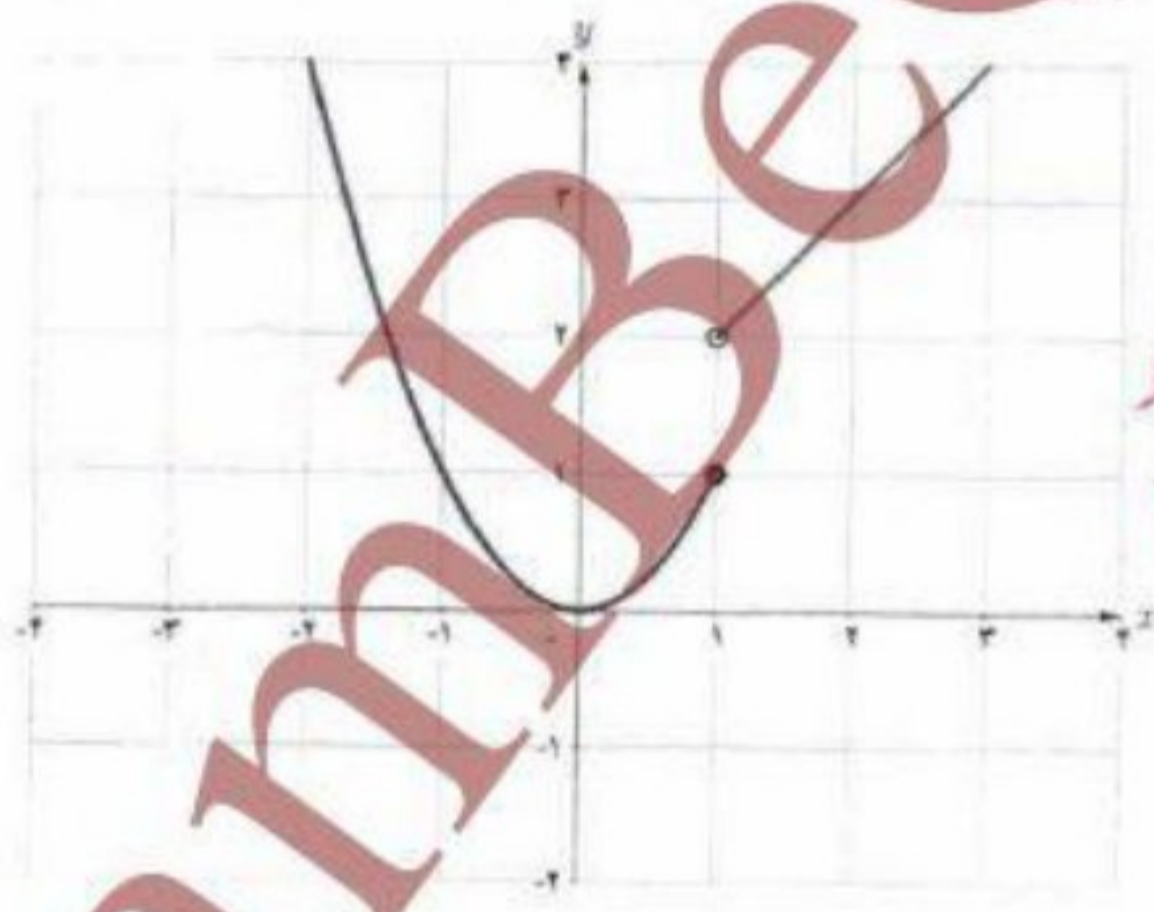
بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و منتهای) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانان مقایسه کنید.

کاردر کلاس

تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟ زیرا سبب خطاها تابع از تعریفی $x=1$ می گذرند، به عدد حقیقی و منصفه بندی



مثل نمی گذرد. هوشین

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2 \end{cases}$$

پس $g'(1)$ وجود ندارد.

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = 2$ و $x = 1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می کنیم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



قضیه: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

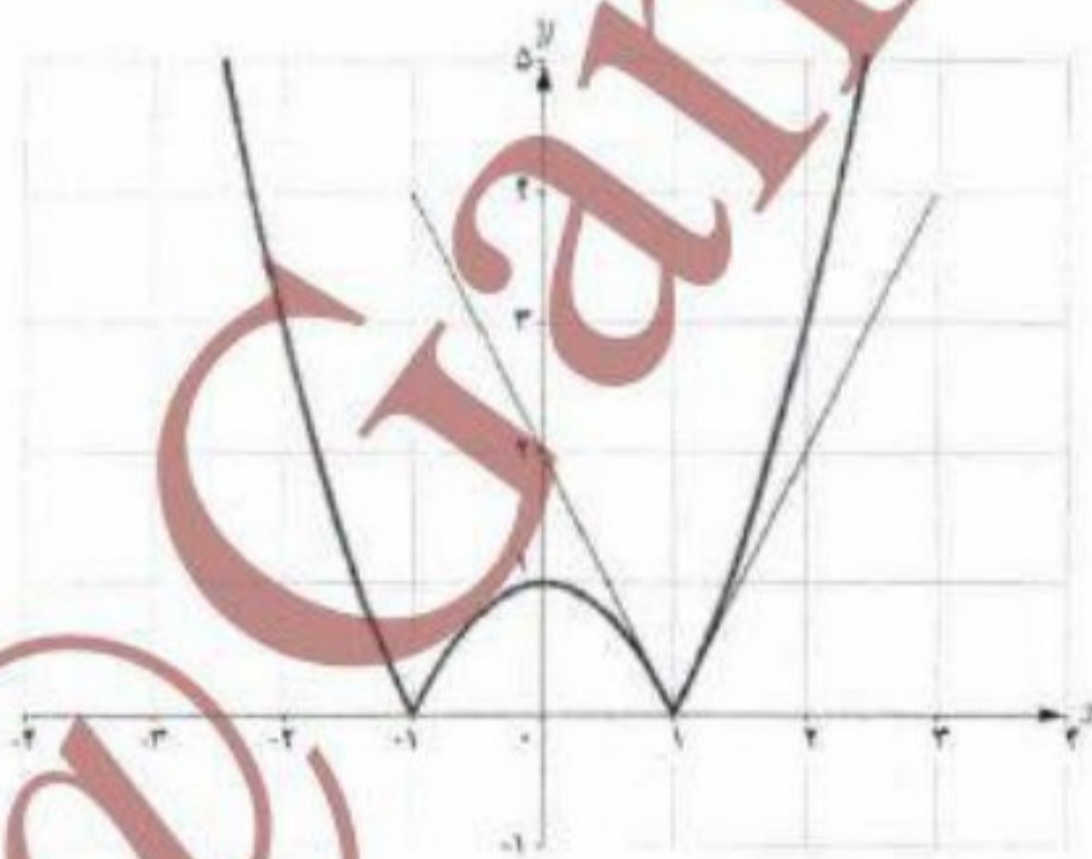
مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خطهای مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = 1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتقهای راست و چپ f در $x = 1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

شیب نیم مماس چپ $f'_-(1) =$

شیب نیم مماس راست $f'_+(1) =$

معادله این نیم مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از:

نیم مماس راست $y - 0 = 2(x-1)$ یا $y = 2x - 2, x \geq 1$

نیم مماس چپ $y - 0 = -2(x-1)$ یا $y = -2x + 2, x \leq 1$

می‌باشند.

کاردر کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست. در صورت امکان معادله نیم مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} -(x-1) = 2 \Rightarrow f'_+(-1) = 2$$

معادله نیم مماس راست

$$\rightarrow y - 0 = 2(x + 1) \rightarrow y = 2x + 2 \quad x > -1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \Rightarrow f'_-(-1) = -2$$

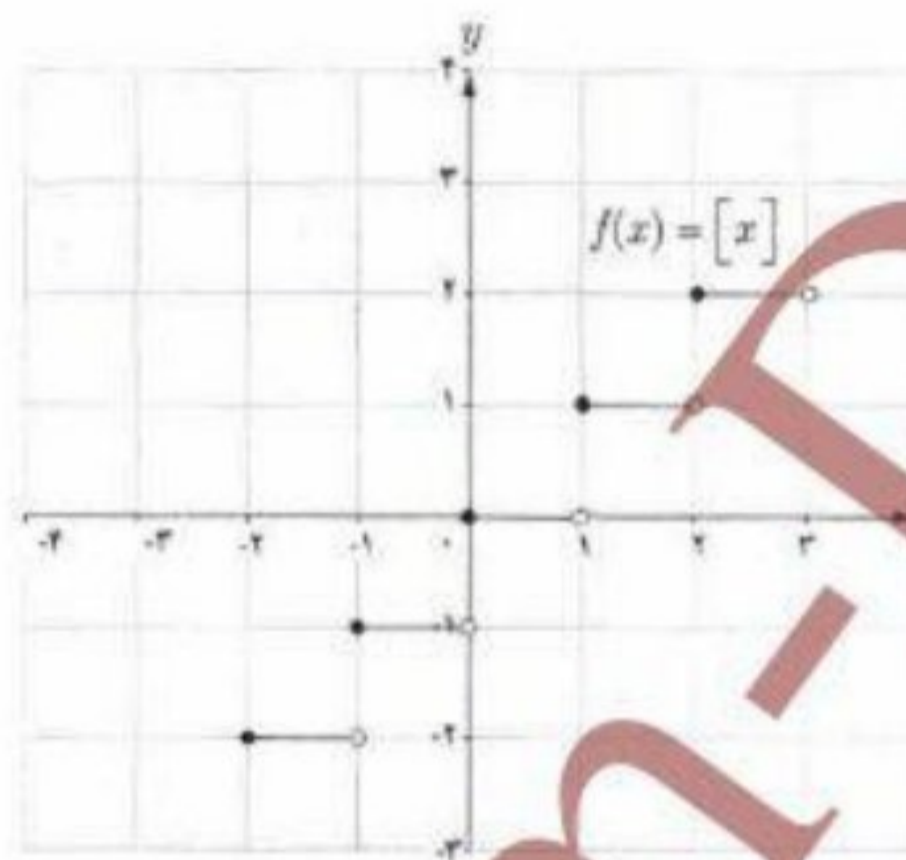
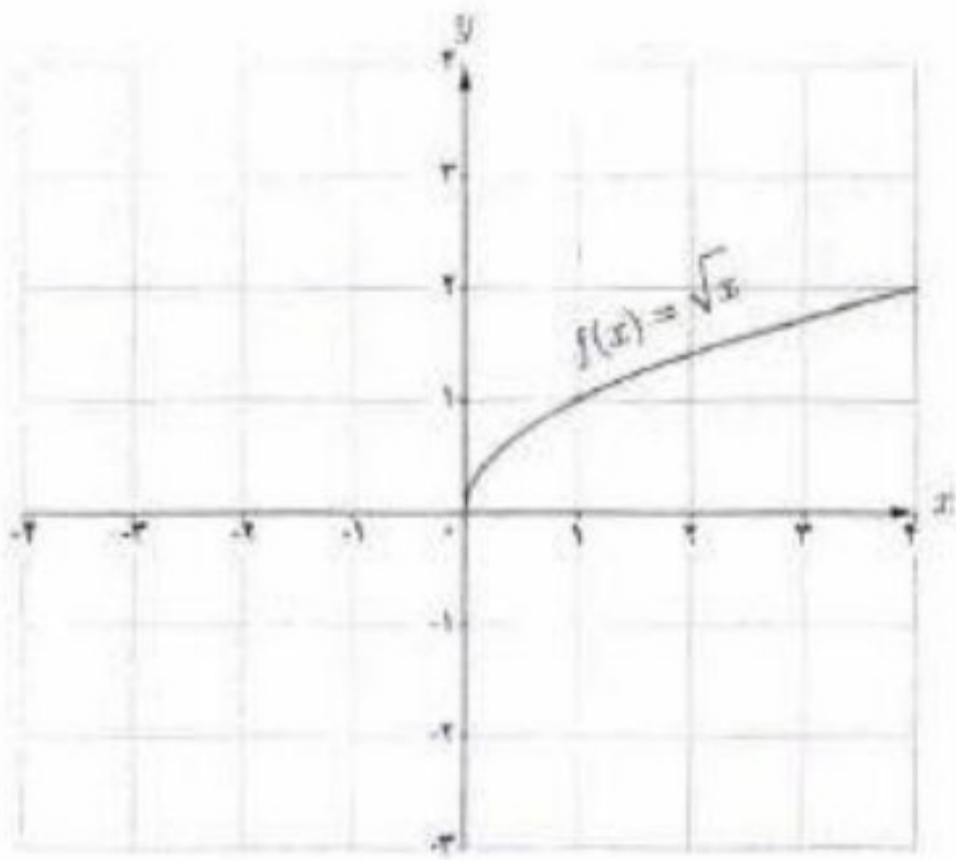
معادله نیم مماس چپ

$$\rightarrow y - 0 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x - 2 \quad x < -1$$

تهیه کننده:

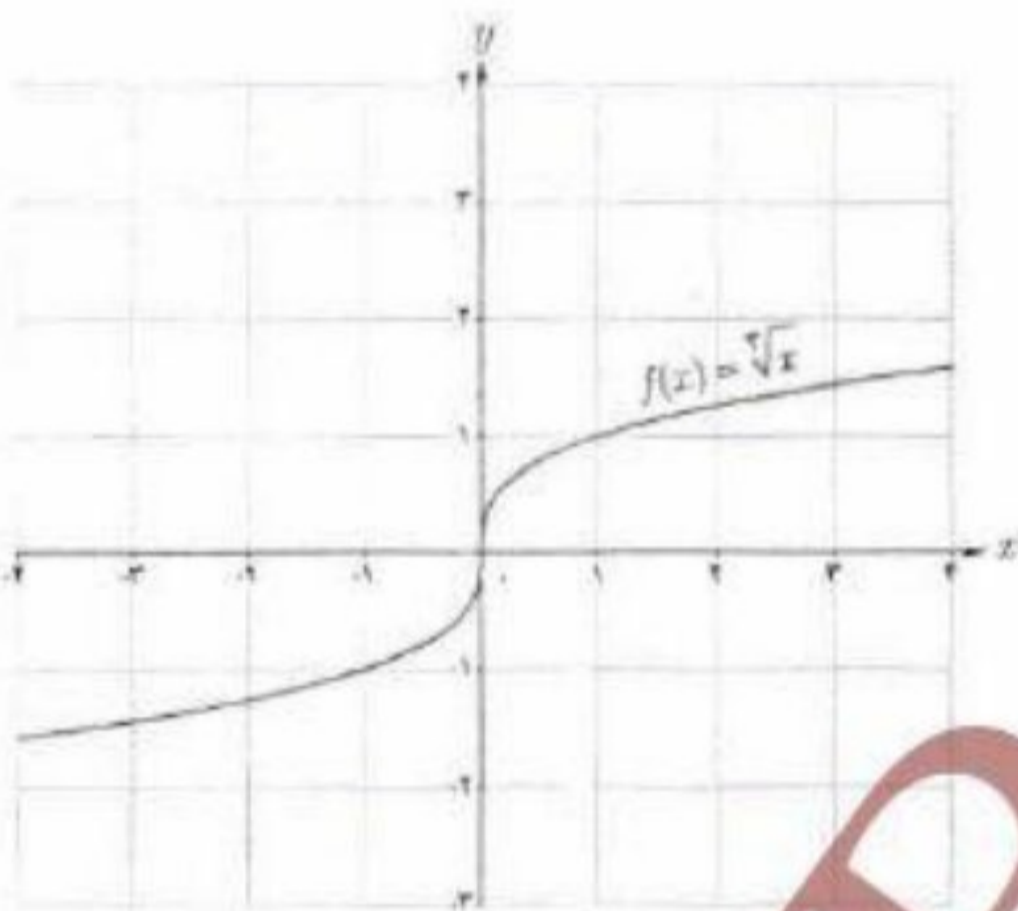
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

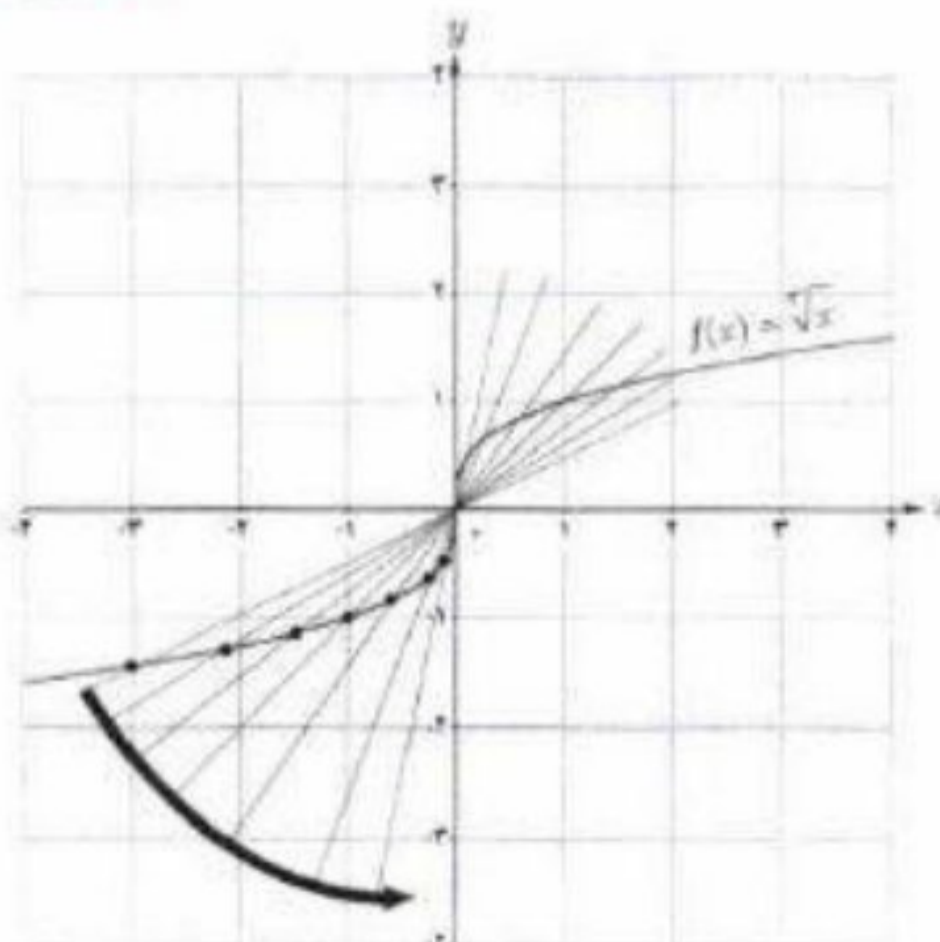
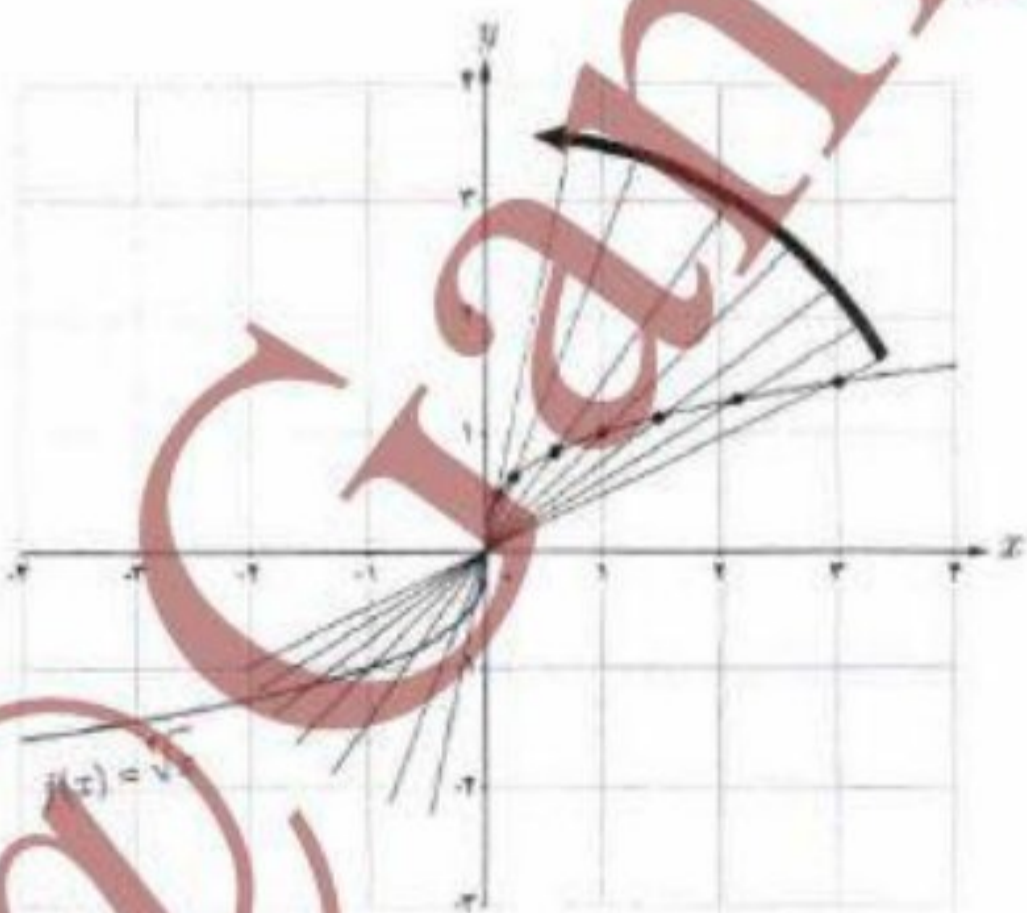
مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می گیریم. مشتق پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل ها نشان می دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می شویم خط های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «مماس قائم» منحنی می نامیم.



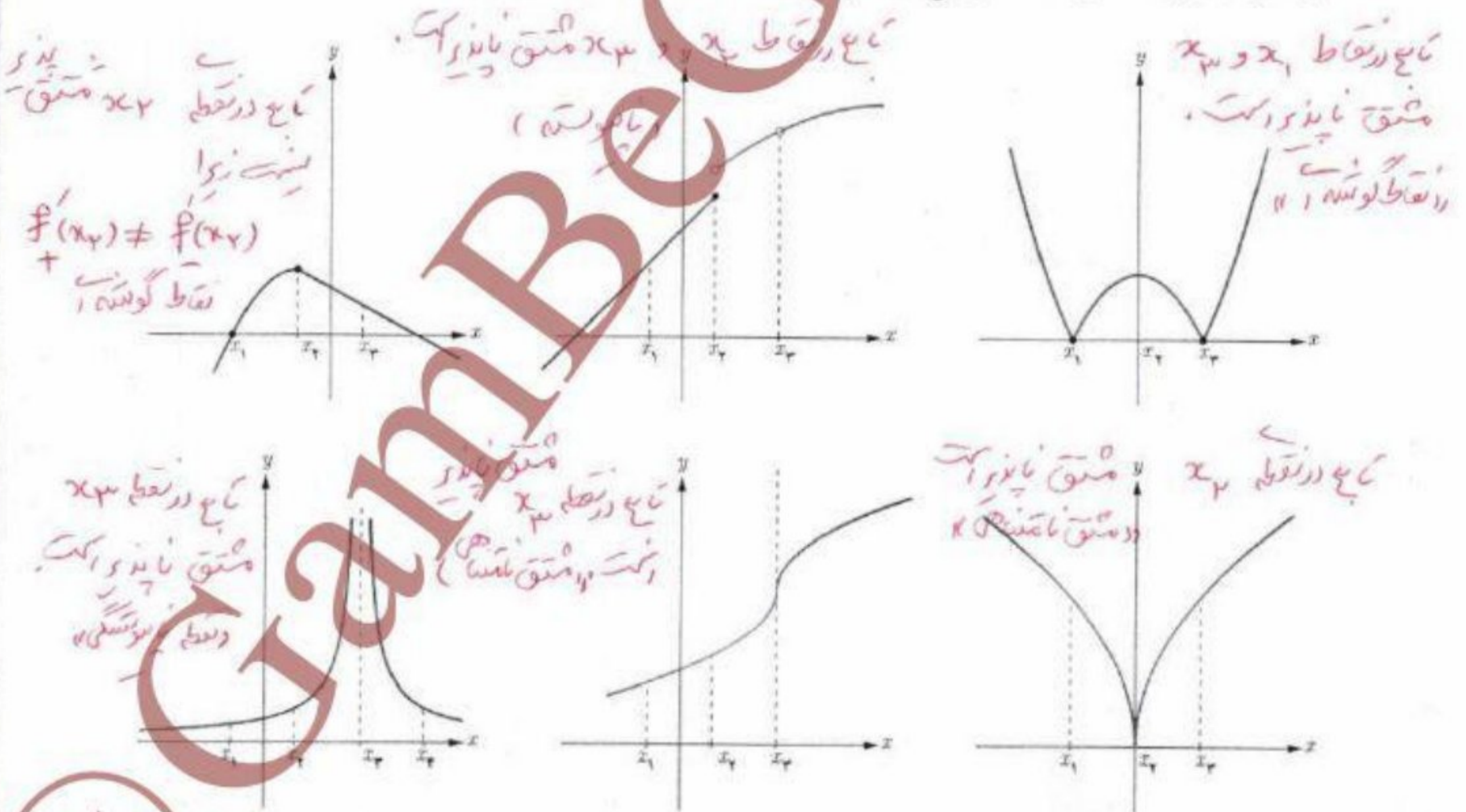
اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ در این صورت خط $x=a$ را «عماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به طور خلاصه می‌توان گفت:

- ۱ تابع f در $x=a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
 - ۱- f در a پیوسته نباشد.
 - ۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:
 - الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).
 - ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).
 - ب) هر دو نامتناهی باشند.

کار در کلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.



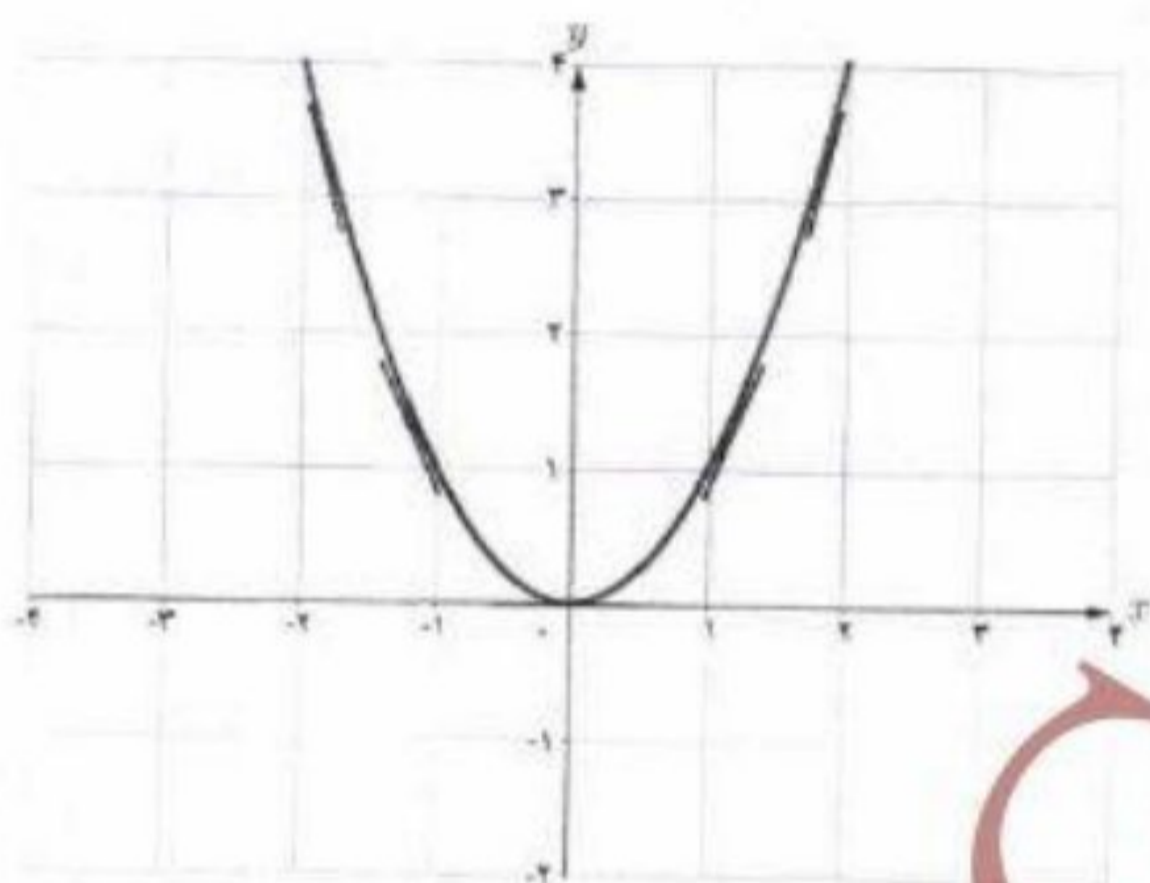
۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.



تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فواصل



تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

اگر عضو x از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 2x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \text{ و } f'(5^\circ) = 10^\circ$$

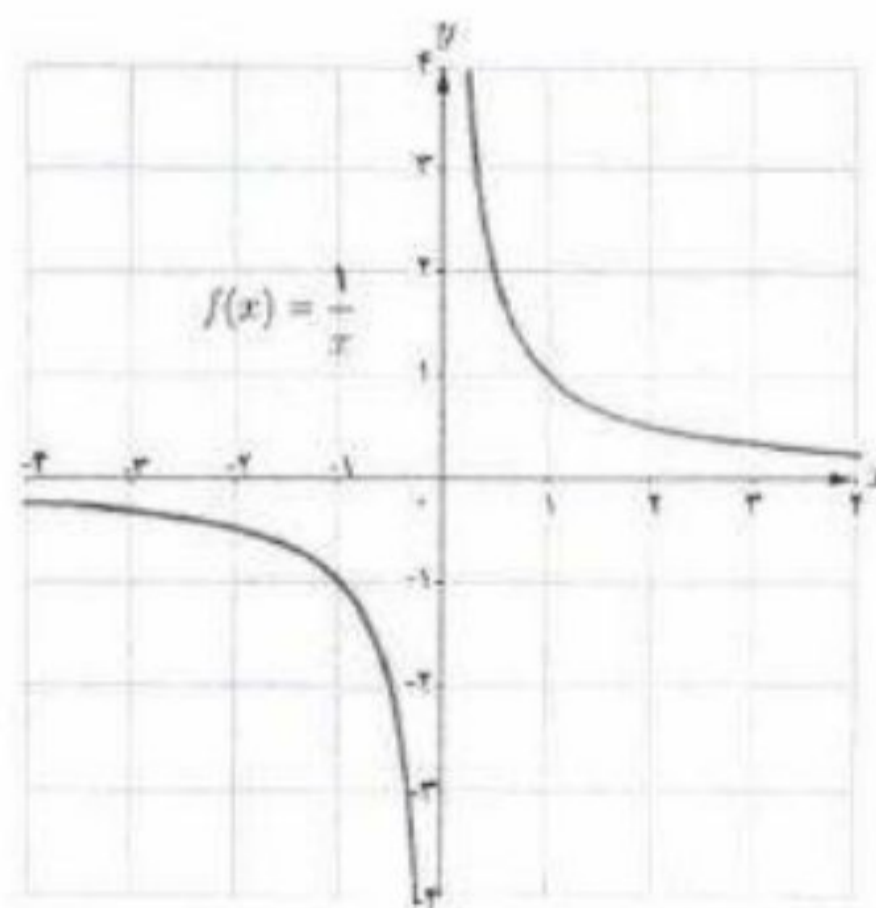
مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید: با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = \frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد. به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

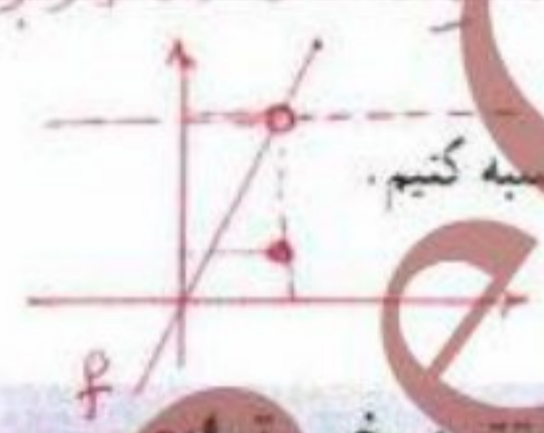
کاردر کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \cup \{1\} = \mathbb{R}$

تابع مشتق f' در $x=1$ وجود ندارد. لذا $f'(1)$ وجود ندارد پس $D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \begin{cases} 5 & x \neq 1 \\ \text{نمی‌تواند} & x = 1 \end{cases}$



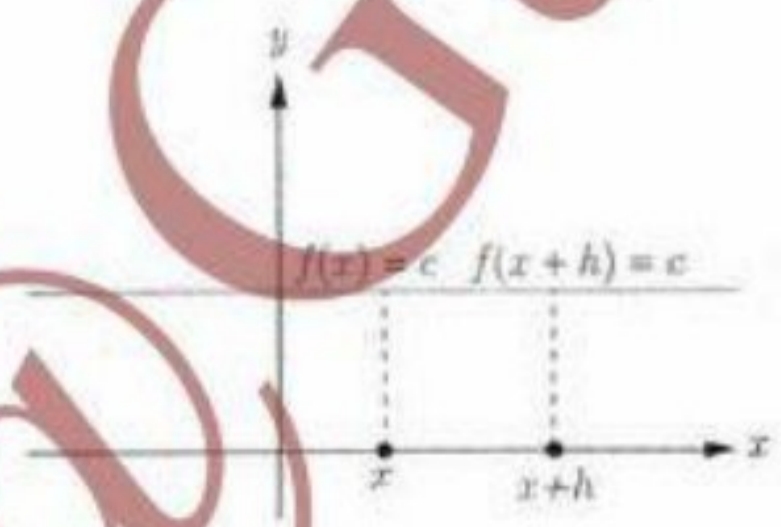
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.



اگر $n \in \mathbb{N}$ و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$ ، آن گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$ ، به کمک این دستور نشان می‌دهیم که: $f'(x) = 3x^2$. ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= \frac{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}{1} = nx^{n-1}$$

به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدیم که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* در مورد نواحی رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[n]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۵ اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax+ah+b - ax-b}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

۷ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و fg ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$
 ب) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ت) $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.
 مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^2$
 ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$
 ب) $h(x) = (2x^2+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 4x(-x^2+7x-2) + (2x^2+1)(-2x+7)$
 ت) $l(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow l'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

۱ مشتق تابع های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x-4)^2}$

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + \sqrt{x}(-6x)$

$h'(x) = \frac{1(2x^2 + x - 1) - (2x + 1)x}{(2x^2 + x - 1)^2}$

۲ اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست

$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
 $= 5 \times 8 + (-6) \times 3 = 22$

$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$ آورید.
 $= \frac{5 \times 8 - (-6) \times 3}{(8)^2} = \frac{29}{22}$

مشتق توابع مثلثاتی

$f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = -\sin x$

توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم:

په اثبات: با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin x \frac{\cos h - 1}{h}) + \lim_{h \rightarrow 0} (\cos x \frac{\sin h}{h}) = 0 + \cos x = \cos x \end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

در حسابان (۱) دیدیم که:

بنابراین: $f'(x) = (\sin x)' + (\cos x)(1)$ و در نتیجه $f'(x) = \cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x) = \cos x$ داریم:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

نهیة کننده:

$= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با استفاده از دو دستور فوق می توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به دست آورد.

مثال: مشتق $f(x) = \tan x$ را به دست آورید.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

کاردینالاس

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \tan x$

ب) $g(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x (1 + \tan^2 x) \quad g'(x) = \frac{-\cos x (1 - \sin x) - (\sin x)(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است $h'(x)$.

حل: اگر $f(x) = x^4$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ، آن گاه $h(x) = f(g(x))$.

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)) = (2x + 3) f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x + 3) (4) (x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد.

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

مثال: مشتق تابع $y = \sin^2 x$ را به دست آورید.

حل: با فرض $\sin x = u$ داریم: $y = u^2$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 2u = (\cos x)(2)(\sin x) = 2 \sin x \cos x$$

مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2+1)^2(5x-1)$

$f'(x) = 2(2x)(x^2+1)(5x-1) + (x^2+1)^2(5)$

ب) $g(x) = \cos^2 x$

ب) $h(x) = \sin(3x^2 + 5)$

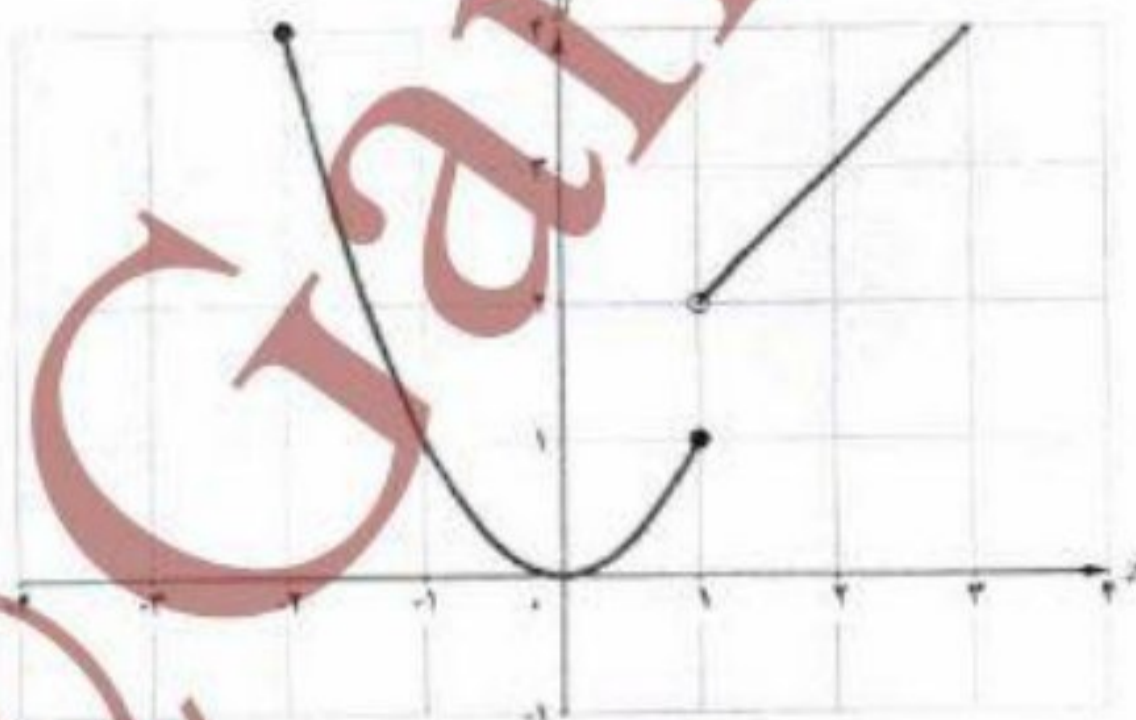
$g'(x) = -2 \sin x \cos x$

$h'(x) = 6x \cos(3x^2 + 5)$

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق پذیری روی بازه های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
 تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد،
 گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر
 می گیریم.

f روی بازه های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق پذیر است. ولی
 f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

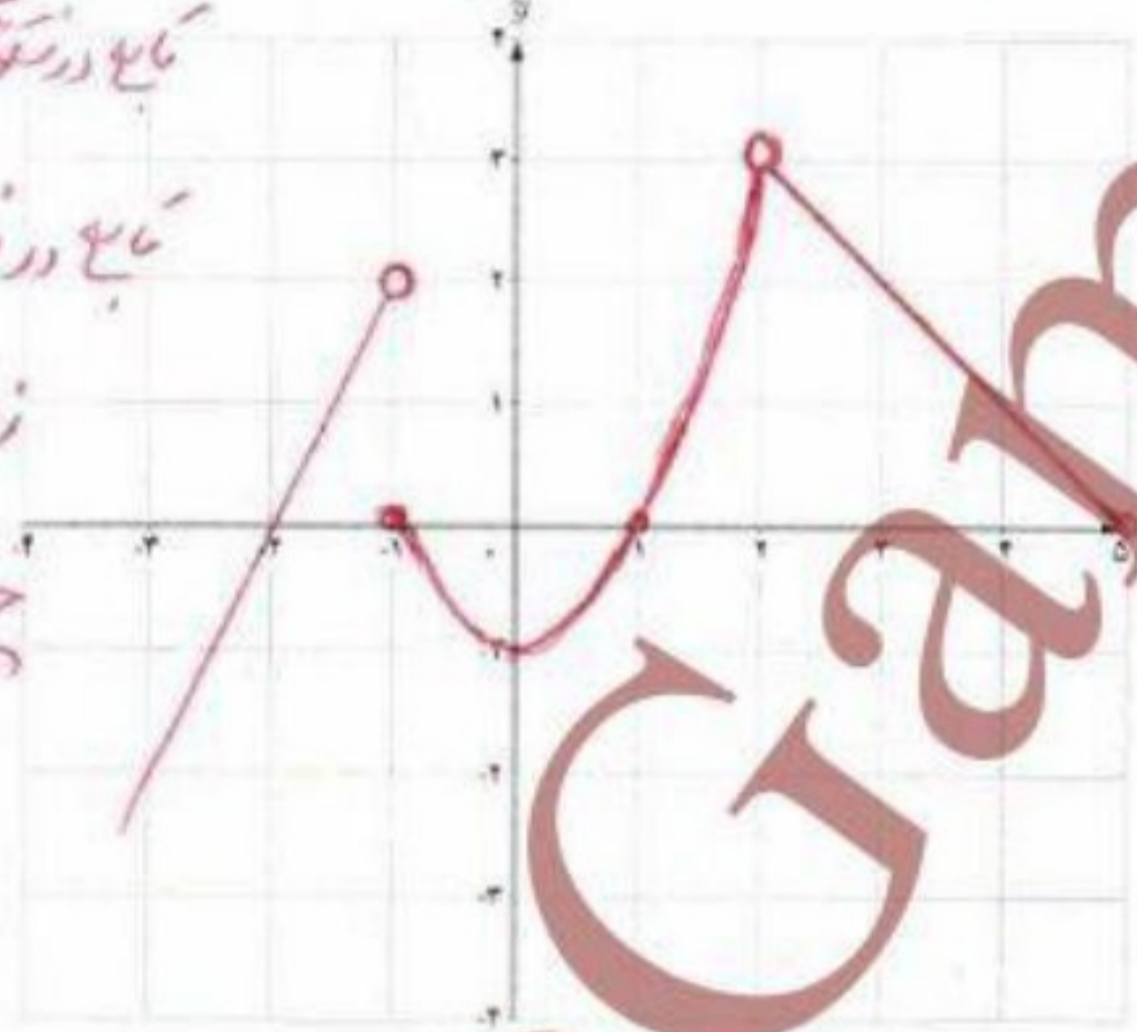
زیرا با اینکه روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است، اما در $x = 1$ پیوستگی راست ندارد، لذا
 $x = 1$ مشتق راست ندارد.

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

$f'(-1) = -2$ و $f'(1) = 2$

بررسی کنید.

تابع در نقطه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است.
 تابع در نقطه $(2, 5)$ مشتق پذیر است.
 تابع در فاصله $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست.
 زیرا تابع در فاصله $[-2, 0]$ پیوسته نیست.
 چون تابع در $x = -1$ ناپیوسته و مشتق پذیر است.



نیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال: اگر $y = 3x^3 + 2x^2 - 1$ آن گاه:

$y' = 9x^2 + 4x$ ، $y'' = 18x + 4$

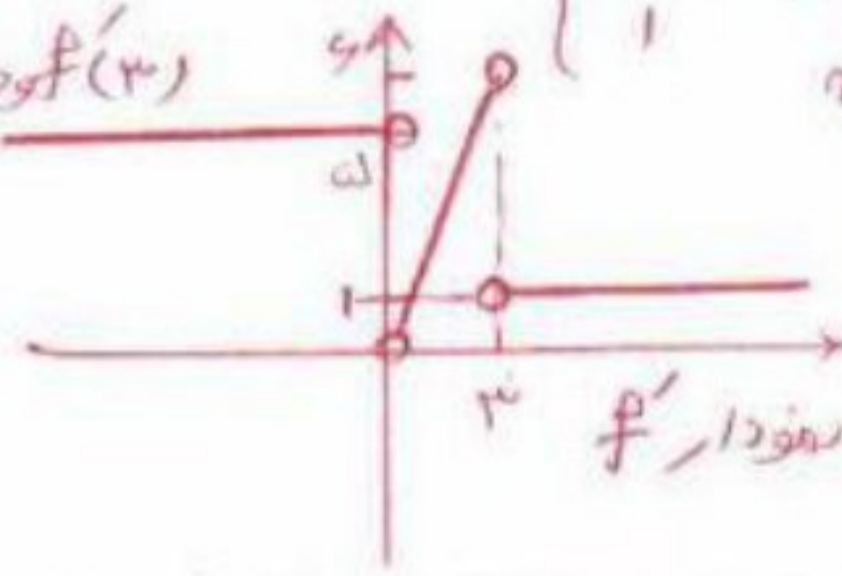


(ب) $f'(0)$ وجود ندارد چون تابع

در $x=0$ نامنوسه است.

$f'(3) = 1$, $f'(3) = 6 \rightarrow f'(3)$ وجود ندارد.

$$f'(x) = \begin{cases} \omega & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



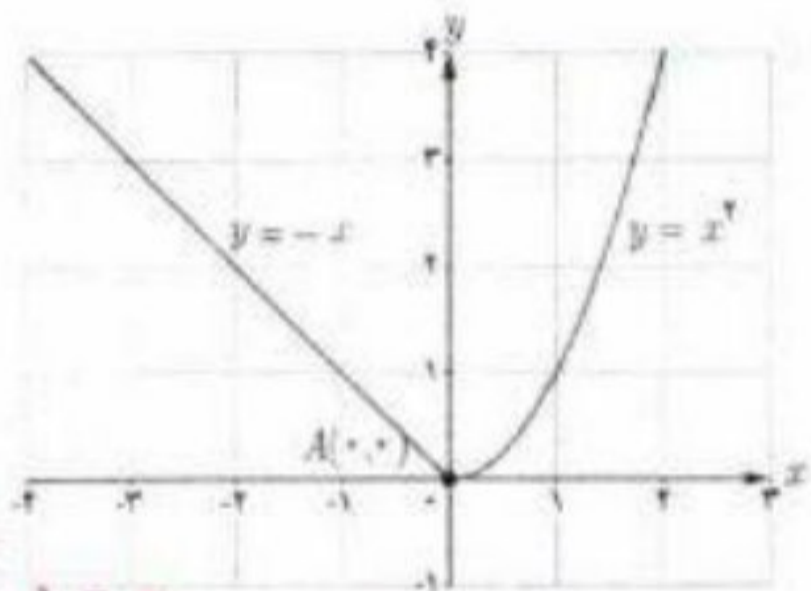
فصل چهارم: مشتق ۹۹

مورین

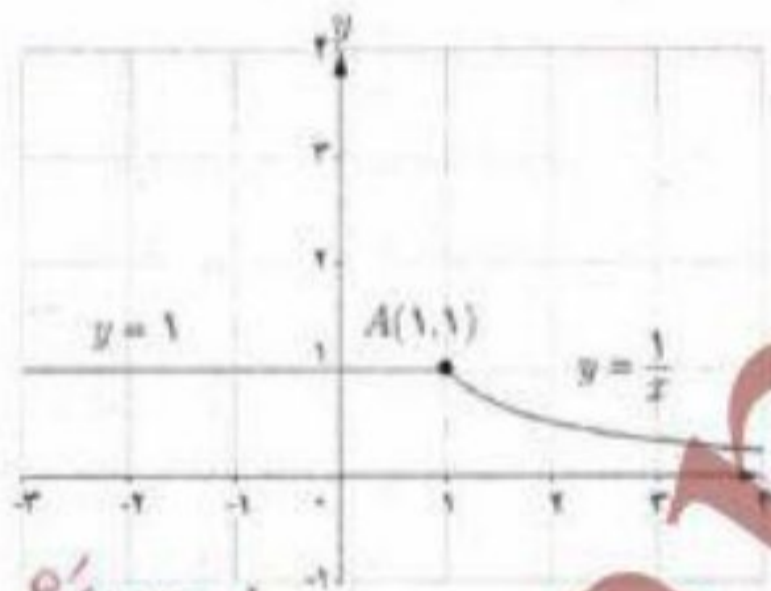
۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

$$f(x) = |x-2| \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}$$

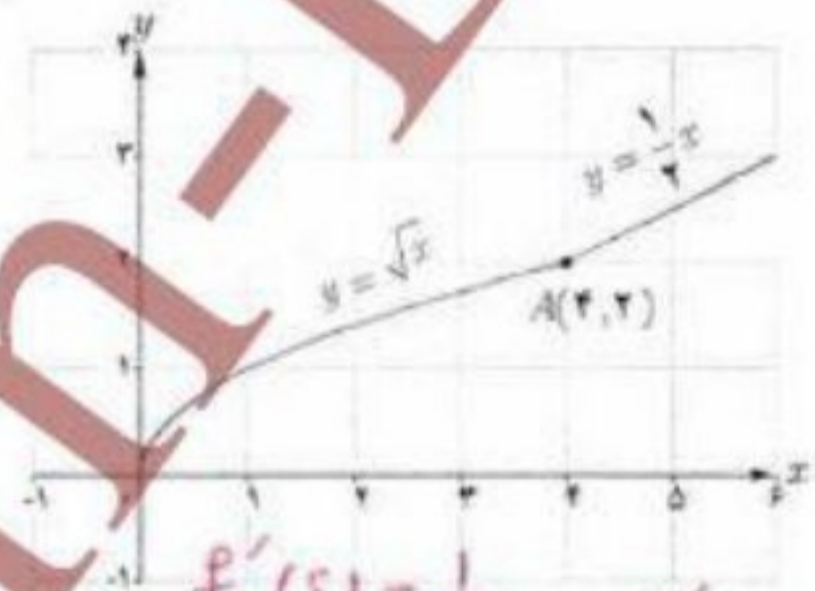
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



$f'(0) = 0$
 $f'(0) = -1$
 وجود ندارد. $f'(0)$ (الف)



$f'(1) = -1$
 $f'(1) = 0$
 وجود ندارد. $f'(1)$ (ب)

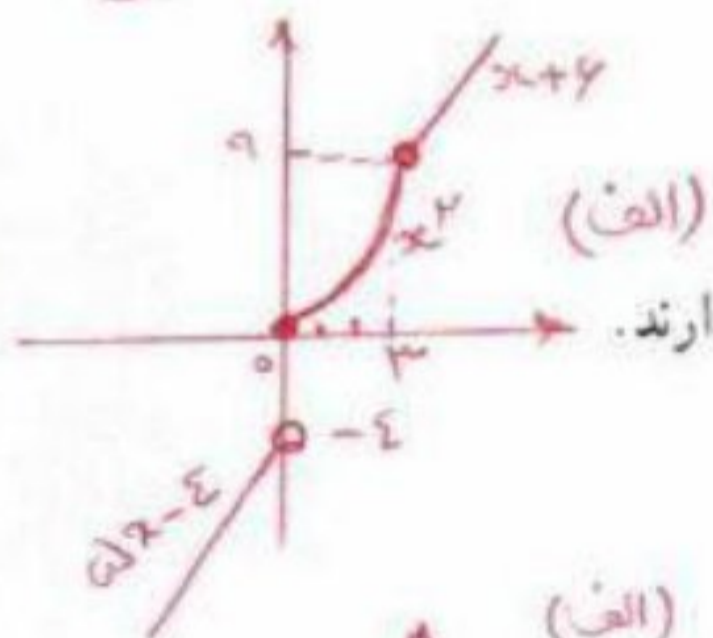


$f'_+(2) = \frac{1}{2}$
 $f'_-(2) = \frac{1}{2}$
 وجود ندارد. $f'(2)$ (ب)

تابع $f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.
 ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پالا

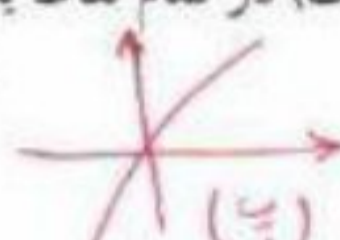


ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.
 ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پالا

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

- الف) در یک نقطه برابر صفر شود.
- ب) در تمام نقاط مثبت باشد.
- ت) در تمام نقاط منفی باشد.



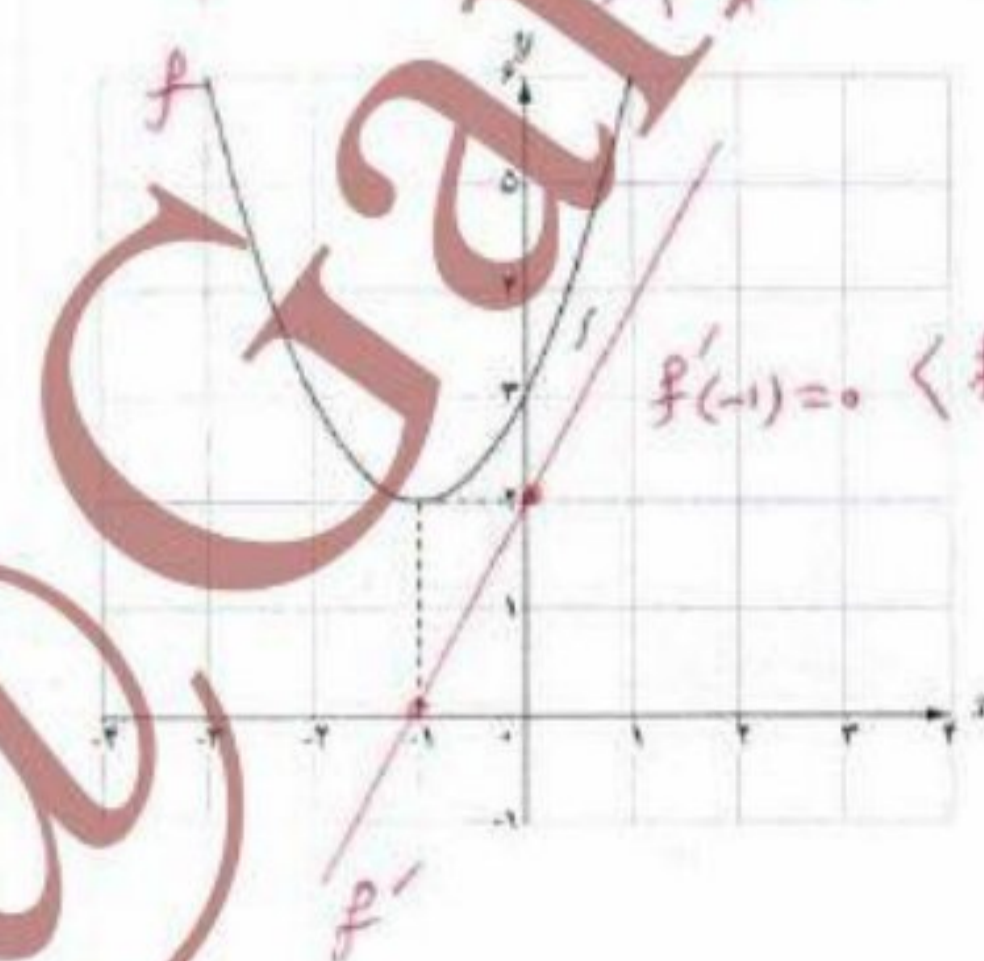
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل

مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.
 $f'(2)$ و $f'(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(3)$

ب) صحت ادعای خود در الف) را با محاسبه مشتق تابع

$f'(x) = 2x + 2$
 $f'(2) = 6$
 $f'(-1) = 0$, $f'(0) = 2$, $f'(3) = 8$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

• مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید. تابع در نقطه $x=1$ ناپیوسته است.
 • پس در این نقطه مشتق پذیر نیست.

سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < -2 \\ -(x-2) & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2 & x > 2 \end{cases}$$

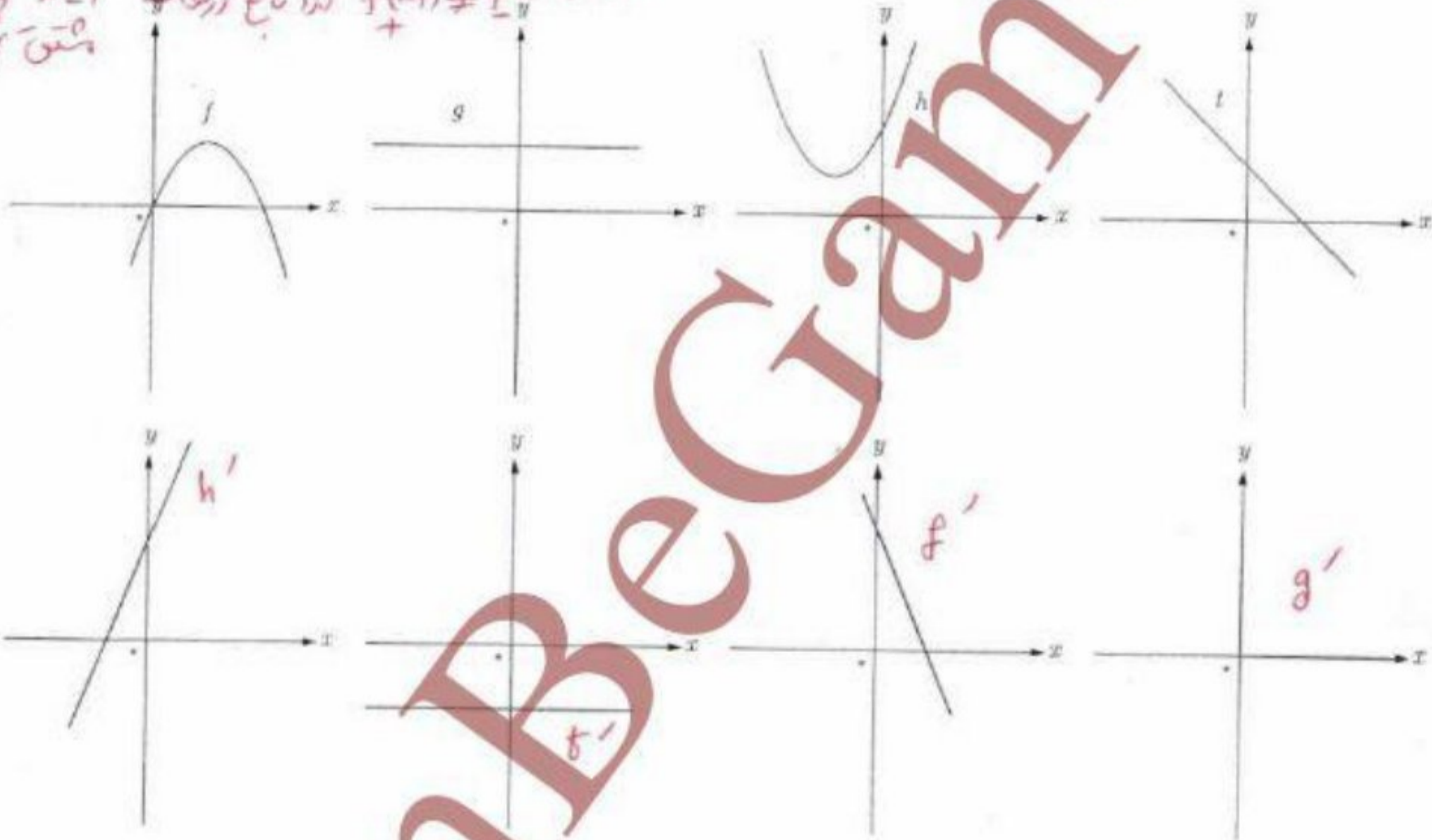
$$f(x) = 3x \quad \& \quad g(x) = 3x + 1 \quad \& \quad h(x) = 3x - 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -2 \\ -1 & -2 < x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$$

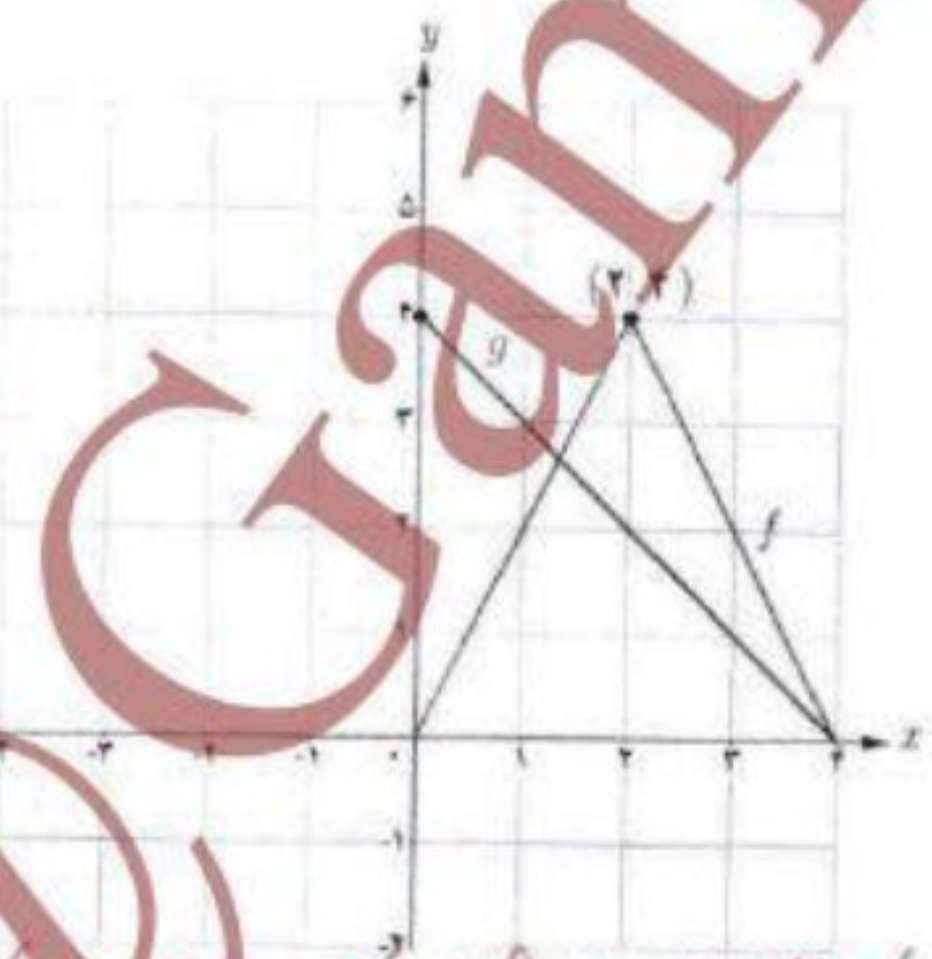
$$f'(2) = 4, \quad f'(2) = -1 \quad \& \quad f'(2) = 4, \quad f'(-2) = -1$$

$x=2$ و $x=-2$ مشتق پذیر نیست.

نمودار توابع f و g و h را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید. لذا $f'(2) \neq f'(2)$ و $f'(-2) \neq f'(-2)$ لذا تابع در این نقاط مشتق پذیر نیست.



$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 \\ g'(1) &= -1 \\ f'(2) &= 4 \text{ (وجود ندارد)} \\ g'(2) &= 1 \\ f'(3) &= 6 \\ g'(3) &= 2 \end{aligned}$$



نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.
 الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$, $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$, $k'(2)$ و $k'(3)$

$$\begin{aligned} h'(1) &= f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4 \\ h'(2) &= f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 4 \times 1 + 1 \times 2 = 6 \\ h'(3) &= f'(3)g(3) + g'(3)f(3) = 6 \times 2 + 2 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 2}{(3)^2} = \frac{8}{9}$$

$$k'(2) = \text{وجود ندارد چون } f'(2) \text{ وجود ندارد}$$

$$k'(3) = \frac{f'(3)g(3) - g'(3)f(3)}{(g(3))^2} = \frac{6 \times 2 - 2 \times 3}{(2)^2} = 1$$

اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3 \times 3 + 2 \times 5 = 19$$

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_-(0)$ و $f'_+(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = 0$$

$\rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0) = \text{وجود ندارد}$

مشتق توابع داده شده را بیابید.

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} (x^2+1) + 3x^2 \sqrt{3x+2}$$

ب) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$

الف) $f(x) = (3x^2-4)(2x-5)^2$
 $f'(x) = 6x(2x-5)^2 + 2(3x^2-4)(2x-5)$

ب) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

ن) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$
 $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{9x+2}{2x\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+2) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$$

مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$f'(x) = 2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x$$

ب) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin 2x}$?

ب) $f(x) = \tan^2 x - 2\cos x$

$$f'(x) = 2(1+\tan^2 x) \tan x + 2\sin x$$

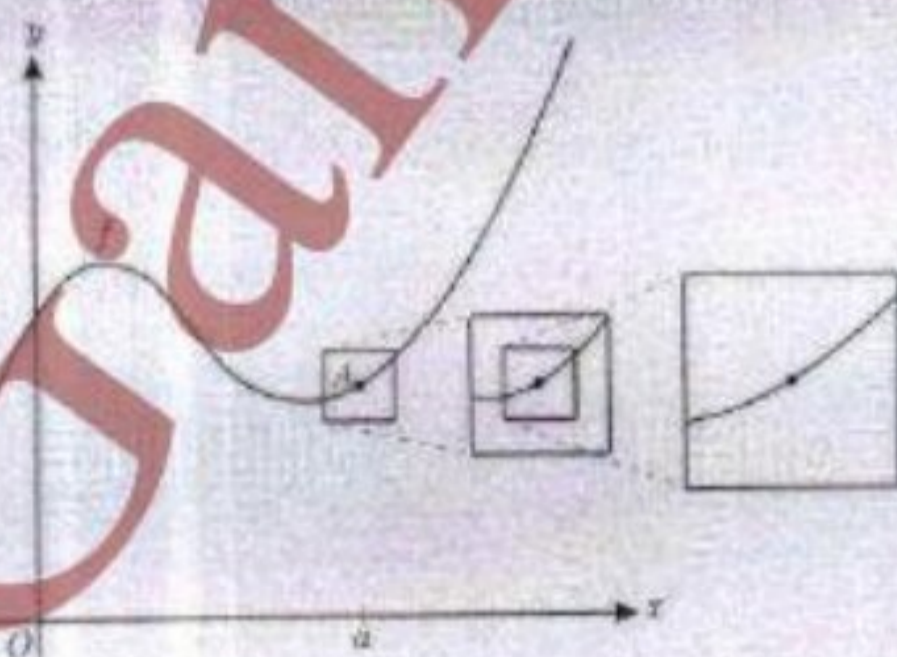
ن) $f(x) = \sin x \cos^2 x$

$$f'(x) = \frac{2\cos^2 x \sin 2x - 2\cos 2x \sin^2 x}{\sin^2 2x}$$

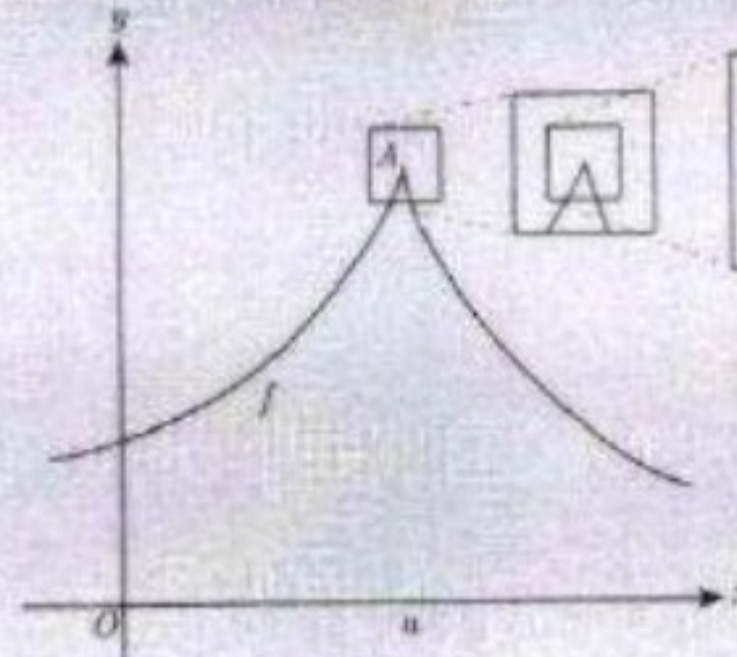
$$f'(x) = \cos x \cos 2x - 2\sin 2x \sin x$$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.



تابع در a مشتق پذیر است.



تابع در a مشتق پذیر نیست.

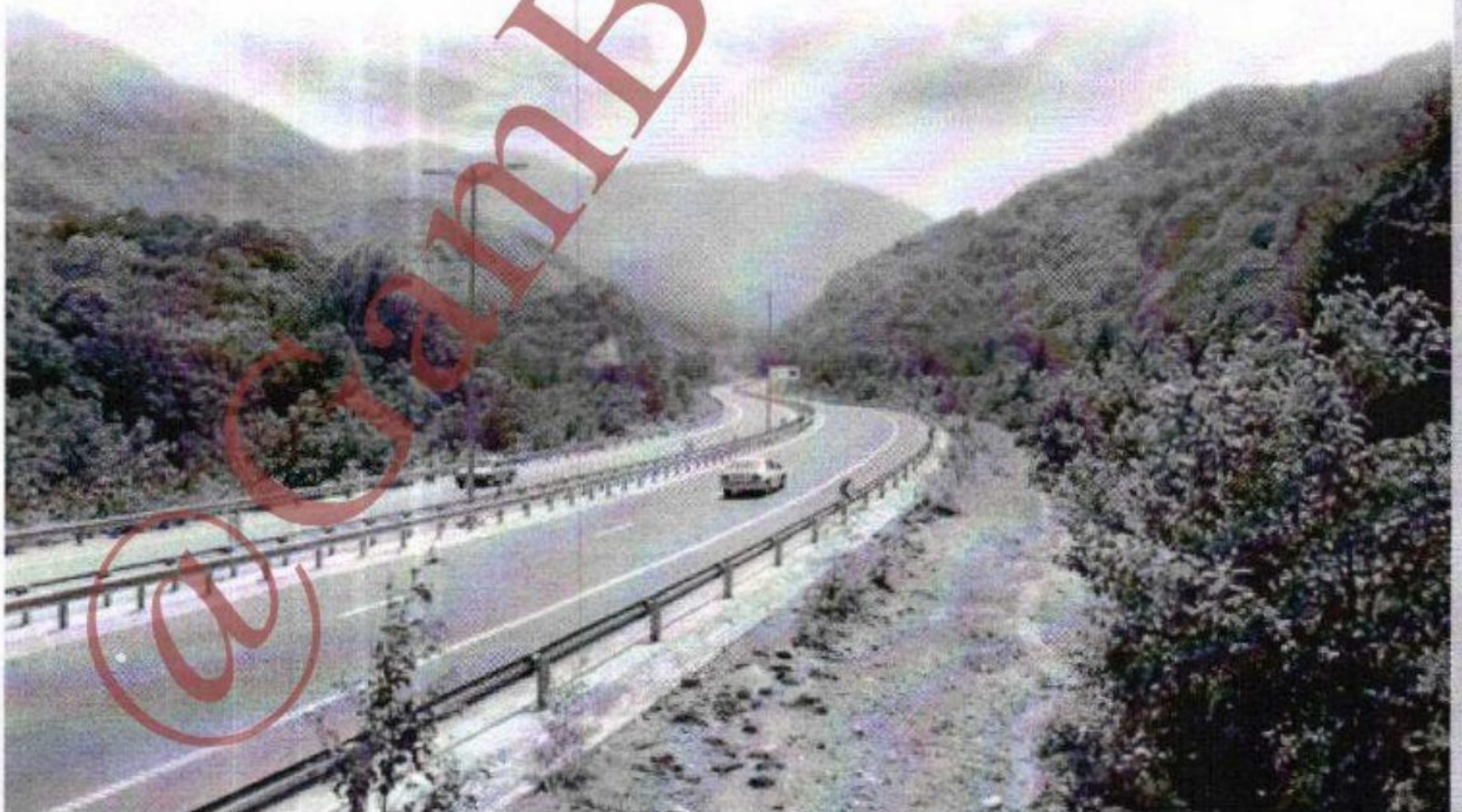


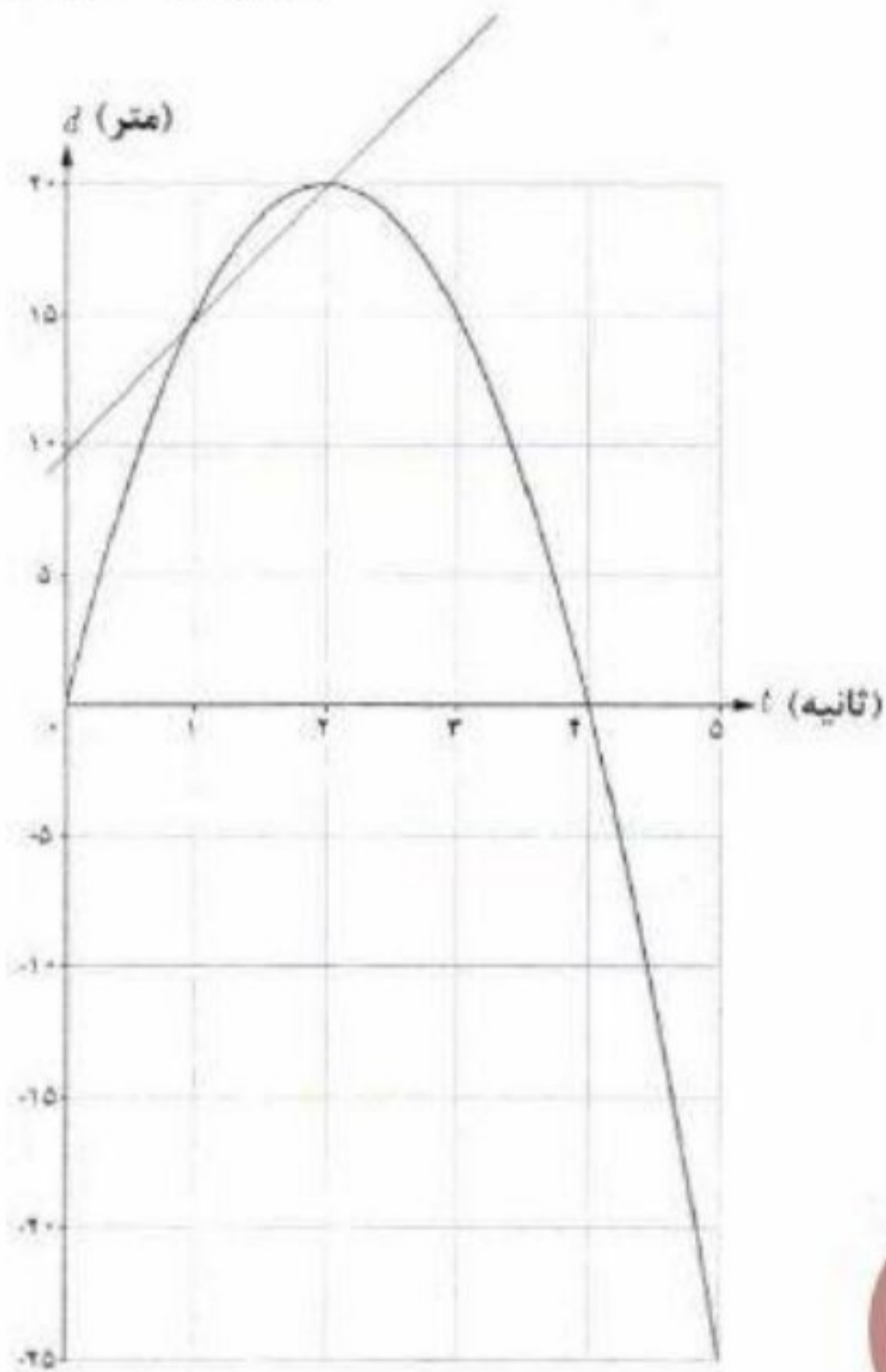
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر



با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت 280 کیلومتر را در 4 ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $\frac{280}{4} = 70$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان - زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.





مثال: خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان - زمان (شکل):

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی $[1,2]$ ، $[1,1/5]$ و $[1,1/4]$ به دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند $[1,1/3]$ و $[1,1/2]$ و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

ب) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

حل:

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,2] = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,1/5] = \frac{d(1/5) - d(1)}{1/5 - 1} = \frac{18/25 - 15}{-4/5} = \frac{3/25}{-4/5} = -3/20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,1/4] = \frac{d(1/4) - d(1)}{1/4 - 1} = \frac{18/16 - 15}{-3/4} = \frac{3/16}{-3/4} = -1/4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

ب) $d'(t) = -10t + 20$ ، پس $d'(1) = 10$

ت) $d'(2) = 0$ ، $d'(3) = -10$



سرعت در لحظه $t=2$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور x هاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=1$ و $t=3$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=3$ برخلاف جهت حرکت در $t=1$ است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } x=a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

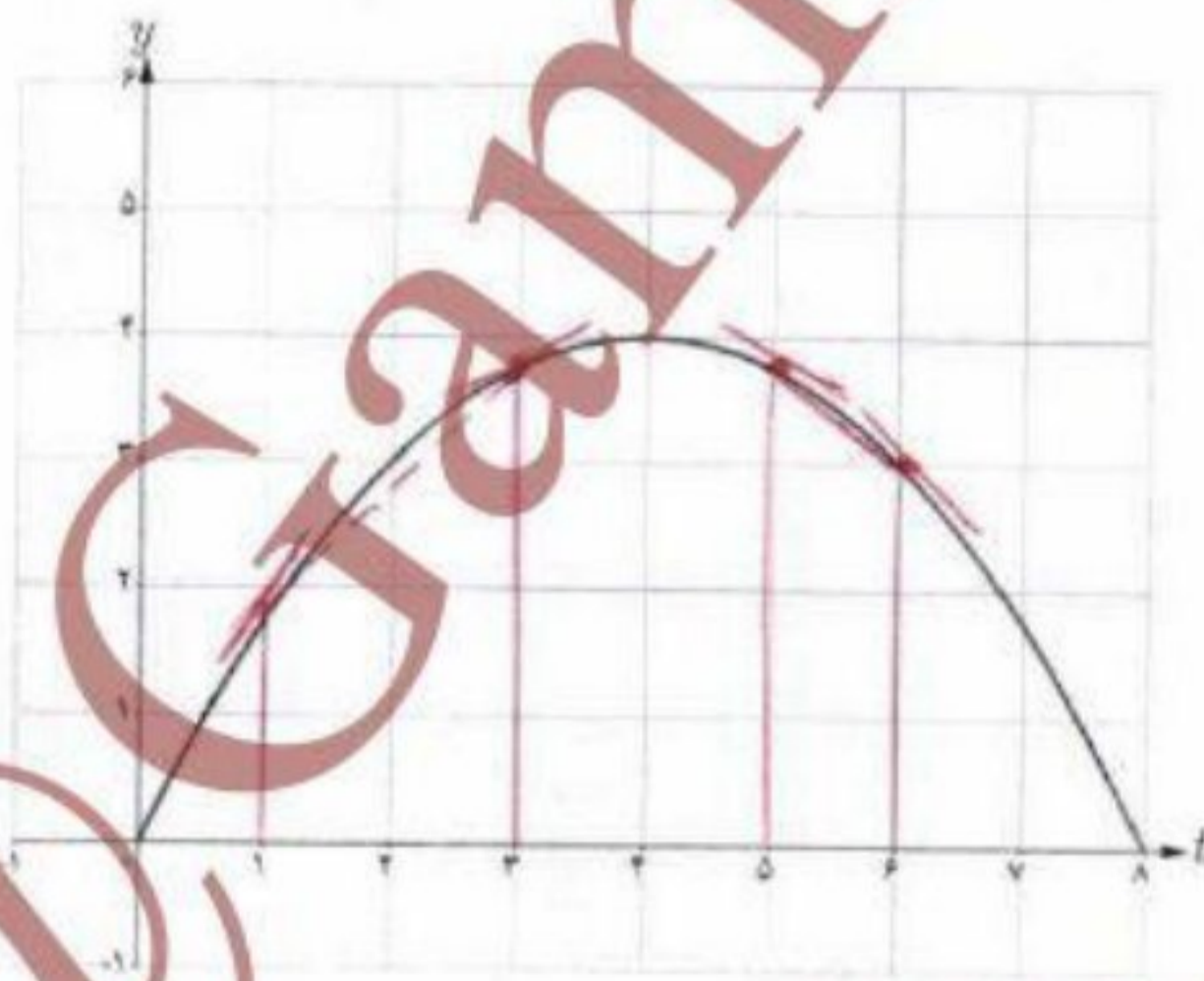
آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه متناظراند.

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کاردر کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبه عددی لازم نیست.)



A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

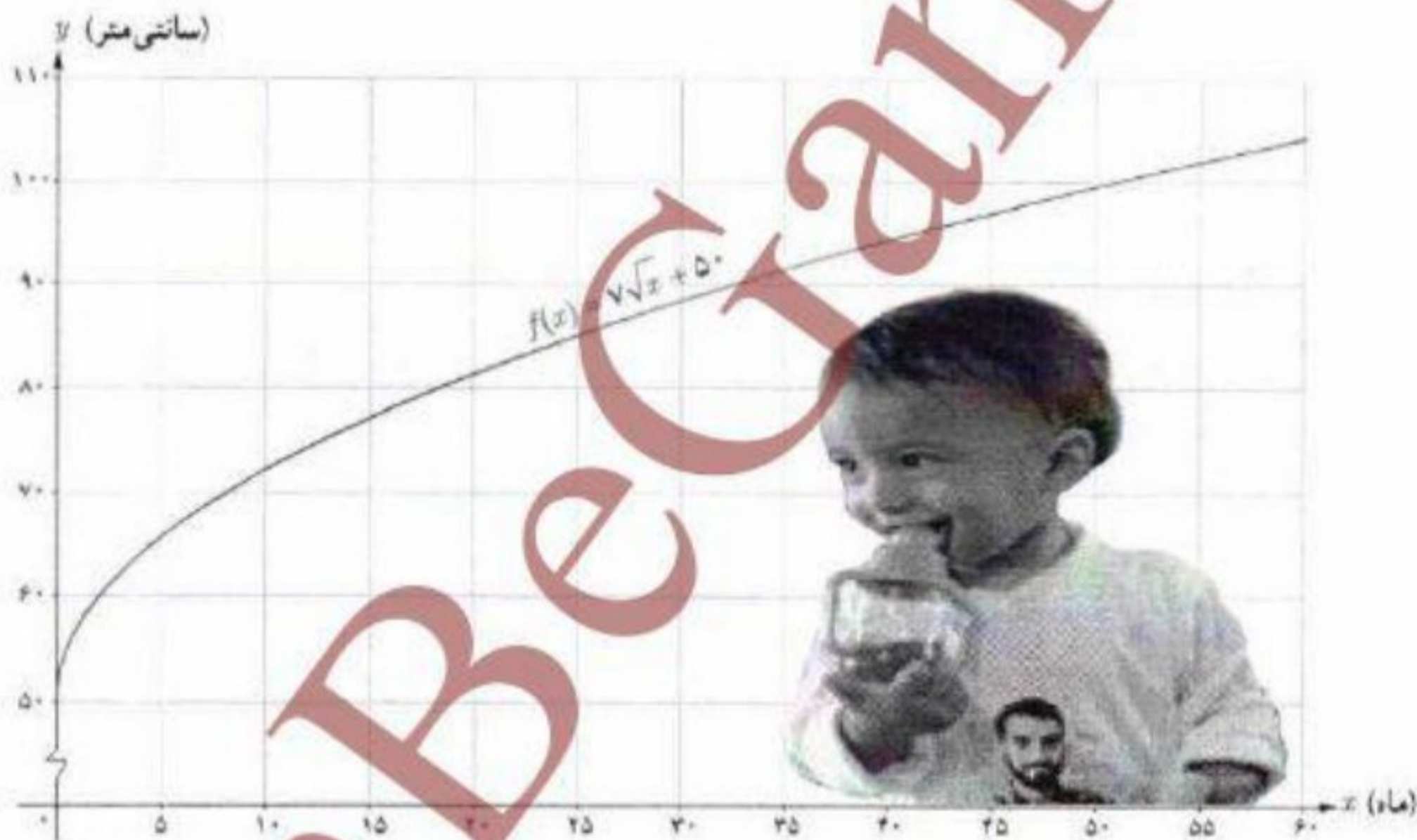
$$F < B < E < D < A < C$$

کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد همان گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 60]$ چنین است:

$$\frac{f(60) - f(0)}{60 - 0} = \frac{\sqrt{60} + 50 - 50}{60} \approx 0.09 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانی متر در هر ماه است.



کاردر کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ $\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{\sqrt{25} + 50 - 50}{25} = \frac{5}{25} = 0.2 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$ $f'(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} \approx 0.07 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$ $f'(25) > f'(49)$

ب) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانی متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانی متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله

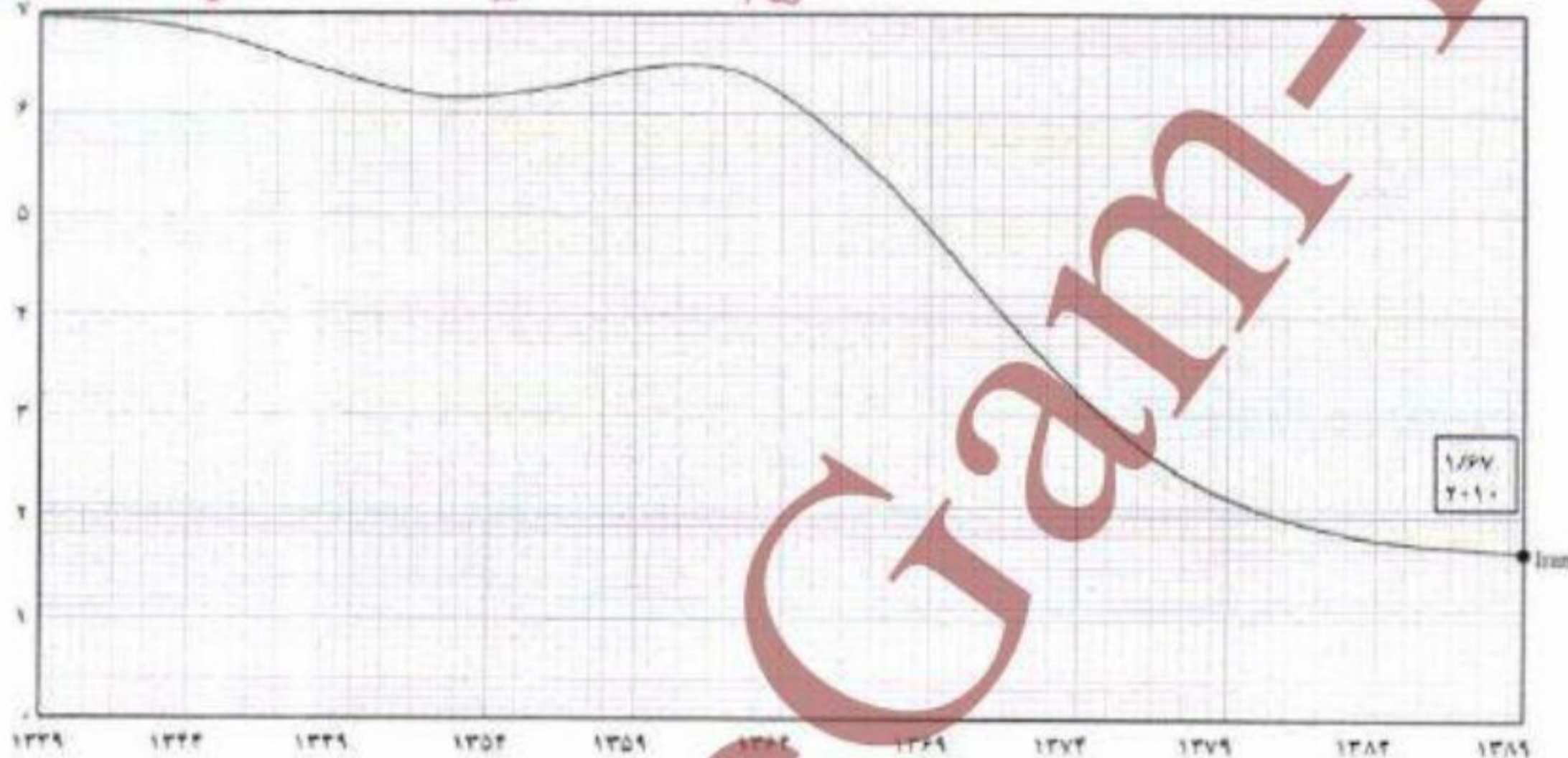
حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.
 $\frac{f(36) - f(16)}{36 - 16} = \frac{9.5 - 8}{20} = \frac{1.5}{20} = 0.075 \frac{\text{سانی متر}}{\text{ماه}}$

نرخ باروری: نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹, ۱۳۸۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با:

$$\frac{1/6 - 7}{1389 - 1339} = \frac{-5/4}{50} = -0.108$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(1379) - f(1364)}{1379 - 1364} = \frac{2.2 - 6.2}{15} = \frac{-4}{15} = -0.27$$

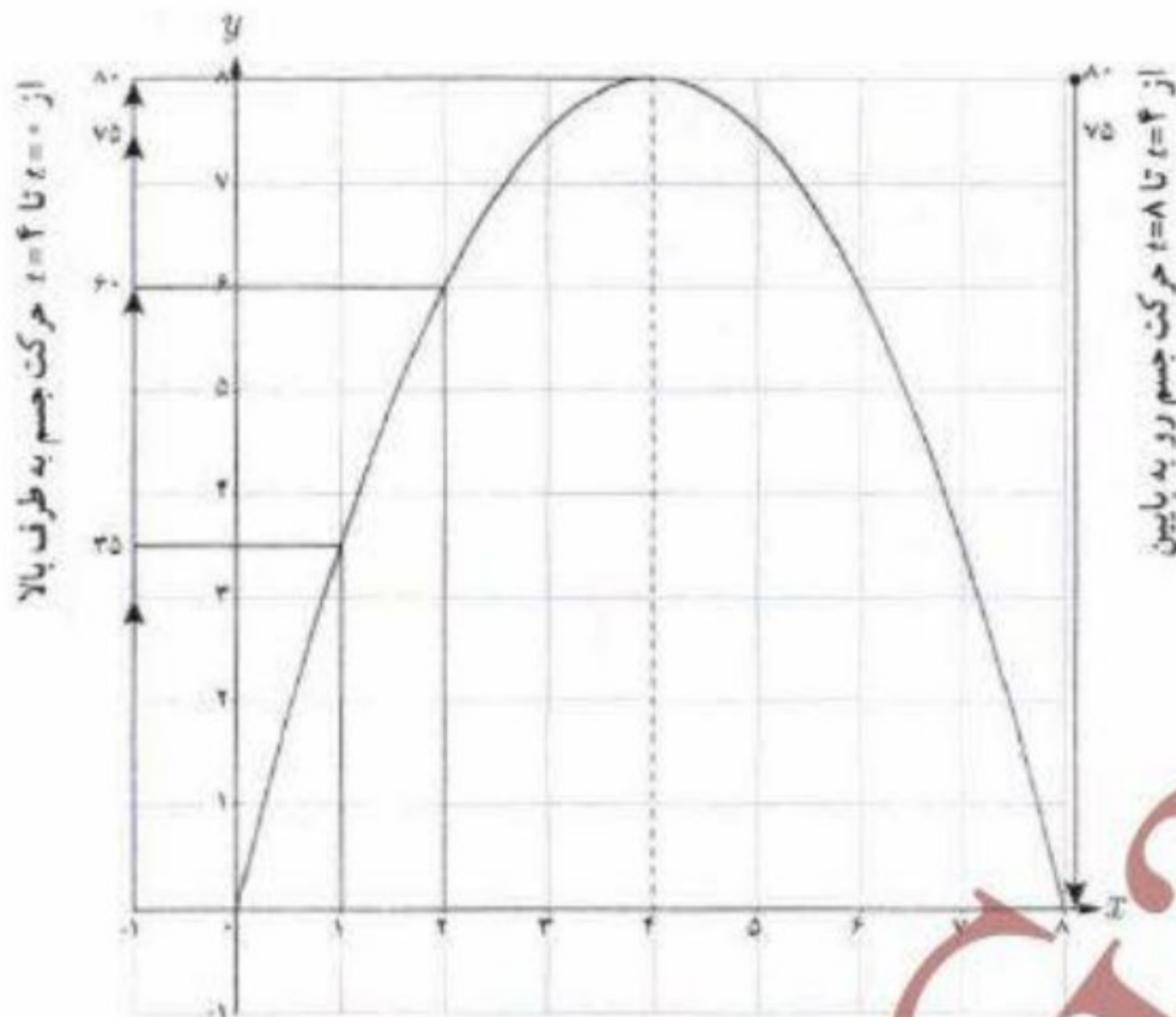


میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، بر اساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای



مثال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید. به طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است. به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان - زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0, 2]$ ، $[1, 2]$ ، $[2, 3]$ و $[3, 4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1 = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{75 - 60}{1} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_4 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 75}{1} = 5 \text{ m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به دست می‌آید:

$$h(t) = -5t^2 + 40t \Rightarrow h'(t) = -10t + 40$$

$$h'(1) = 30 \text{ m/s}, \quad h'(2) = 20 \text{ m/s}, \quad h'(3) = 10 \text{ m/s}, \quad h'(4) = 0 \text{ m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود.

سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4, 5]$ برابر $\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = -5 \text{ m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5) = -10 \text{ m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

با توجه به مثال قبل:

الف) سرعت جسم هنگام برتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید. $t=0 \Rightarrow h'(0) = 40 \text{ m/s}$ هنگام برتاب

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید. $t=8 \Rightarrow h'(8) = -40 \text{ m/s}$ هنگام برخورد به زمین

سرعت متوسط = $\frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 75}{3} = -25 \text{ m/s}$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 25 m/s و -25 m/s است.

سرعت لحظه = $h'(t) = -10t + 40$

$25 = -10t + 40 \rightarrow t = 1.5 \text{ s}$

$-25 = -10t + 40 \rightarrow t = 6.5 \text{ s}$

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

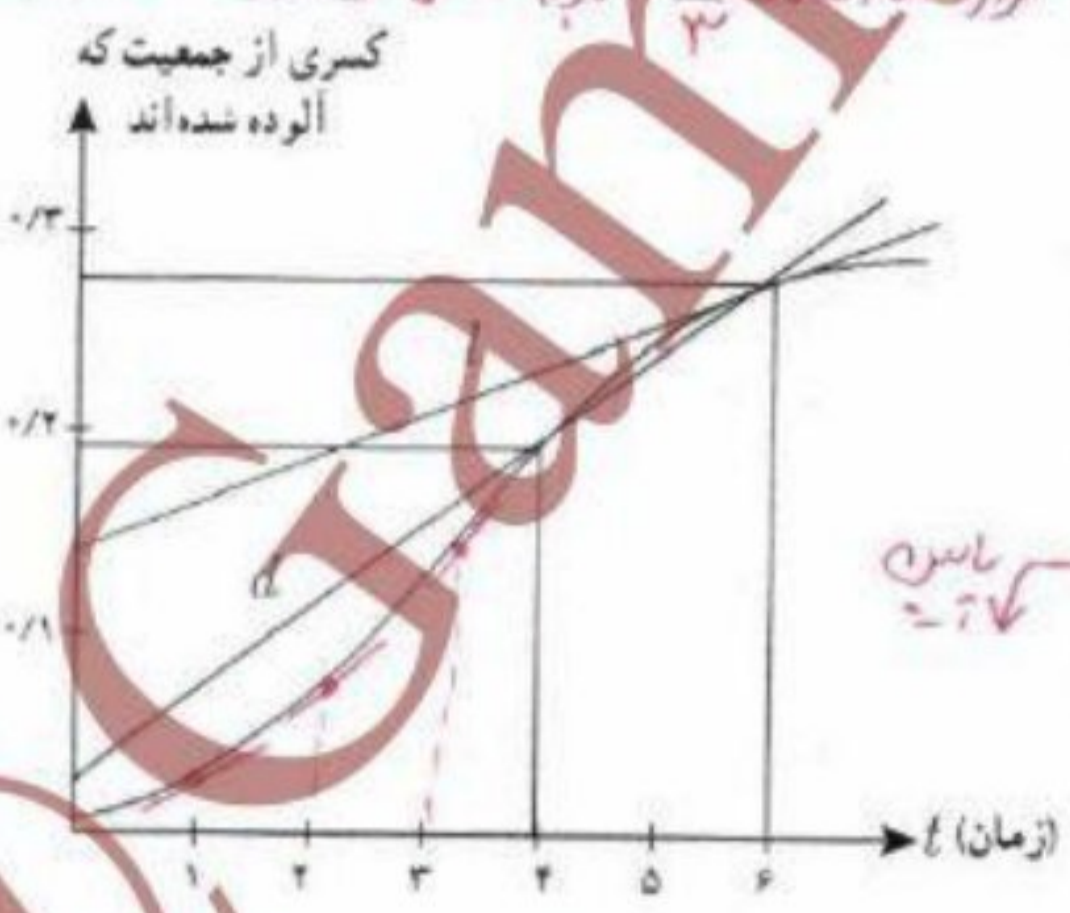
الف) $\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = 2$ ب) $\frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = -\frac{5}{3}$

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.



۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار روبه رو نشان داده شده است.

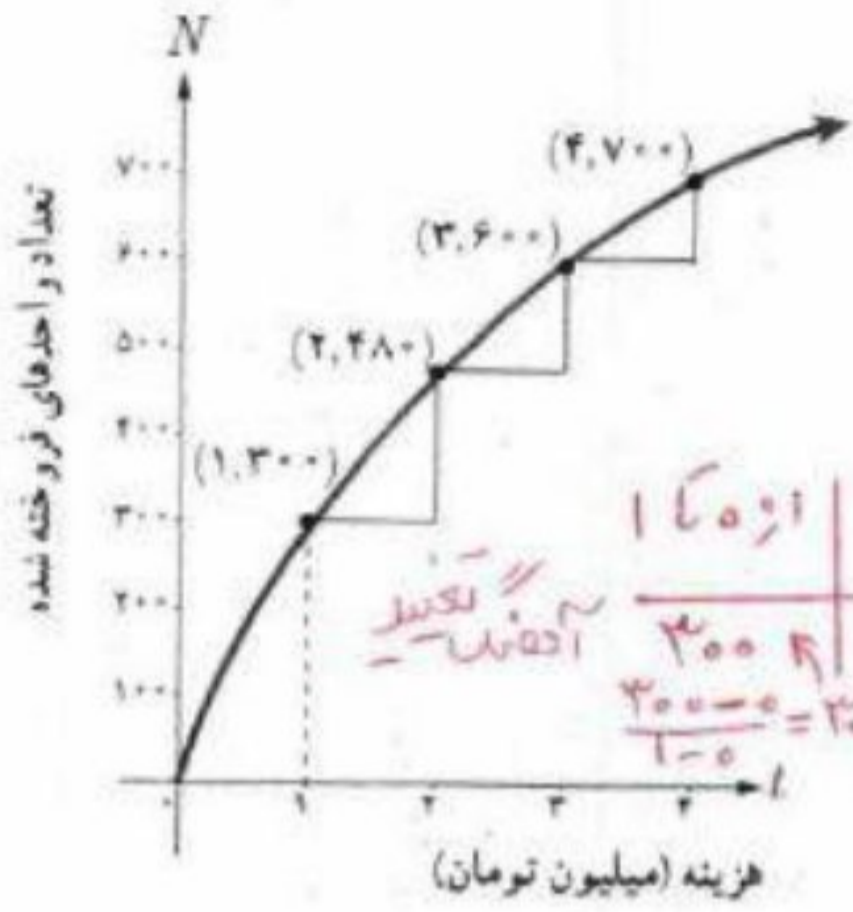
الف) شیب های خطوط t و d چه چیزهایی را نشان می دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ $t=3$

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

الف) شیب خط d آهنگ تغییر لحظه ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه $t=6$ (هفته ی ششم) نشان می دهد.

ب) شیب خط d آهنگ تغییر متوسط کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله ی زمانی $t=6$ تا $t=6$ (هفته ی چهارم تا هفته ی ششم) نشان می دهد.



۲ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف ۱ میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

از ۰ تا ۱	از ۱ تا ۲	از ۲ تا ۳	از ۳ تا ۴
۱۸۰	۱۲۰	۱۰۰	۱۰۰

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟
 فرض شده شده کم می‌شود و در واقع کمتر می‌شود. خریدار کم می‌شود.

۳ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است.

در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{25 - 1}{5} = 4.8$$

Handwritten: $t^2 - t + 1 = 4.8 \Rightarrow t^2 - t - 3.8 = 0$

۴ تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
f(t)	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

$$\frac{f(0.4) - f(0.3)}{0.1} = 12 \text{ m/s}$$

$$\frac{f(0.5) - f(0.4)}{0.1} = 11 \text{ m/s}$$

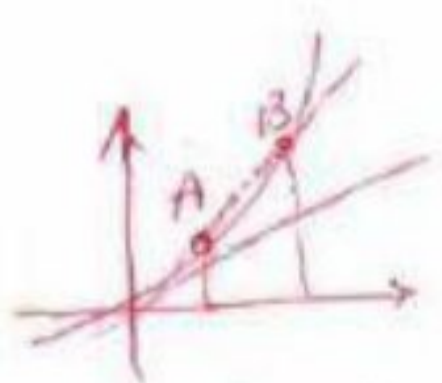
$$f'(0.4) = 11.5 \text{ m/s}$$

بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظر زمان ۰/۴ ثانیه است نشان دهد؟

- الف) $1/23 \text{ m/s}$ ب) $14/91 \text{ m/s}$ ج) $11/5 \text{ m/s}$ د) $16/03 \text{ m/s}$

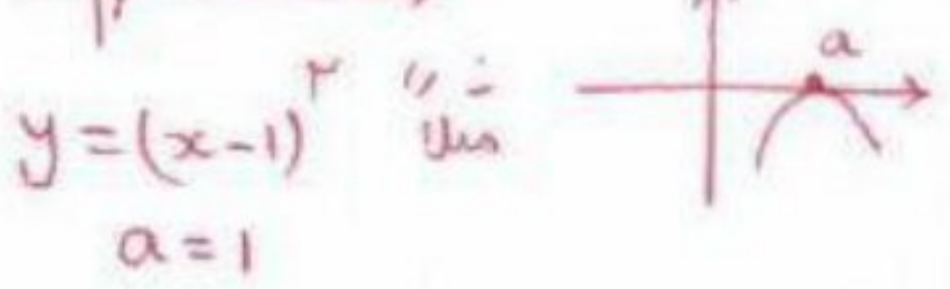
۵ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به طور مثال $f'(2) = -6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰
f(x)	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
f'(x) مقدار تقریبی	-۶	-۳	-۱/۸	-۰/۱۴	x



کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0, 1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. **نادرست**
 ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. **نادرست**



پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f(a) = 0$ و هم $f'(a) = 0$ **نادرست**
 $f(a) = f'(a) = 0$

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$\frac{m(4) - m(3)}{4 - 3} = \frac{130 - \sqrt{3} - 54}{1} \approx 76, 3$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow m'(3) \approx 54, 3g$$

۹ گنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

الف) $\frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 39, 204 - 40 = -0, 796$ لیتر

ب) $\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = -0, 4$ **آهنگ متوسط**

$V'(t) = -0, 8(1 - \frac{t}{100})$ $\rightarrow -0, 8(1 - \frac{t}{100}) = -0, 4$

$\rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 50$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان



کاربردهای مشتق

- ۱ اکستریم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
- ۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
- ۳ رسم نمودار توابع

فصل

گردنه سیران (اردبیل)

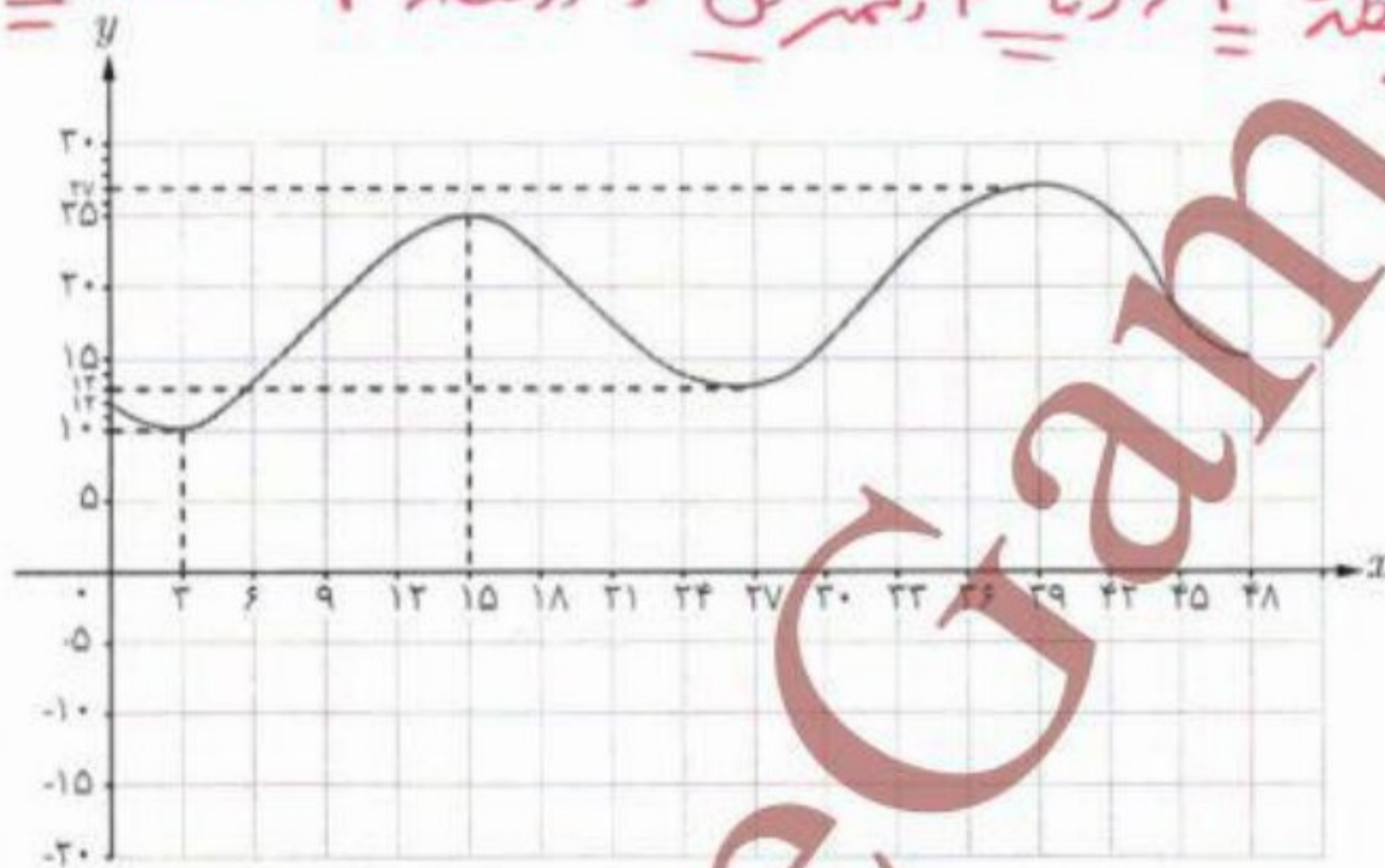
سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان - زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

درس

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

بیشترین دما ۳۹ در نقطه ۳ و کمترین دما ۱۰ در نقطه ۲۷



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد. نقاط به طول ۳ و ۲۷ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت:

تعریف:

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) باشد که

(الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

(ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

۵

دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۱۵, ۲۵) و (۲۷, ۳۹) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x=15$ و $x=27$ اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۳, ۱۰) و (۲۷, ۱۳) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x=3$ و $x=27$ اتفاق افتاده‌اند.

در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک مجموعه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در مجموعه I به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطه نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطه $x=a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x=a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a, f(a))$ نقطه ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است. به عبارتی برای هر $x \in I$ داریم $f(x) \leq f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطه $x=a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a, f(a))$ نقطه مینیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است.

تذکر: گوییم تابع f در نقطه $x=c$ اکسترمم نسبی دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطه $x=c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه اکسترمم مطلق دارد.

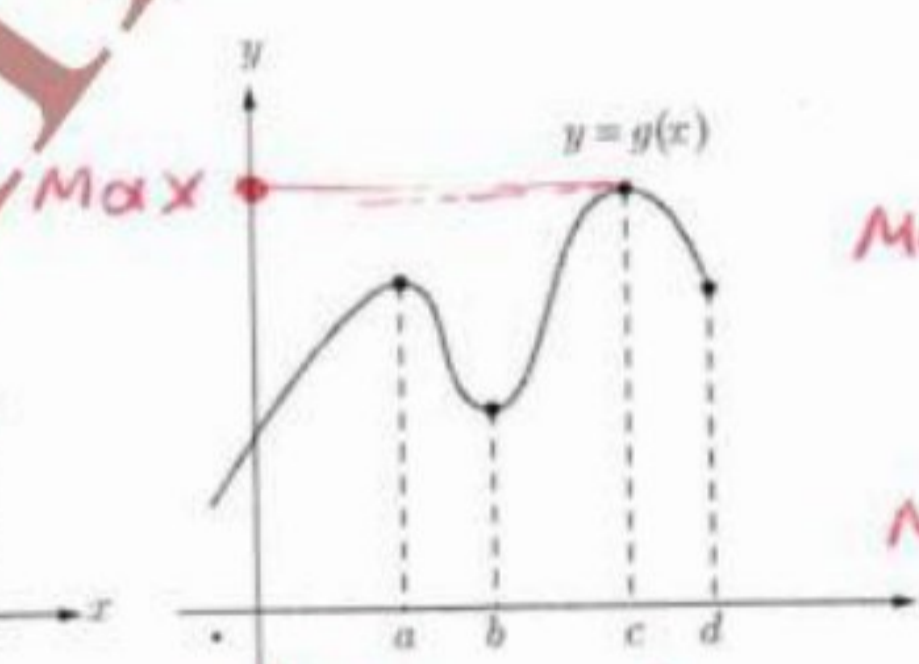
کاردر کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

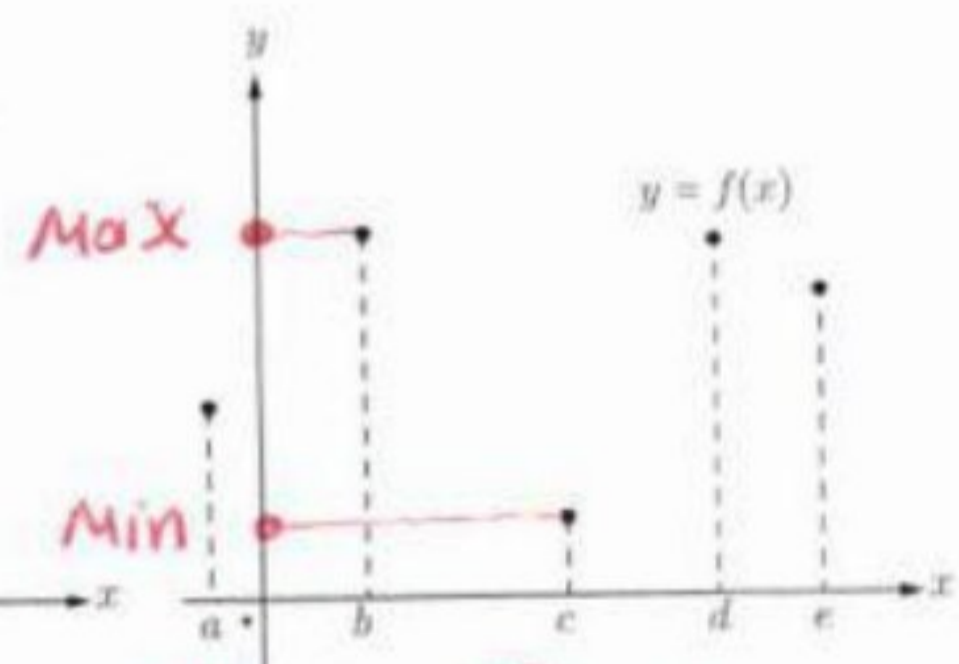
$x=a$ ماکزیمم مطلق



(ب) $x=f$ مینیمم مطلق



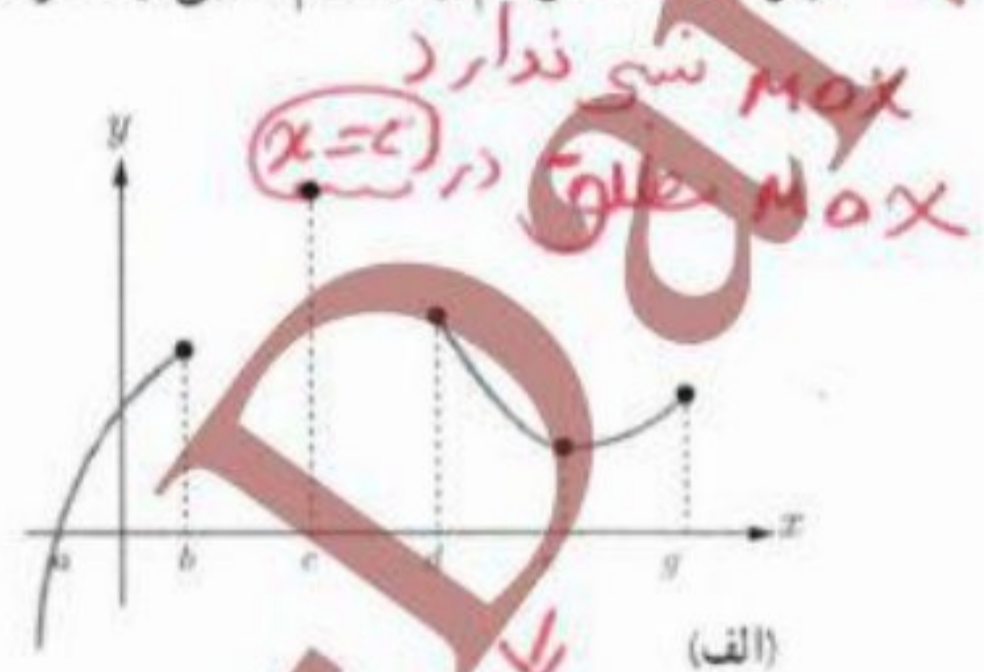
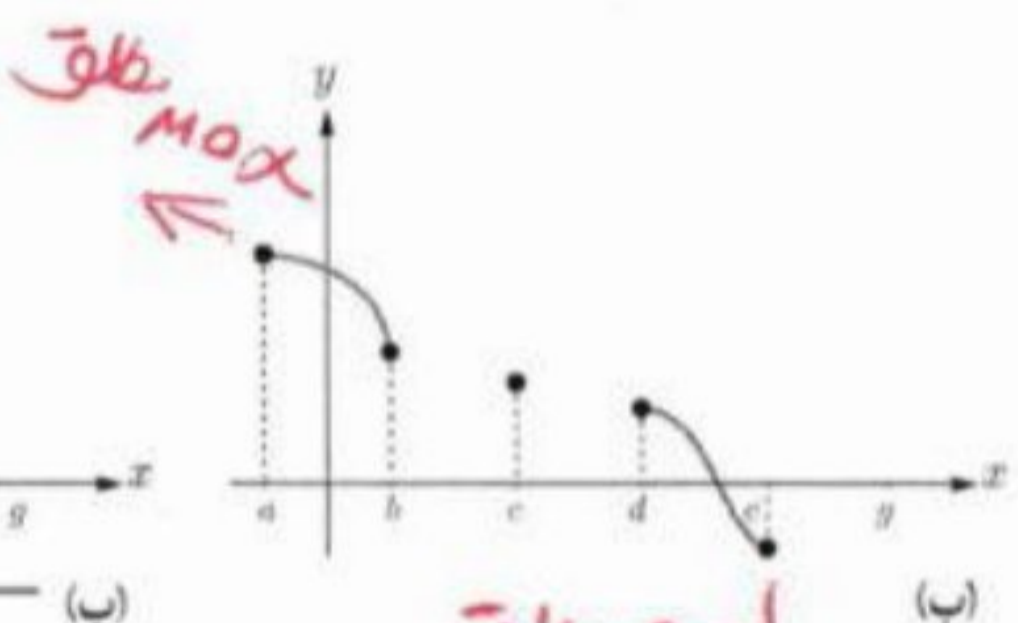
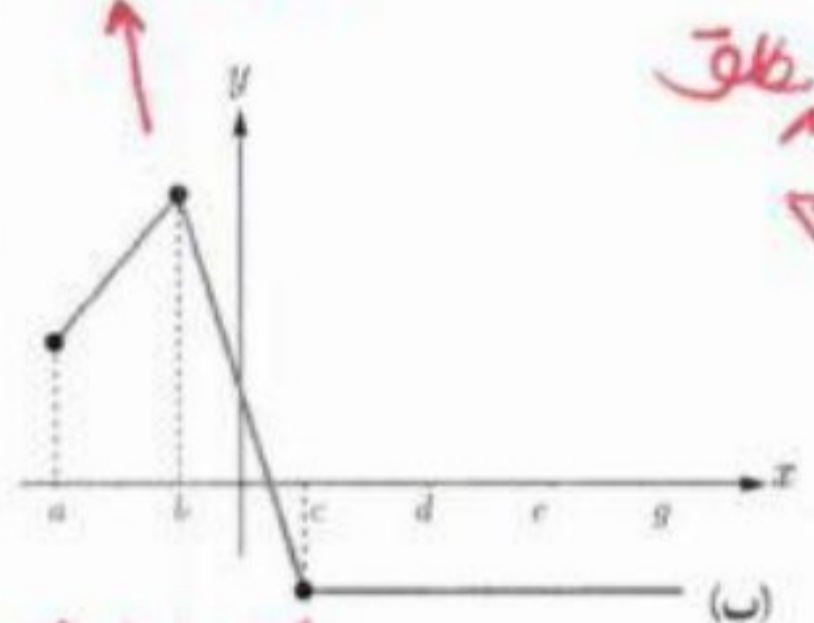
(ب) مینیمم مطلق ندارد
 $x=c$ ماکزیمم مطلق



(الف) $x=b$ ماکزیمم مطلق
 $x=c$ مینیمم مطلق

دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطه ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

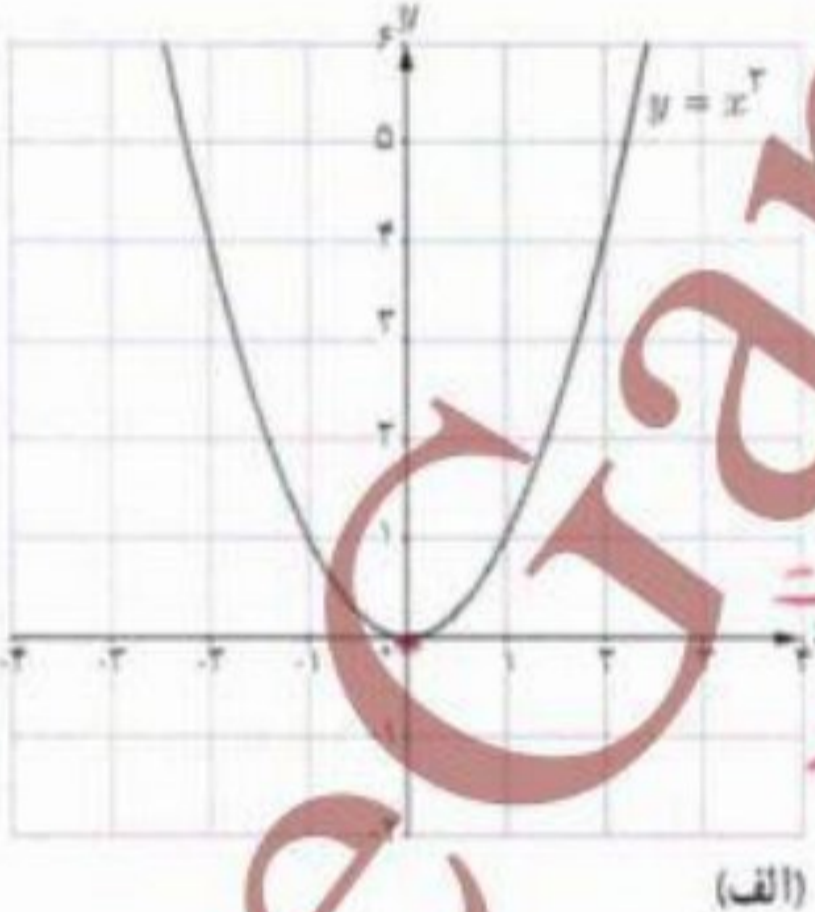
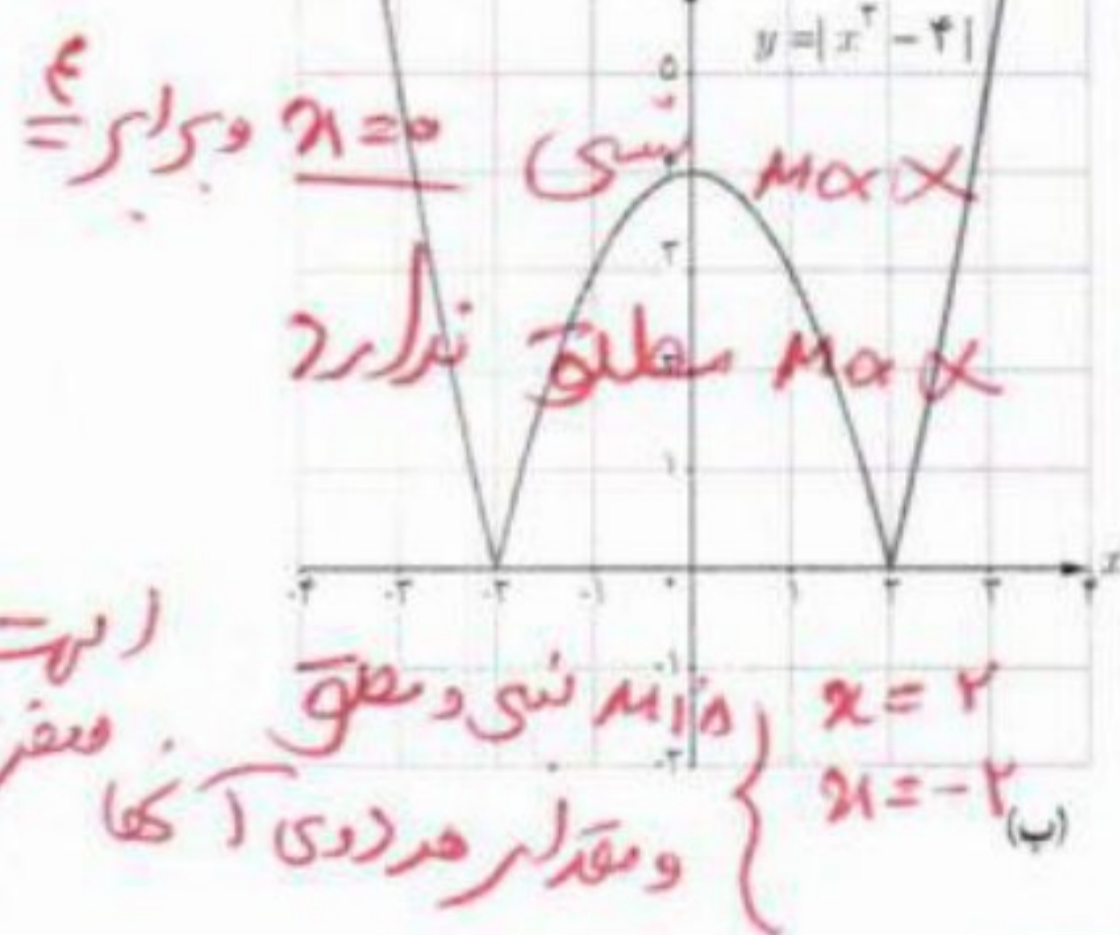
Max مطلق نسبی



min مطلق نسبی

min مطلق

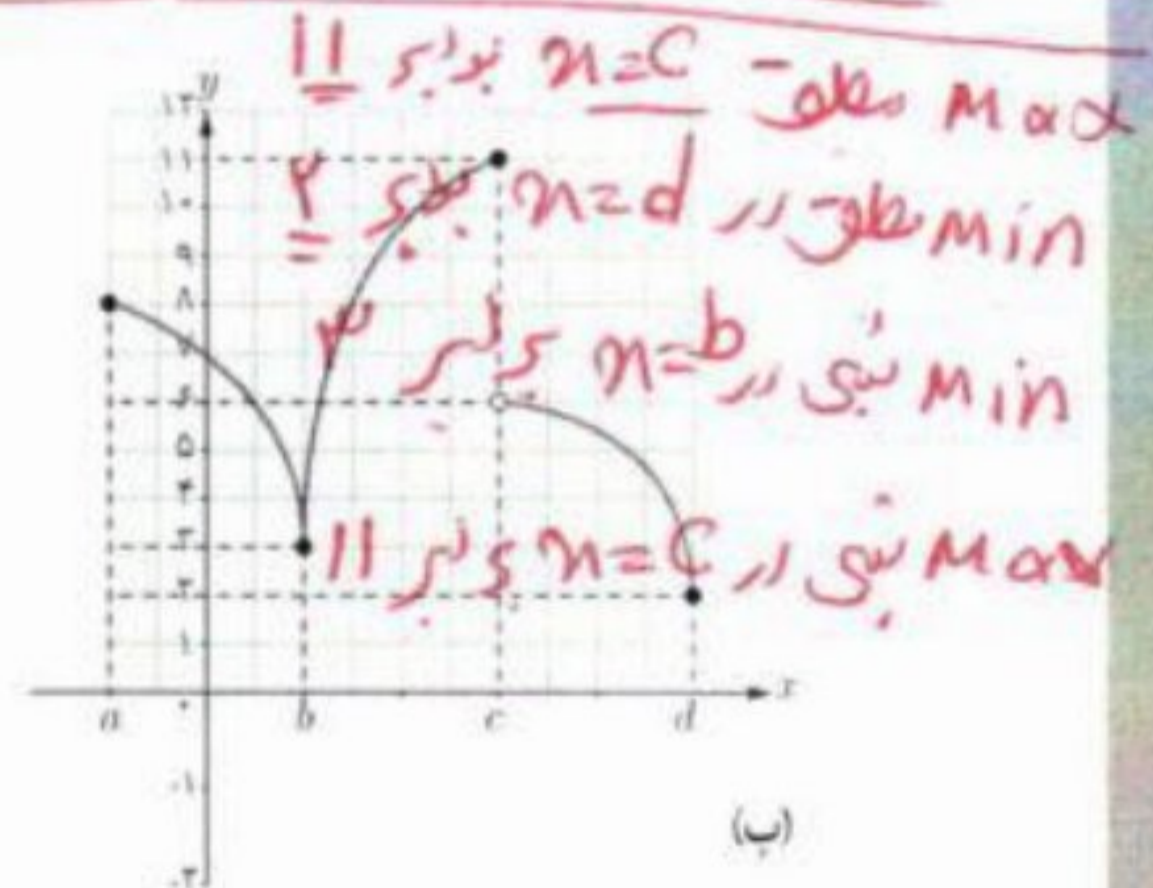
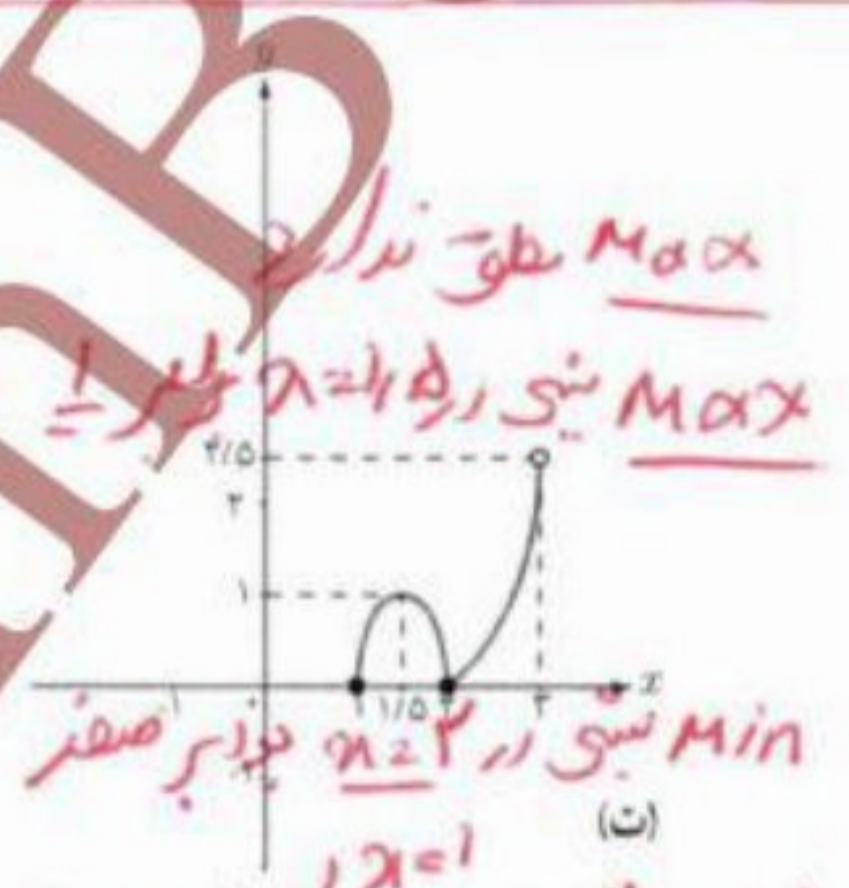
min نسبی ندارد
min مطلق ندارد



در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.

min نسبی و مقدار برابر 0 است
min مطلق

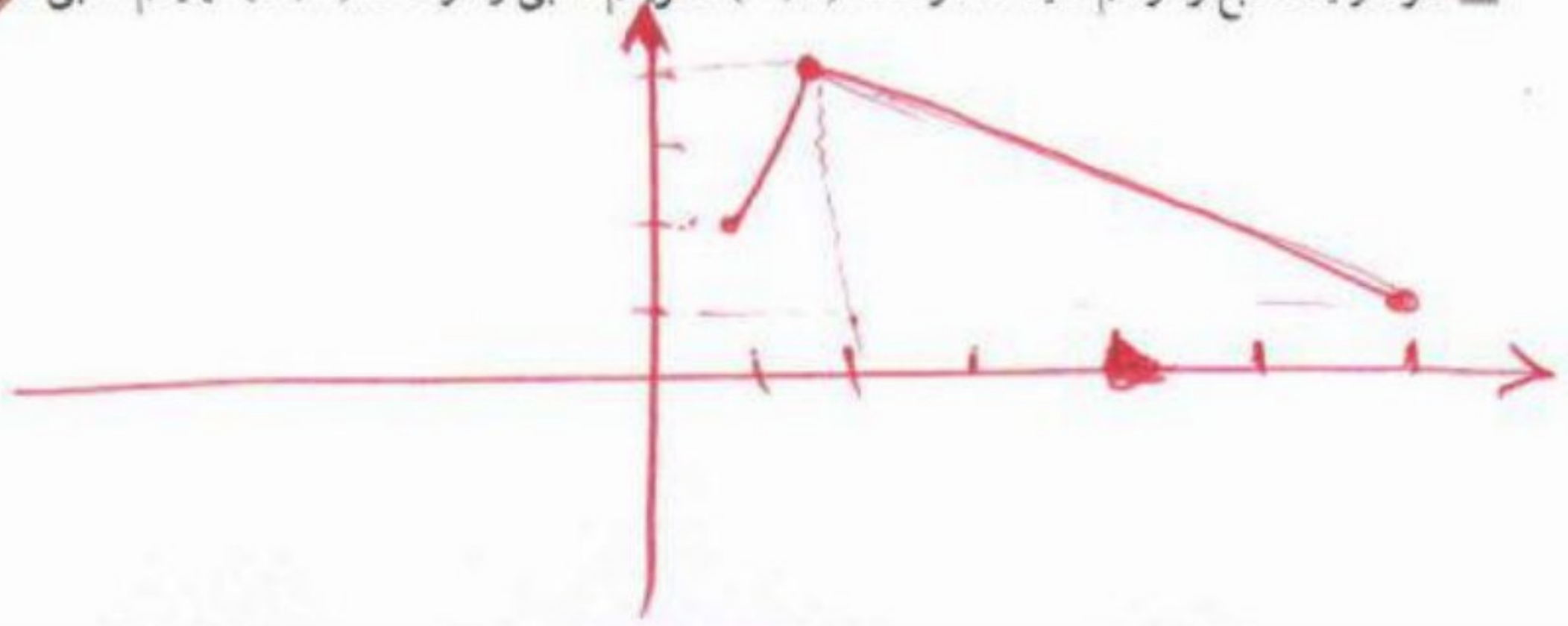
Max نسبی و مقدار ندارد



min مطلق (1, -5) برابر 5

min مطلق در x=2 برابر صفر
max نسبی در x=4 برابر 1

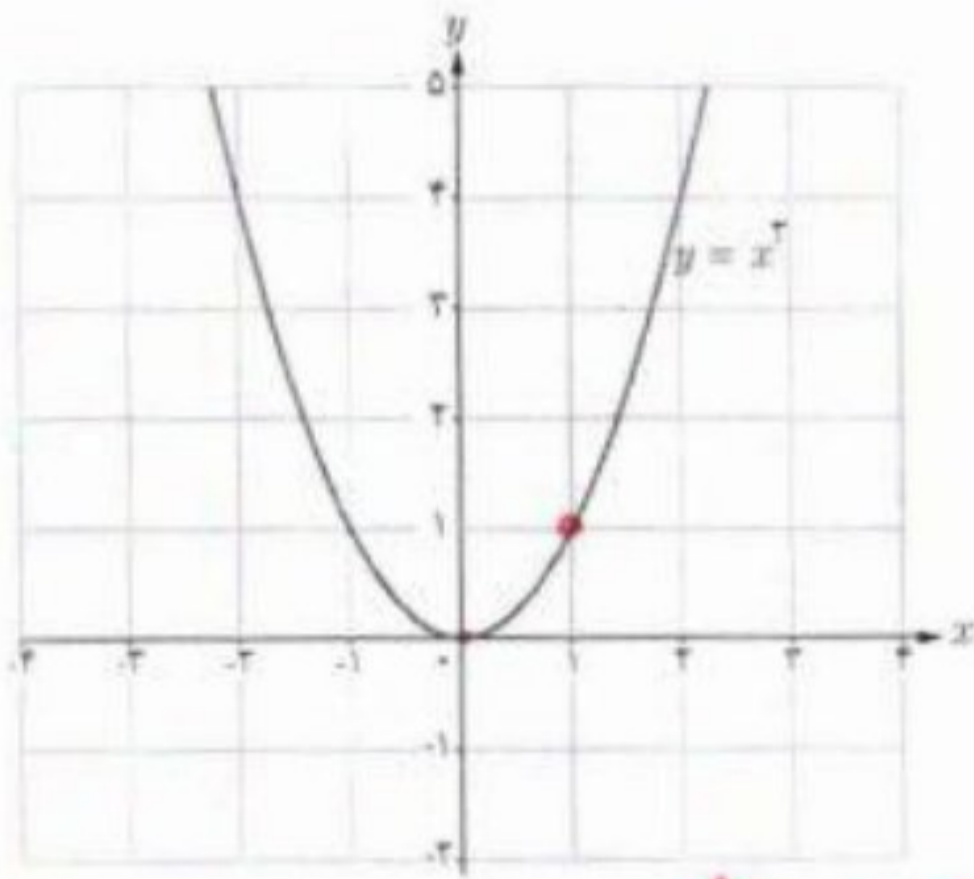
نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه (2, 4) ماکزیمم نسبی و در نقطه (5, 1) مینیمم نسبی دارد.



5

(ب) در $x=0$ یعنی $(0,0)$ مطلق در \mathbb{R} اما ماکزیمم مطلق ندارد.

فصل پنجم: کاربردهای مشتق 115



الف) تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.
وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.
ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر \mathbb{R} بررسی نمایید.

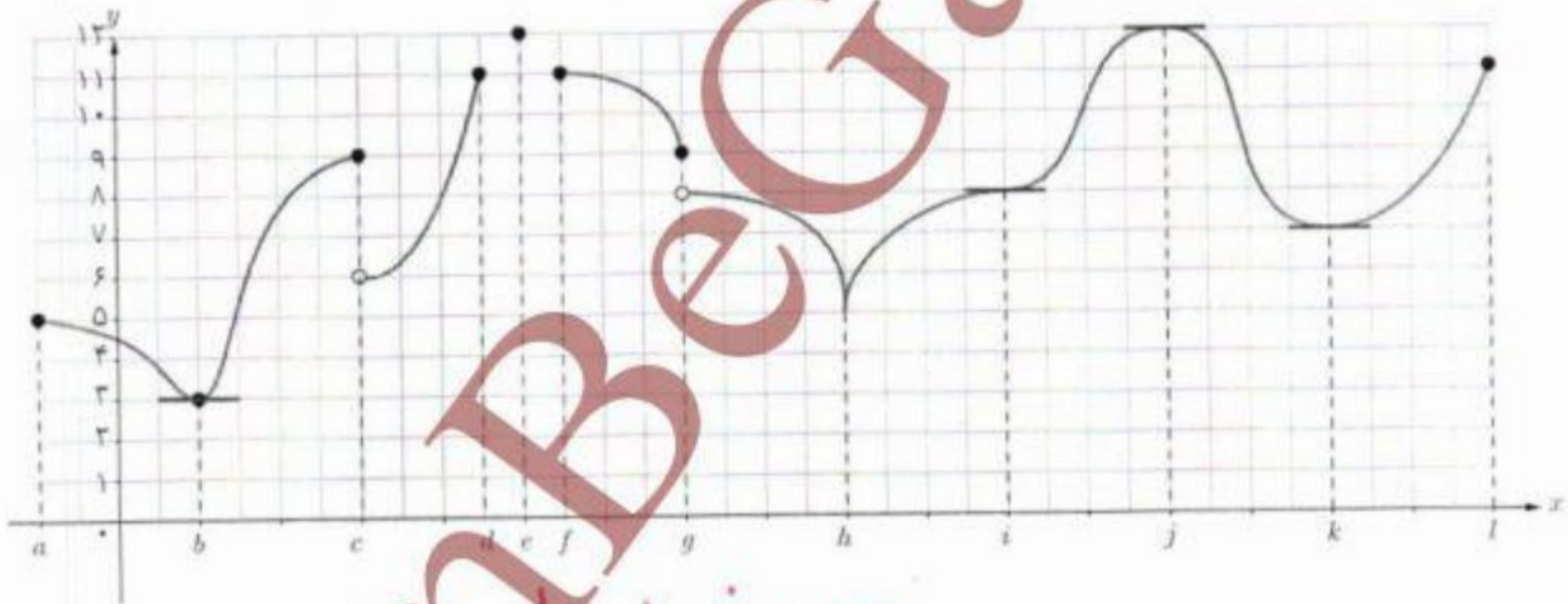
(الف) در $[0, 1]$ Min مطلق برای 0

و Max مطلق برای 1

اما در $(0, 1)$ Max و Min مطلق ندارد.

فعالیت

الف) در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید. c و d و e و f و g و h و i و j و k و l

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید. a و c و d و e و f و g و h و i و j و k و l

ب) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید. b و d و f و h و j و l

ت) آیا در همه نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟ خیر

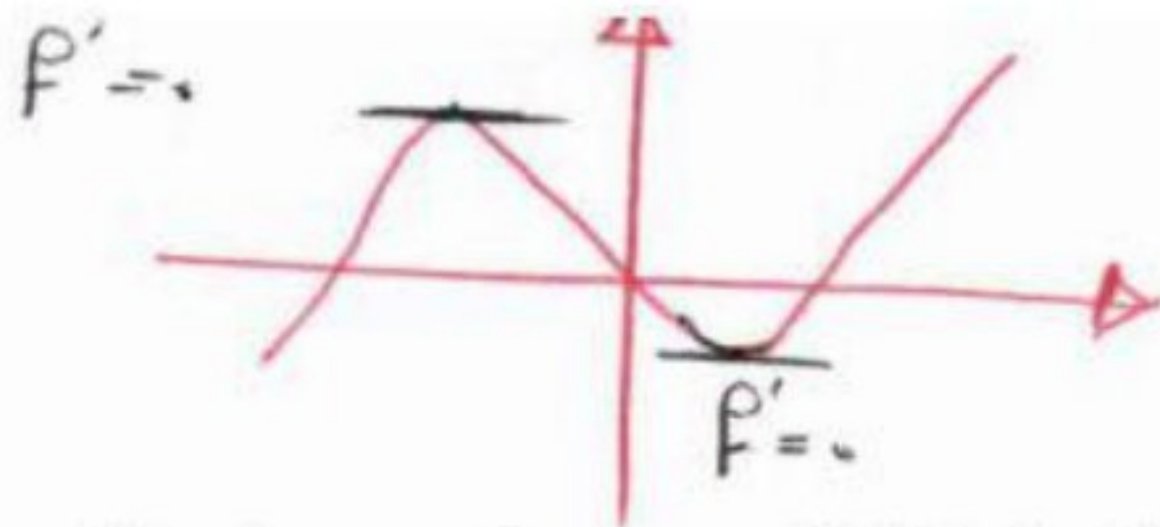
ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟ صفر

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟ بله (نقطه ک)

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟ بله

در نقطه g





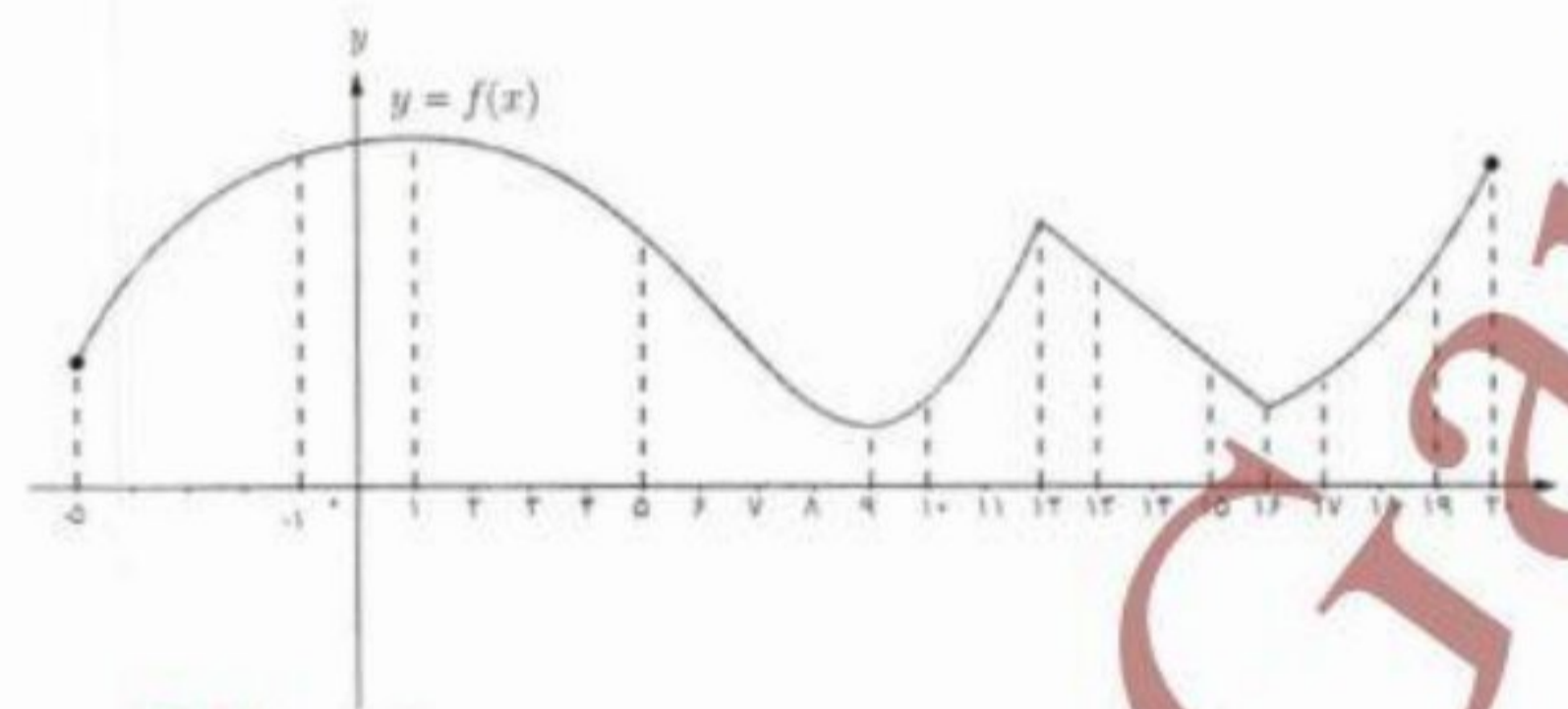
۲

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟

$f' = 0$

- ۱ با توجه به آنچه در قسمت های ۱ و ۲ دیدید، کدام یک از موارد زیر می تواند درست باشد؟
- الف) اگر $f'(c) = 0$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی نیست. **نادرست**
- ب) اگر $f'(c) = 0$ آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی است. **نادرست**
- پ) اگر $x = c$ طول یک نقطه اکسترمم نسبی باشد و $f'(c) = 0$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$. **درست**

فعالیت



۱ شکل رویه رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می دهد.

Min مطلق

الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه های زیر بررسی کنید.

$[-1, 0]$	$[0, 5]$	$[5, 13]$	$[13, 15]$	$[15, 19]$
Max مطلق و Min مطلق	Max مطلق	Min مطلق	Max مطلق	Min مطلق

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه های باز زیر بررسی کنید.

$(-1, 0)$	$(0, 5)$	$(5, 13)$	$(13, 15)$	$(15, 19)$
وجود ندارد	Min مطلق $x=9$ و Max مطلق ندارد	وجود ندارد	وجود ندارد	وجود ندارد

- ۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام یک از موارد زیر نمی تواند درست باشد؟
- الف) هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته دارای اکسترمم های مطلق است. **درست**
- ب) هر تابع پیوسته بر یک بازه باز دارای اکسترمم های مطلق است. **نادرست**
- قضیه زیر را بدون اثبات می پذیریم.

قضیه: اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.



با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»^(۱)، یا در «اکسترم‌های نسبی تابع»^(۲) و با در «نقاطی که تابع در آنها مشتق پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکسترم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و با «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند:

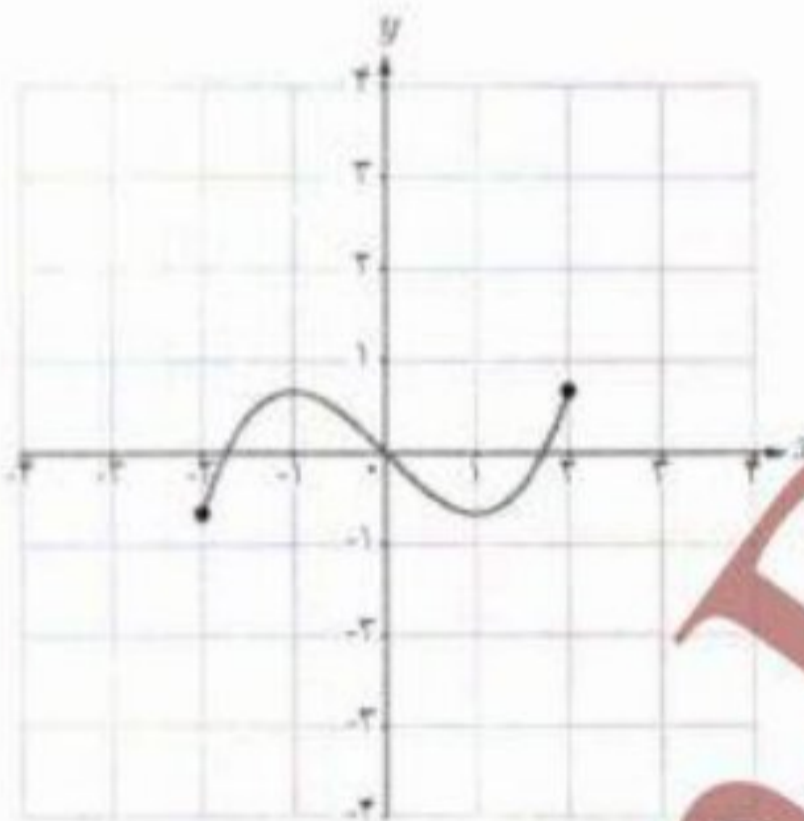
۱) نقاطی که مشتق تابع در آنها وجود ندارد.

۲) نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.

۳) نقاط ابتدایی و انتهایی بازه مورد نظر.

مجموعه حاصل از اجتماع نقاط دو دسته (۱) و (۲) را «نقاط بحرانی» می‌نامیم؛ «به عبارتی نقاط بحرانی نقاطی از دامنه تابع هستند که مشتق تابع در آنها وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است.» برای یافتن نقاط اکسترم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار مینیمم مطلق تابع است.

مثال: اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.



حل: بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازه $(-2, 2)$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازه $(-2, 2)$ مشتق پذیر است و داریم $f'(x) = x^2 - 1$ و مقدار f' در $x = \pm 1$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(1) = 0$ و $f'(-1) = 0$.

بنابراین $x = \pm 1$ طول نقاط بحرانی و $x = \pm 2$ طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم:

$$f(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$f(-1) = \frac{2}{3}$$

$$f(1) = -\frac{2}{3}$$

$$f(2) = \frac{2}{3}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x = -1$ و $x = 2$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x = 1$ و $x = -2$ است.



مثال: مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = |x^2 - 1|$ را روی بازه $[-2, 2]$ پیدا کنید.

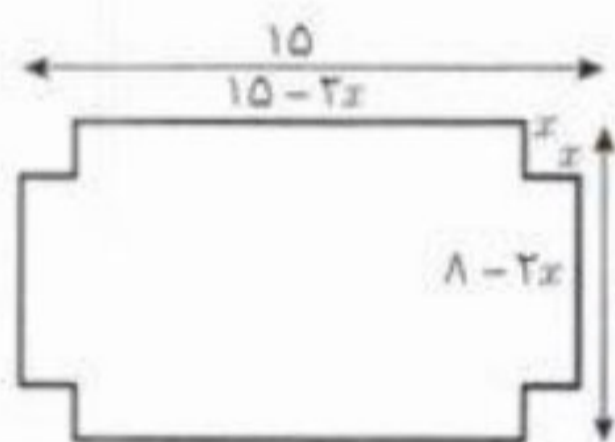
حل: نقاط $x = \pm 2$ نقاط انتهایی بازه اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq -1 \text{ یا } 1 \leq x \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \text{ یا } 1 < x \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقاط $x = -1$ و $x = 1$ به دست آوریم که با توجه به تعاریف مشتق چپ و راست از فصل مشتق خواهیم داشت:

$$f'_-(-1) = -2, \quad f'_+(-1) = 2, \quad f'_-(1) = -2, \quad f'_+(1) = 2$$

بنابراین تابع f در نقاط $x = \pm 1$ مشتق پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطه $x = 0$ مقدار صفر می‌گیرد. لذا نقاط $x = \pm 1$ و $x = 0$ نقاط بحرانی این تابع اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می‌شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطه $x = \pm 1$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x = \pm 2$ و مقدار آن برابر ۳ است. در بسیاری از مسائل در زندگی خواهان این هستیم که با دانستن برخی شرایط از پیش تعیین شده، مسئله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشیم. به عنوان نمونه در مثال زیر می‌خواهیم از ورقه‌ای با ابعاد مشخص جعبه‌ای با بیشترین حجم ممکن بسازیم.



مثال: یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ^۱ و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سرباز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟

حل: فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینج بریده می‌شود x باشد. پس

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{15}{2} & \text{ طول قوطی مورد نظر} \\ 0 \leq x \leq 4 & \text{ عرض قوطی} \end{aligned}$$

پس با توجه به این مفروضات داریم:

$$V(x) = x(15 - 2x)(8 - 2x) = 4x^2 - 46x + 120, \quad 0 \leq x \leq 4$$

۱- هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی‌متر است.



چون V روی $[4, 0]$ پیوسته است، پس دارای اکسترم‌های مطلق در این بازه است و داریم:

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$$

$$(3x-5)(x-6) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ یا } x = 6$$

اما $x = 6$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x = \frac{5}{3}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(0) = 0$ ، $V(\frac{5}{3}) > 0$ و $V(4) = 0$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x = \frac{5}{3}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{5}{3}$ اینج باشد.

مثال: در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل: فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه OAB ،

$$OB = \frac{h}{2} \text{ و داریم:}$$

$$AB^2 + OB^2 = OA^2$$

$$\text{بنابراین } r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$$

حجم این استوانه برابر است با:

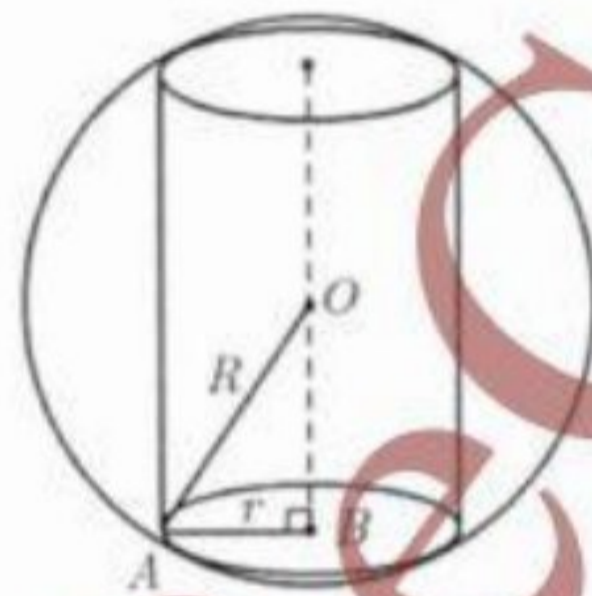
$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h \Rightarrow V(h) = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4} h^3 ; 0 \leq h \leq 2R$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه $[0, 2R]$ ، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4} h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

از طرفی $V(0) = 0$ و $V(2R) = 0$

بنابراین تابع V به ازای $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$ مقدار r برابر با $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ می‌باشد.

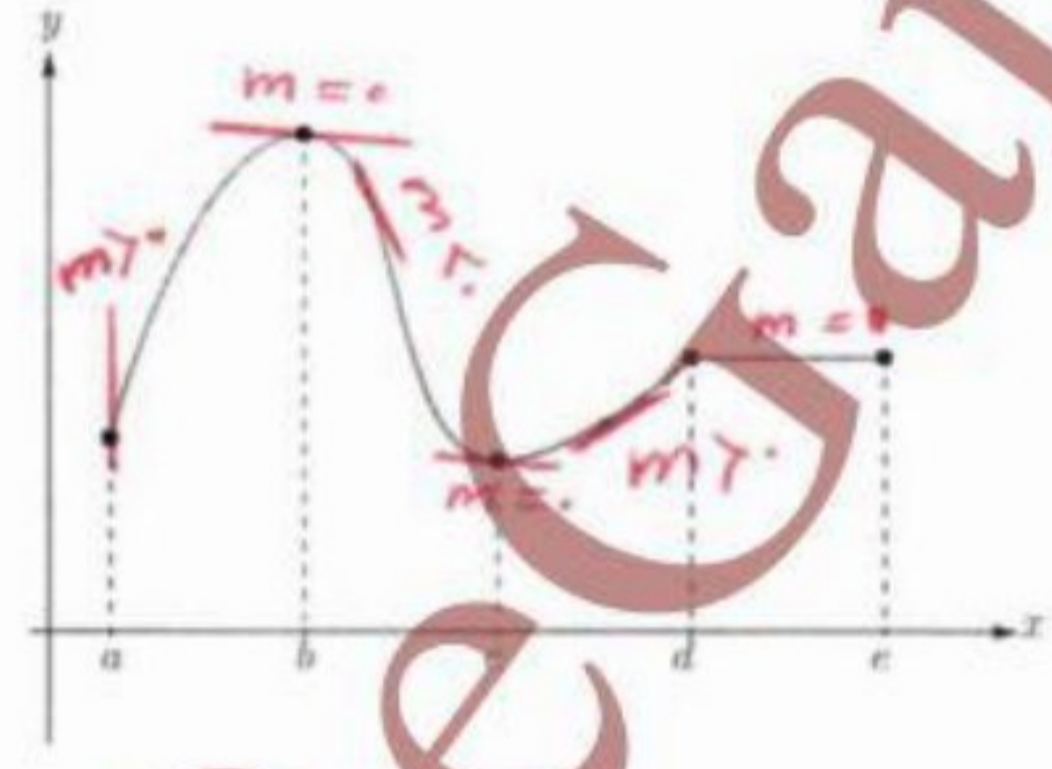


تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

در فصل اول با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می توان ویژگی هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.



الف) با رسم مماس هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه هایی شیب مماس ها مثبت و در چه بازه هایی شیب مماس ها منفی و در چه زیرمجموعه ای از دامنه شیب مماس ها برابر صفر است.

$m=0 \in \{b, c\}$
 $m > 0 \in (a, b) \cup (c, d) \cup (e, \dots)$
 $m < 0 \in (c, d)$
 در بازه (b, c) شیب منفی

ب) تعیین کنید در چه بازه هایی مشتق f مثبت و در چه بازه هایی مشتق f منفی و در چه بازه هایی f' برابر صفر است.

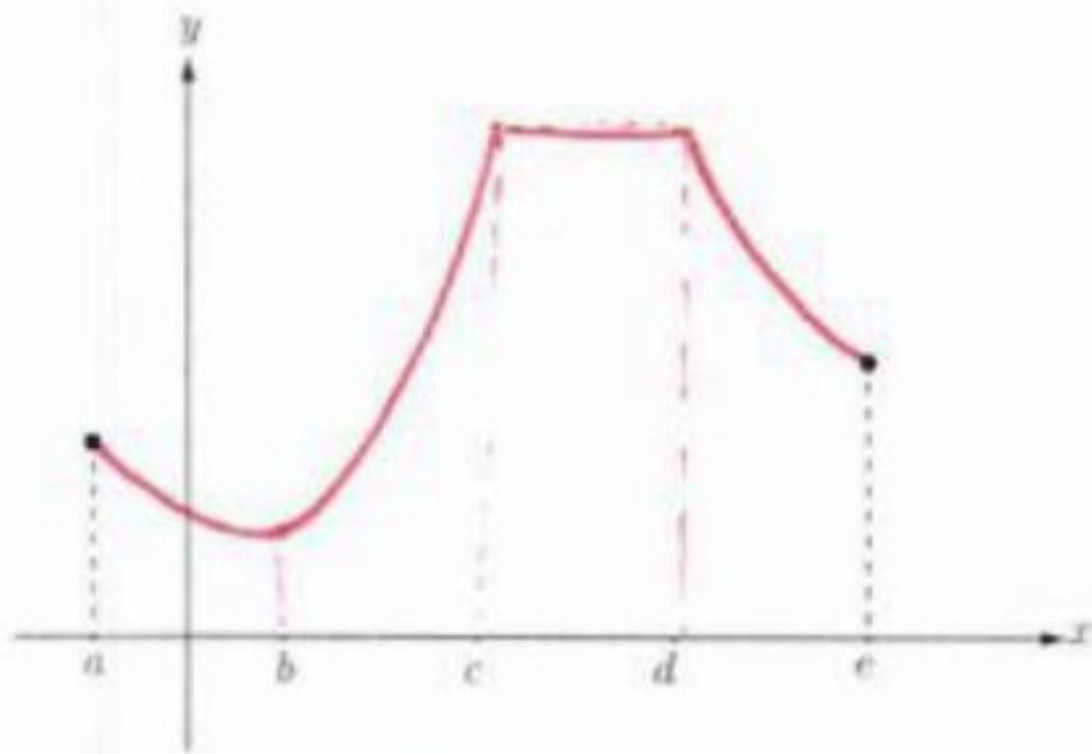
$f' > 0 \in (a, b) \cup (c, d) \cup (e, \dots)$
 $f' < 0 \in (b, c)$
 $f' = 0 \in \{b, c\}$
 در بازه (a, b) و (c, d) و (e, \dots) شیب مثبت
 در بازه (b, c) شیب منفی
 در $\{b, c\}$ شیب صفر

ب) تعیین کنید در چه بازه هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه هایی نزولی اکید و در چه بازه هایی مقدار تابع f ثابت است.

در بازه ها (a, b) و (c, d) اکیداً صعودی و در بازه (b, c) اکیداً نزولی

و در بازه (d, e) تابع ثابت





۳ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازه $[a, e]$ به گونه‌ای رسم کنید که دارای همه ویژگی‌های زیر باشد:

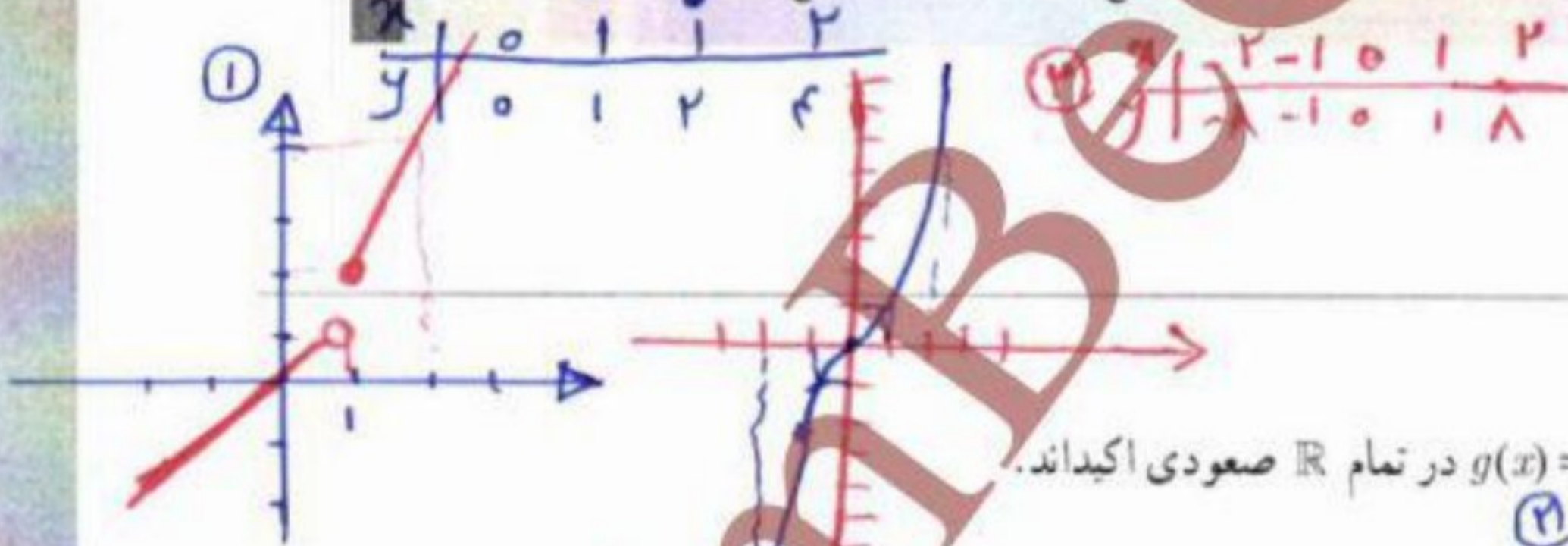
- تابع f در بازه (a, e) مشتق پذیر باشد.
- مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a, b) و (b, c) و (c, d) و (d, e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.
- تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

در بازه (b, c) صعودی اکید و در بازه (a, b) و (d, e) نزولی اکید و در بازه (c, d) تابع ثابت

با توجه به آنچه گفته شد قضیه زیر را بدون اثبات بیان می‌نمایم.

قضیه:

- فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد. در این صورت:
- (الف) اگر به ازای هر x در (a, b) ، $f'(x) > 0$ ، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است.
- (ب) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) < 0$ ، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ نزولی اکید است.
- (پ) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) = 0$ ، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ یک تابع ثابت است.



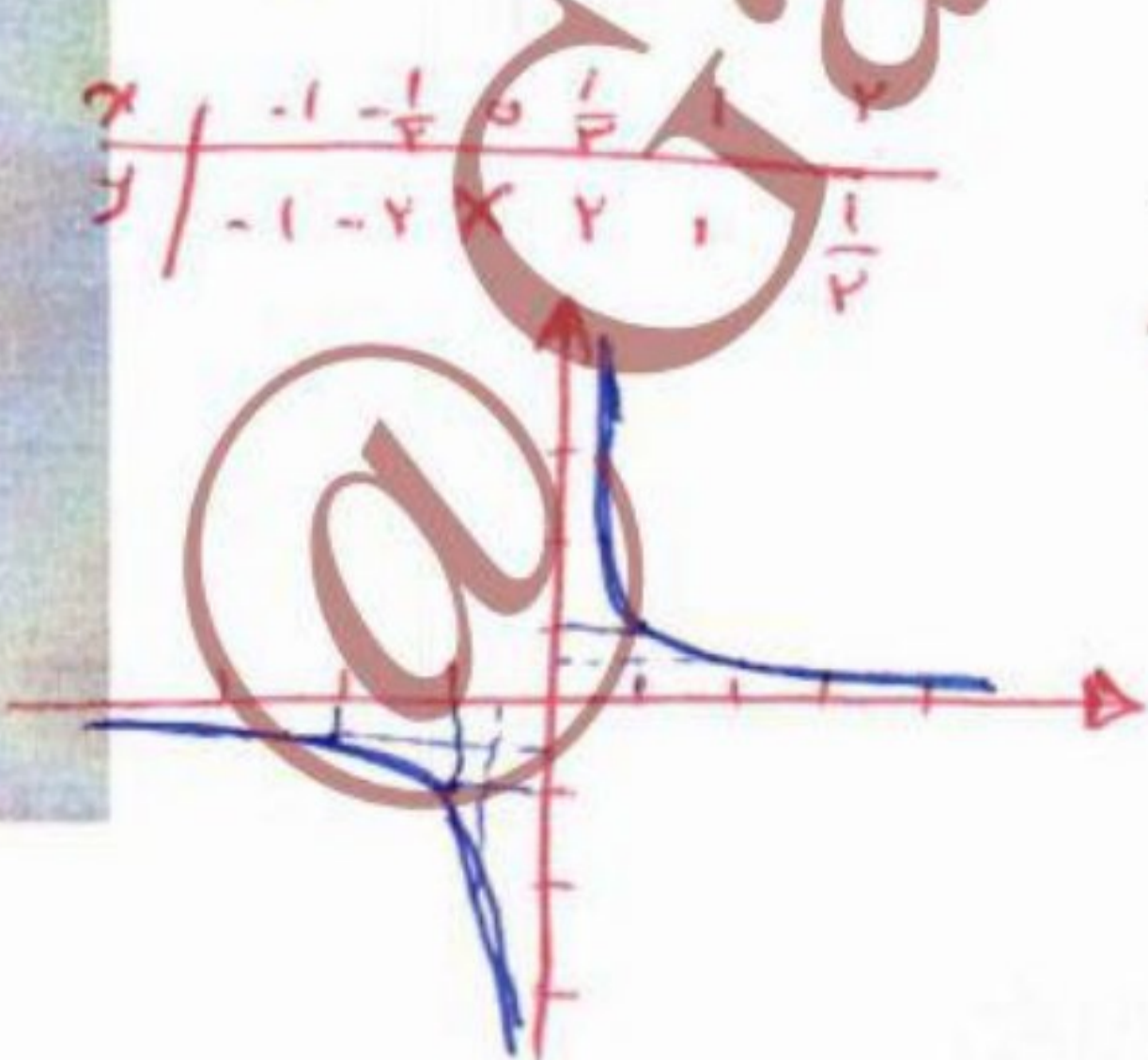
کاردر کلاس

۱ توابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^2$ در تمام \mathbb{R} صعودی اکیداند.

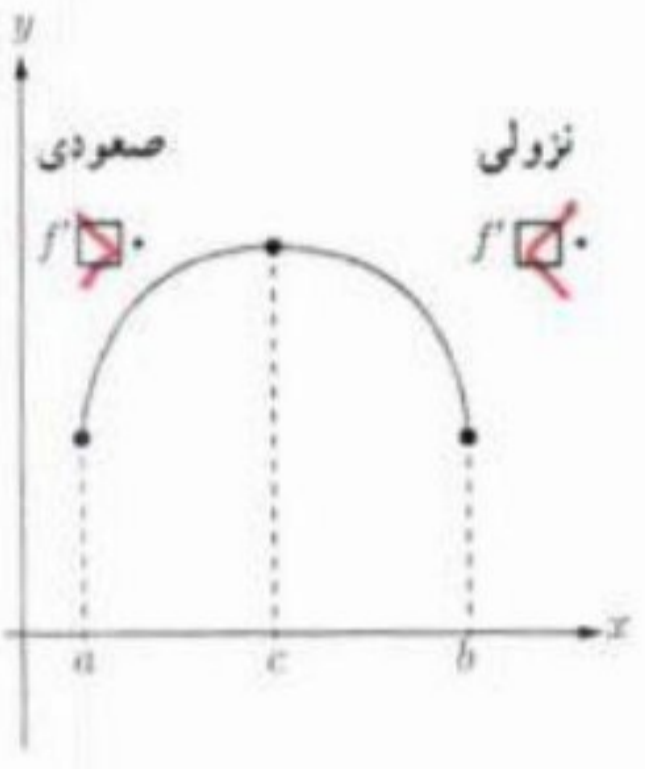
الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق پذیر هم هست؟
 ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

۲ تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.
 ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنه خود اکیداً نزولی است؟
 در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

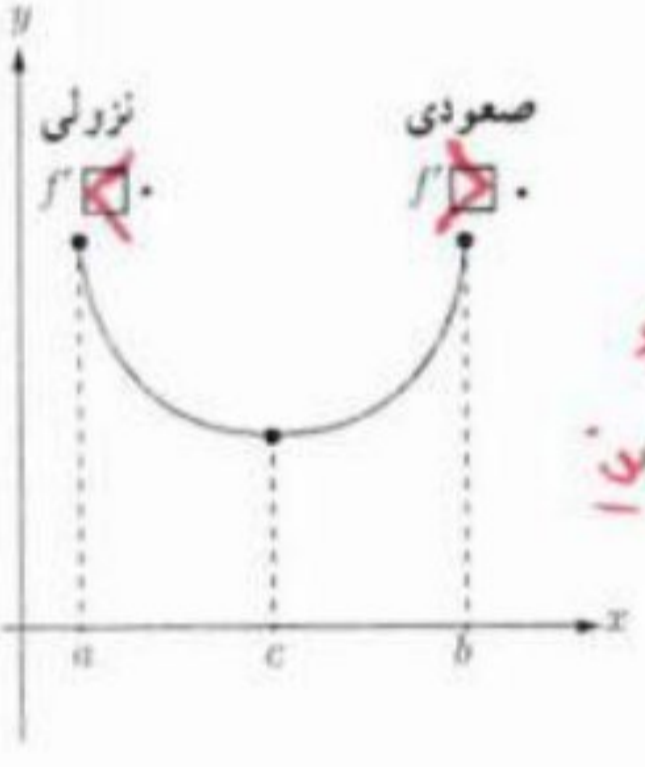


فرض کنیم $c \in (a, b) \subseteq D_f$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد و f بر (a, b) پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق پذیر باشد.



اگر تابع f در بازه‌ای مانند (a, c) در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند (c, b) در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت $x=c$ یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

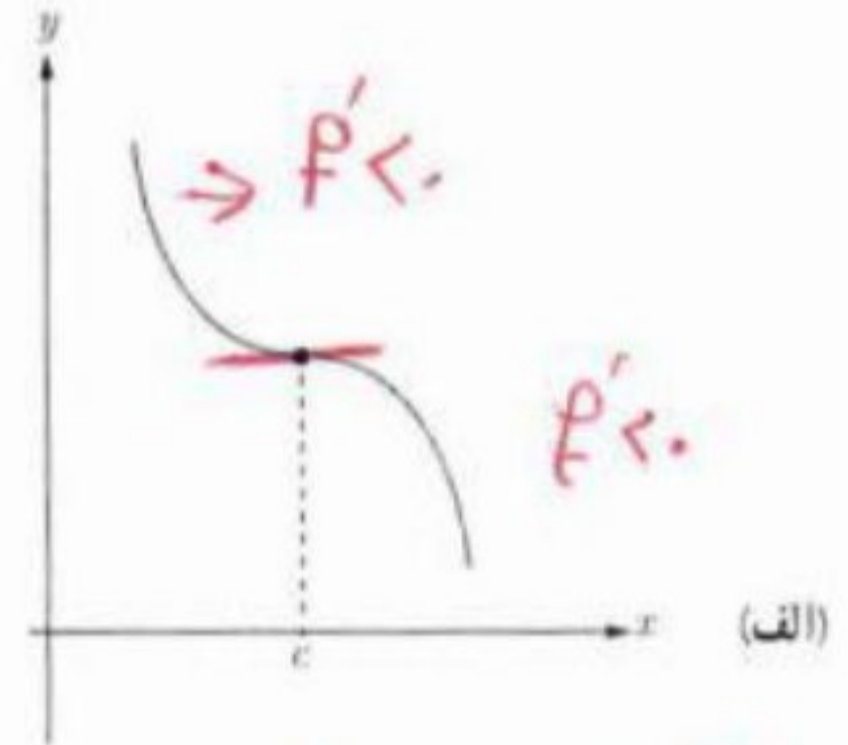
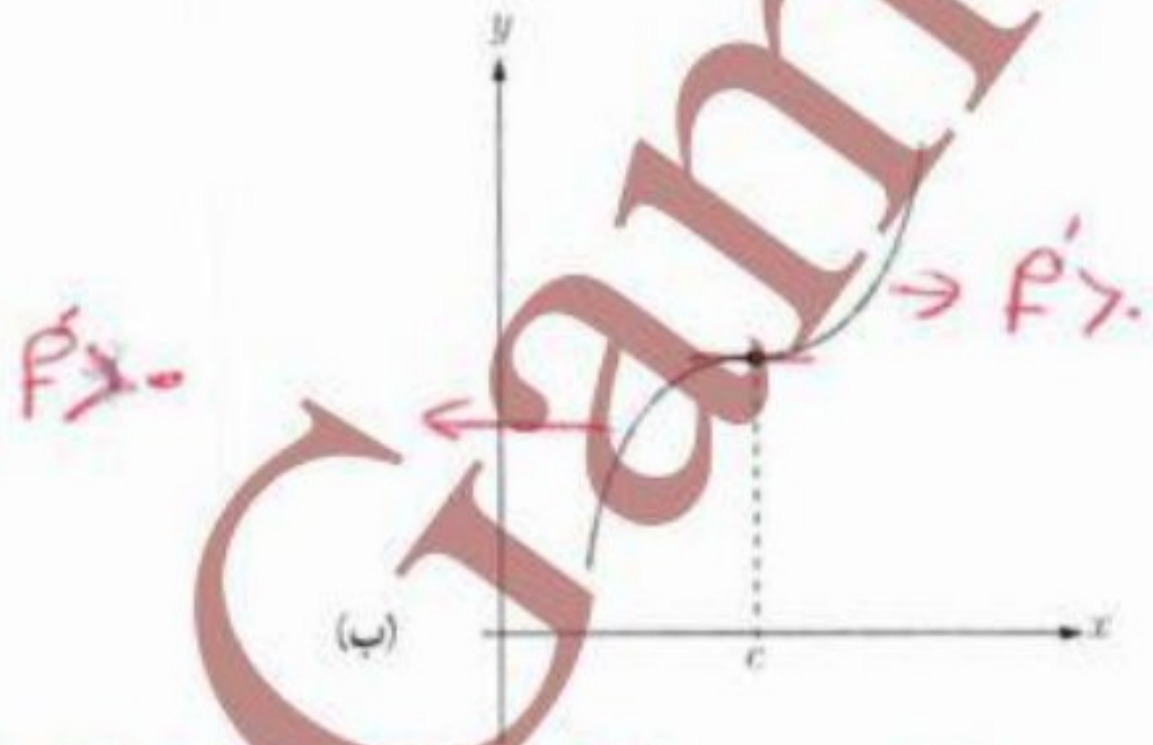
در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع f رسم شده است. علامت f' را در دو طرف نقطه c مشخص نمایید.



مشابه قسمت (۱) را برای نقطه مینیمم نسبی تابع f بنویسید

آب تابع f در بازه‌ای مانند (a, c) در سمت چپ آن نزولی و در بازه‌ای مانند (c, b) در سمت راست آن صعودی باشد در این صورت $x=c$ یک نقطه مینیمم نسبی تابع f است

در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطه c مشخص شده است و $f'(c) = 0$.
 الف) علامت f' را در دو طرف نقطه c در هر دو نمودار بررسی کنید.
 ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطه اکسترمم نسبی است؟



۵

نقاط اکسترمم ندارند زیرا علامت f' در نسل‌ها
 در دو طرف نقطه $x=c$ یکسان می‌باشد

با توجه به آنچه گفته شد می توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اول معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اول

فرض کنیم تابع f بر بازه ای باز مانند $I (I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطه c مشتق پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (a, c) ، $f'(x) > 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (c, b) ، $f'(x) < 0$ ، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (a, c) ، $f'(x) < 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (c, b) ، $f'(x) > 0$ ، آن گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطه c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مثال: اکستریم های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ را در بازه $[-3, 4]$ به دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است؟

حل: از آنجا که توابع چندجمله ای همواره مشتق پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می شود را به دست آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{2}{3}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$ است و نقاط $x = -3$ و $x = 4$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم:

$$(-3, -27), \left(-\frac{2}{3}, \frac{202}{27}\right), (2, -2), (4, 22)$$

لذا $x = -3$ و $x = 4$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و -۲۷ است. حال برای تعیین اکستریم های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجه دوم داریم:

x		$-\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	+	۰	-	۰	+

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازه $(-\frac{2}{3}, 2)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطه $x = -\frac{2}{3}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{202}{27}$ است و نقطه $x = 2$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر -2 است. می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

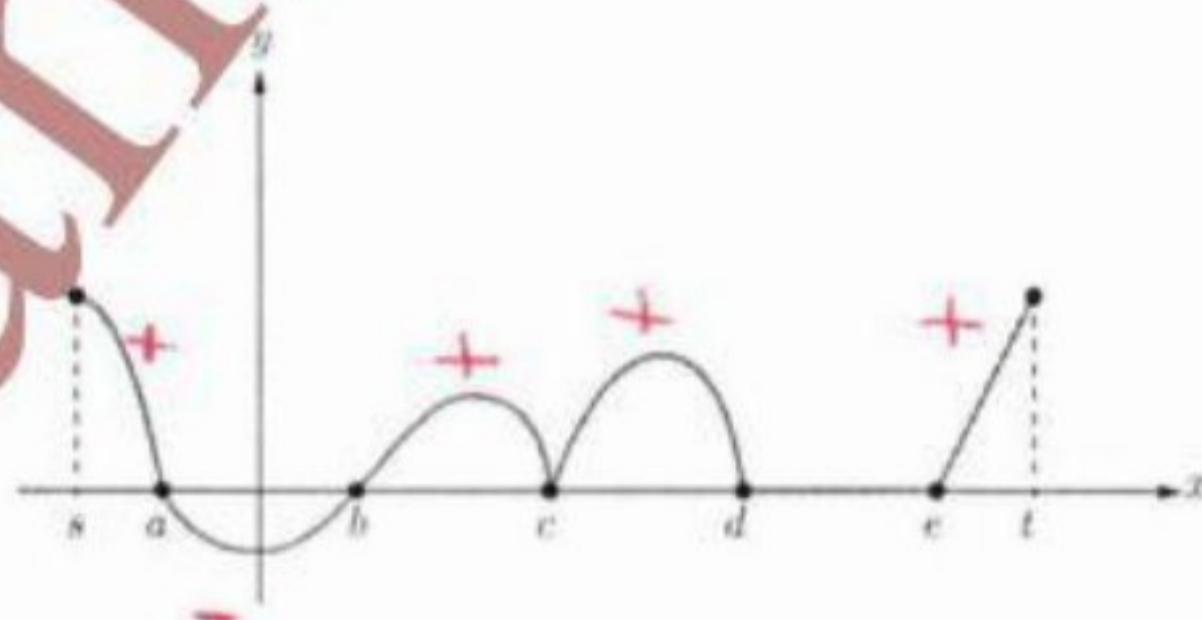
x	-3	$-\frac{2}{3}$	2	4
f'		$+$	$-$	$+$
f	-27	$\frac{202}{27}$	-2	22

ماکزیمم نسبی
مینیمم نسبی

کاردر کلاس

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است. در بازه (a, b) و (s, a) تابع صعودی و در بازه (a, b) و (b, c) تابع نزولی و همچنین در بازه (d, e) تابع نزولی و در بازه (e, t) بررسی کنید. کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی اند؟

ب) آیا نقاط بازه (d, e) اکسترمم نسبی هستند؟ **بله زیرا تابع در این بازه تابعی است.**

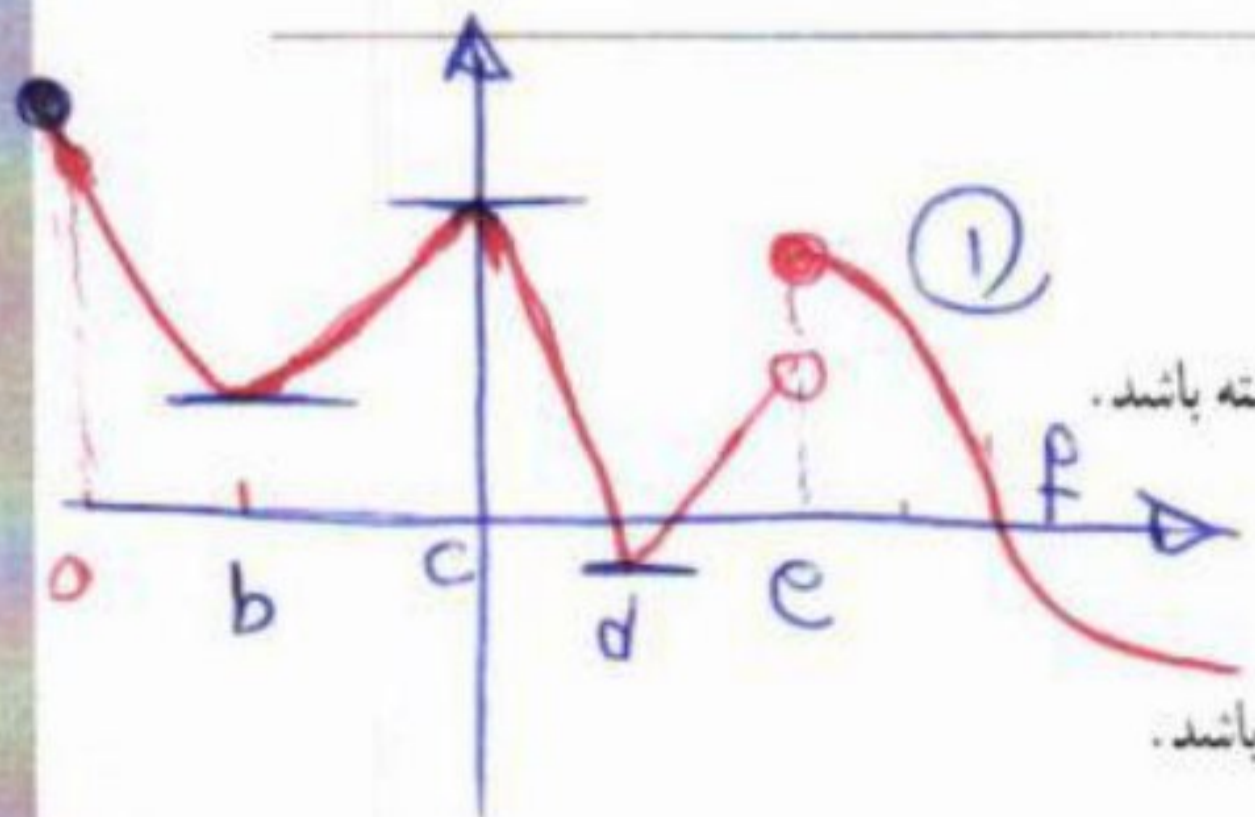


ب) در $x=a$ ماکزیمم نسبی در دو نقطه $x=a, b, c, d, e$ بررسی کنید

زیرا مشتق در این نقاط منفی است

و در $x=b$ مینیمم نسبی

تمرین

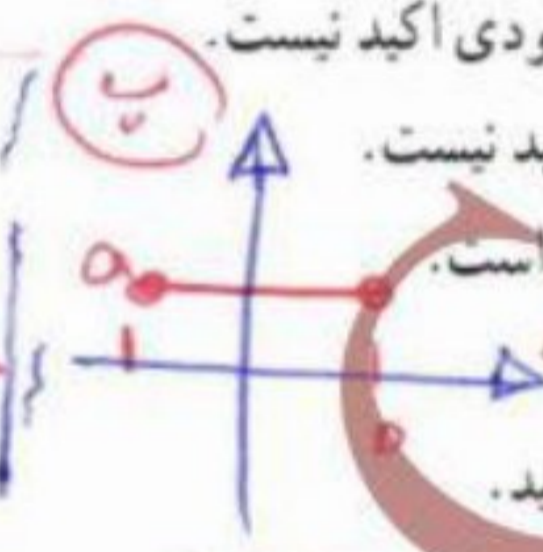
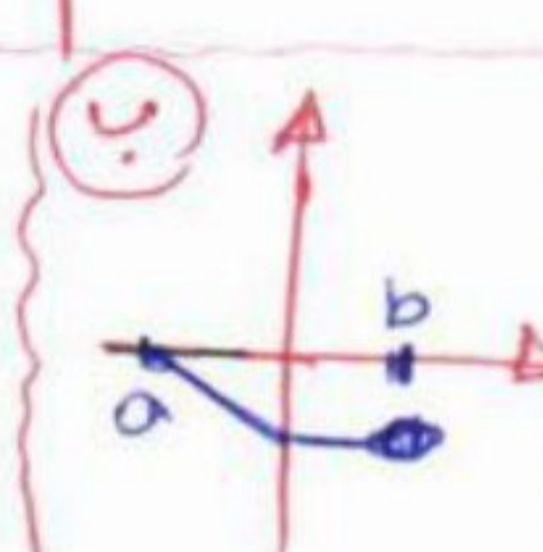
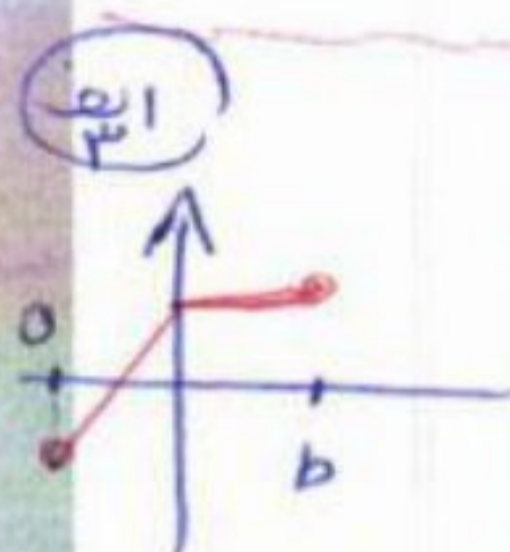


- ۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.
 - نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.
 - نقطه مینیمم نسبی داشته باشد که مشتق نداشته باشد.
 - نقطه ماکزیمم مطلق تابع نقطه بحرانی نباشد.
 - نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.
 - نقطه ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



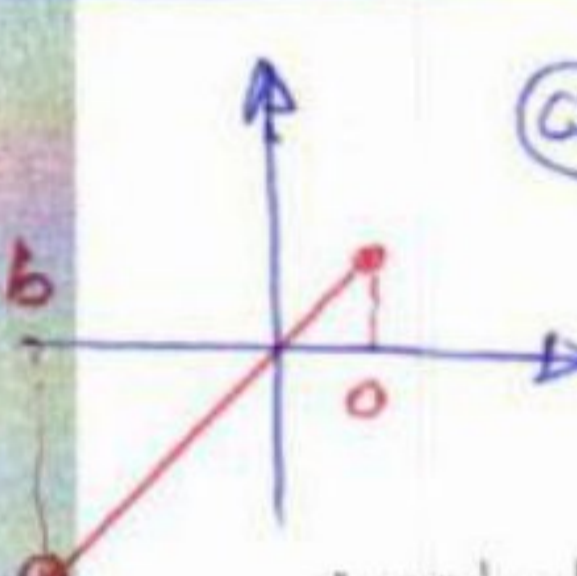
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.



- الف) تابع f در بازه ای مانند $[a, b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.
 - ب) تابع f در بازه ای مانند $[a, b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.
 - پ) تابع f در بازه ای مانند $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی است.
- ۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

- الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.
- ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق پذیر نیست.
- پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.



۵ نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه های داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به دست

الف) $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$ $[-2, 1]$

ب) $f(x) = x^3 - 2x$ $[-1, 2]$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4-x & x \geq 2 \end{cases}$

مطلوبی آورید. $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x < 2 \\ -1 & x \geq 2 \end{cases}$

Max. بحرانی $x > 2$

x	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	-1
f'	$+$	$-$
f	\nearrow	\searrow

۱) $f'(x) = 4x - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

مطلق

$x = -1 \Rightarrow y = 12 + 2 + 5 = 21 \Rightarrow \text{Max}$

$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5 = \frac{19}{4} \Rightarrow \text{Min}$

$x = 1 \Rightarrow y = 3 - 2 + 5 = 6$

۲) $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{Max مطلق}$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \text{Min مطلق}$

$x = 2 \Rightarrow y = 8 - 4 = 4 \Rightarrow \text{Max مطلق}$

۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(1, 2)$ ، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$f(-1) = 5$, $f(4) = -2$, $f(0) = 0$

نقطه $(1, 1)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و نازدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = 100 \text{ cm}^2$ و $h = 2 \text{ cm}$ ، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

۱۰ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

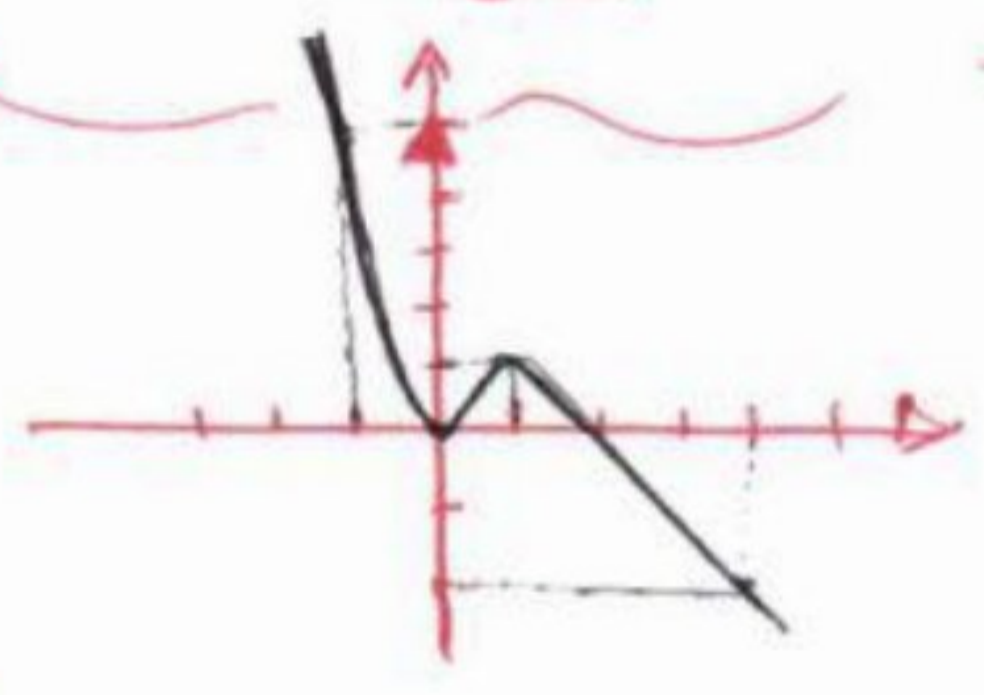
۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی اند؟

الف) $f(x) = 2x^2 - 3x^3 - 12x + 7$

ب) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

$(1, 2) \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow -3 + b = 1 \Rightarrow b = 4$ (۷)

$f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$



$V = 2(x-4)(y-4) = 2xy - 8x - 8y + 32$

$V(x) = 2 \cdot 100 - 8x - \frac{100}{x} + 32$

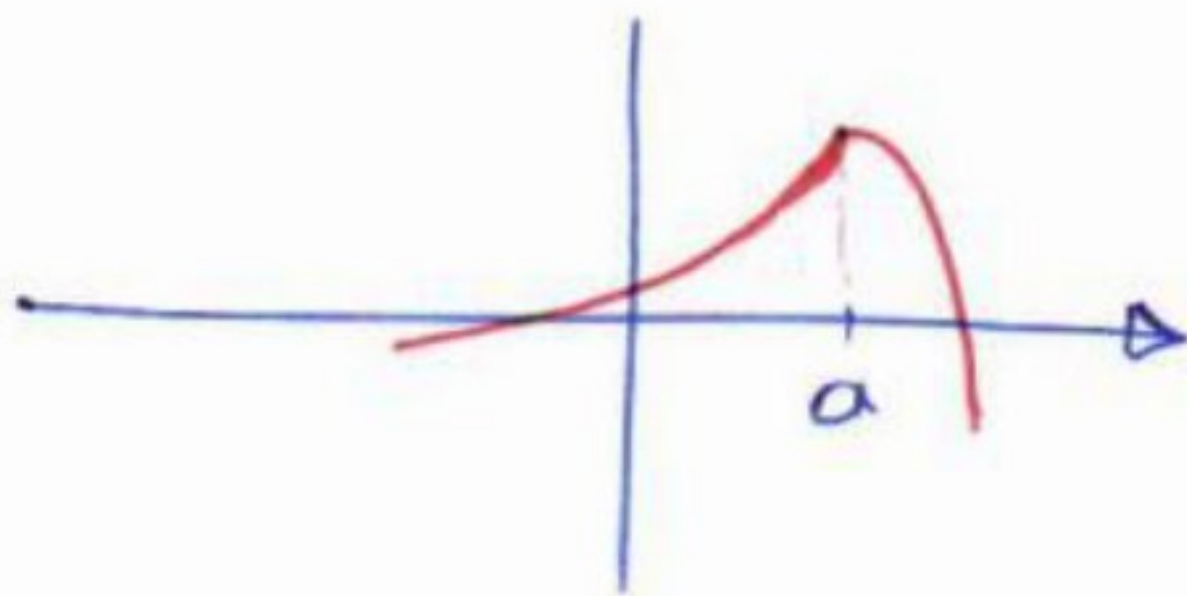
$V(x) = \frac{200x - 8x^2 - 100 - 100}{x}$

$V'(x) = \frac{(200 - 16x)(x) - (200x - 100 - 100)}{x^2}$

$\Rightarrow V'(x) = \frac{-16x^2 + 100}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

$\Rightarrow y = 10$



الف

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x + 4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = x^3 - 2 \Rightarrow f''(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

۲

تقریباً مثبت یا منفی

تقریباً مثبت یا منفی

ب) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$D = \mathbb{R} - \{1\}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{0 + 4(x-1)^{-3}}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^7}$

x	1
f''	$+$

ج) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

$D = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{0 - 2 \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} \right)}{\left(3\sqrt[3]{(x+1)^2} \right)^2}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(x+1)^5}} < 0$ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

x	-1
f''	$-$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = 1$

$0 + 0 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c=1}$

۳

$f(1) = 2$

$a + b + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$

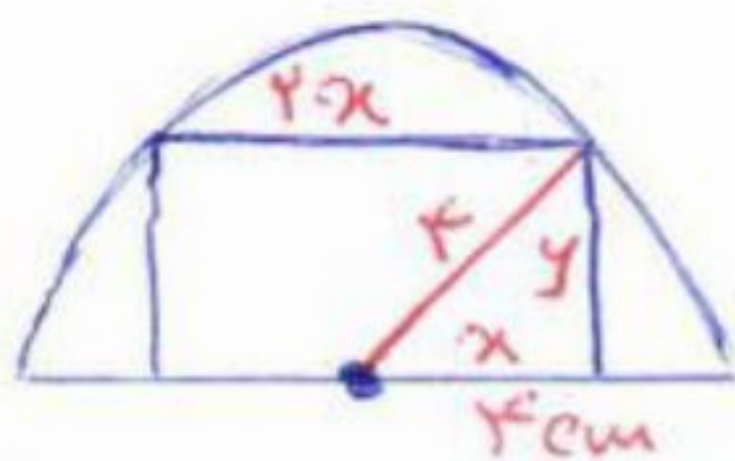
abc $x = \frac{1}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow f'(x) = 4ax + 2b \Rightarrow 4a\left(\frac{1}{4}\right) + 2b = 0$

$\Rightarrow 2a + 2b = 0$

$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+2b=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{a=-2}$

$a+b=1 \Rightarrow \boxed{b=3}$



$$x^2 + y^2 = r^2 = 14$$

$$\Rightarrow y^2 = 14 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{14 - x^2}$$

$$S(x) = 2xy = 2x\sqrt{14 - x^2}$$

$$\Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{14 - x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{14 - x^2}} = \frac{2(14 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{14 - x^2}}$$

$$\Rightarrow S'(x) = \frac{4x - 4x^2}{\sqrt{14 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 4x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{1} \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{14}$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x^3 - 12x + 7$$

$$f'(x) = 4x - 9x^2 - 12 = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f	\nearrow	\searrow	\nearrow	

در بازه $(-1, 2)$ و $(2, +\infty)$ صعودی و در بازه $(-\infty, -1)$ نزولی

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad D = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{1(x-2) - 1(x)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$-$	0	$-$
f	نزولی	0	نزولی

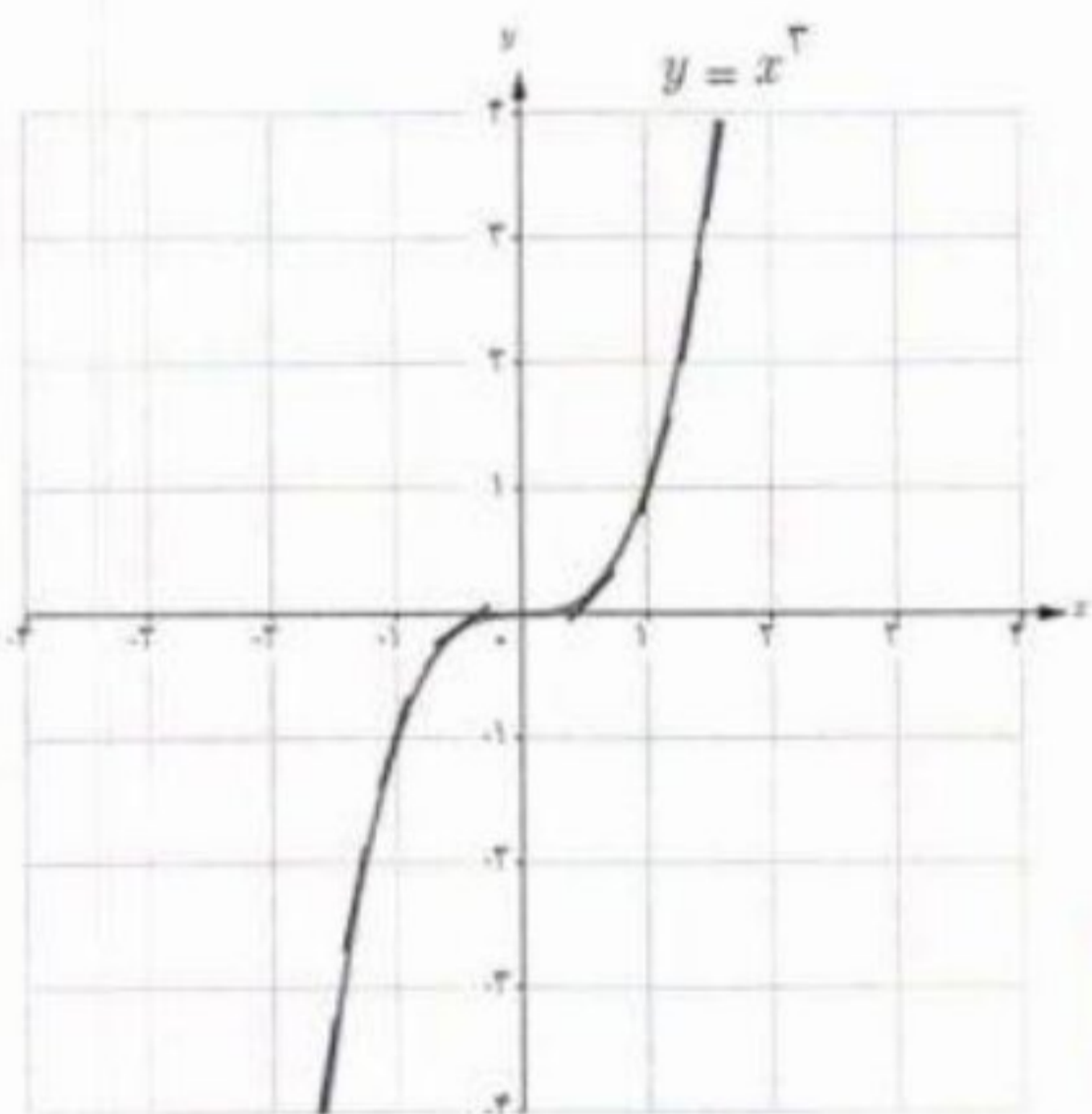
$\Rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ یعنی در تمام نقاط دامنه

نزولی می باشد

۱۱
الف

۱۲

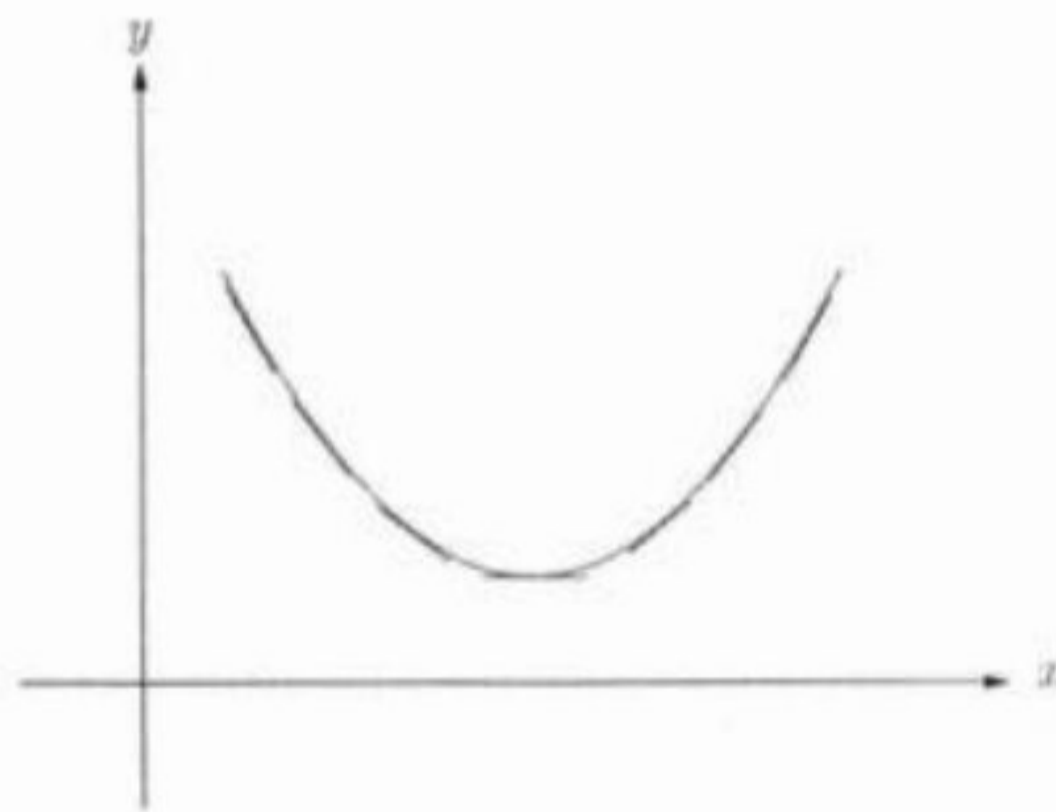
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن



با تابع $f(x) = x^3$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x) = 3x^2$ در $x = 0$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x = 0$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای x های منفی در بالای نمودار و برای x های مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازه $(-\infty, 0)$ به سمت پایین و در بازه $(0, +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.

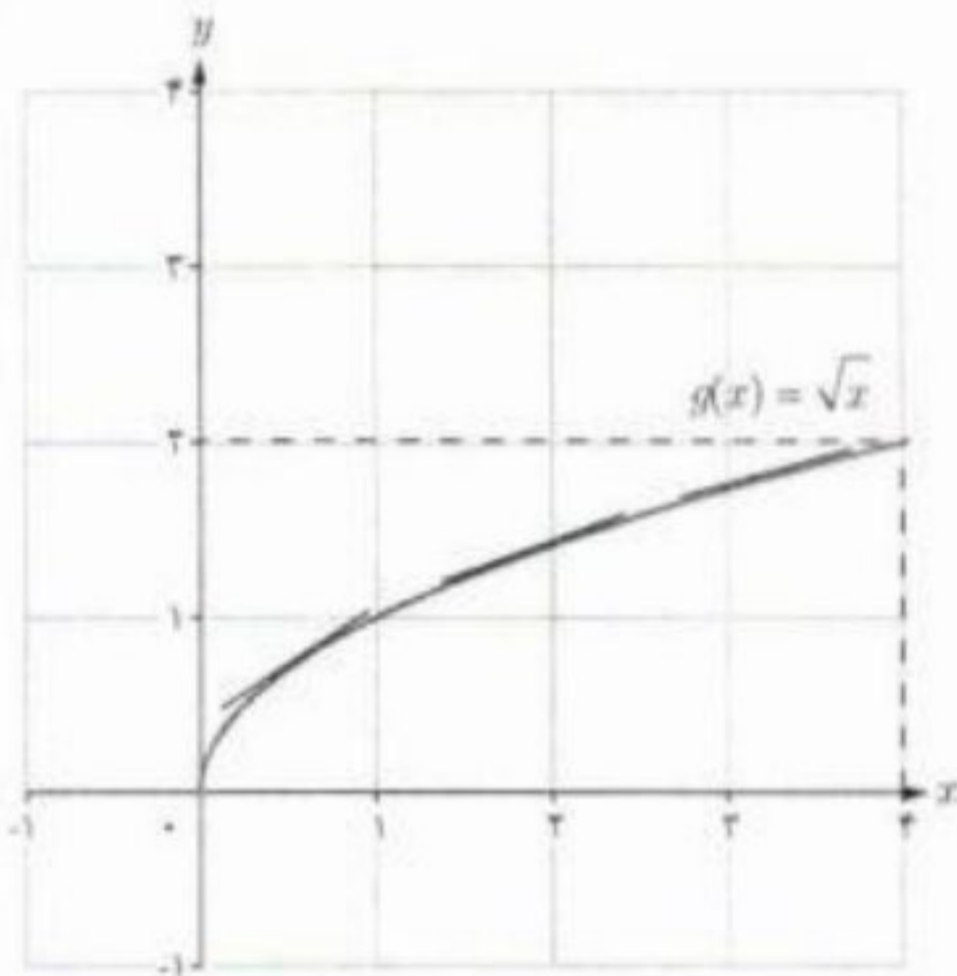


مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.
تقعر به سمت پایین است.

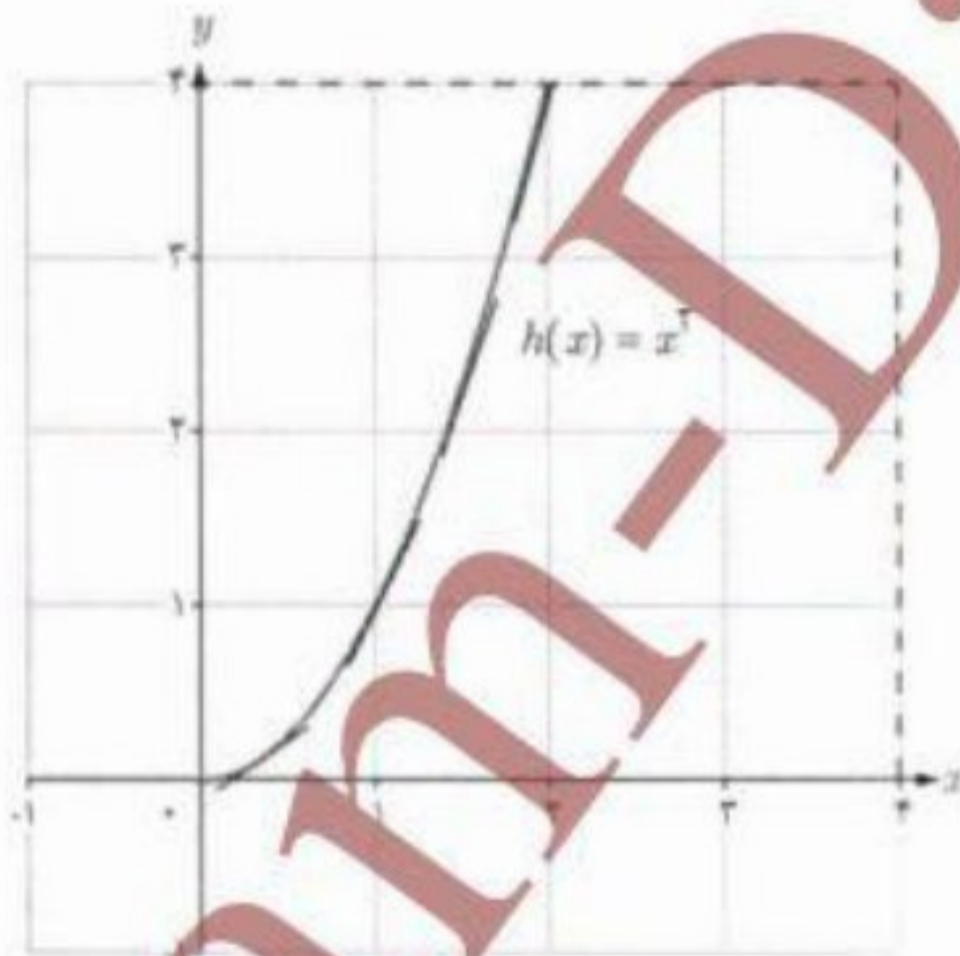


مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.
تقعر به سمت بالا است.

در هر بخشی از نمودارهای دو تابع $h(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در بازه $[0, +\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



(ب)



(الف)

- ۱ با حرکت از نقطه $x=0$ به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟
 در شکل الف شیب زیاد می‌شود اما در شکل ب شیب کم می‌شود. در الف جهت تقعر مثبت است و در ب جهت تقعر منفی است.
- ۲ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب (کم شدن یا زیاد شدن) خطوط مماس دارد؟
 در این نمودارها جهت تقعر به شیب زیاد یا کم بستگی دارد. در الف جهت تقعر مثبت است و در ب جهت تقعر منفی است.
- ۳ تابع h' در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ صعودی

نهیہ کننده:

۴ تابع g' در بازه $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ نزولی

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵ الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازه I مثبت است، آنگاه تابع f بر بازه I صعودی است.

علامت f' بر بازه I منفی است، آنگاه تابع f بر بازه I نزولی است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازه I مثبت است آنگاه تابع f' بر بازه I صعودی است.

علامت f'' بر بازه I منفی است آنگاه تابع f' بر بازه I نزولی است.



۶ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید:

- الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه **صعودی** است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه **افزایش** می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به **بالا** است.
- ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه **نزولی** است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه **کاهش** می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به **پایین** است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به طور خلاصه در قضیه زیر، که آزمونی برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع است، آورده شده و در این کتاب اثبات آن مدنظر نیست.

قضیه:

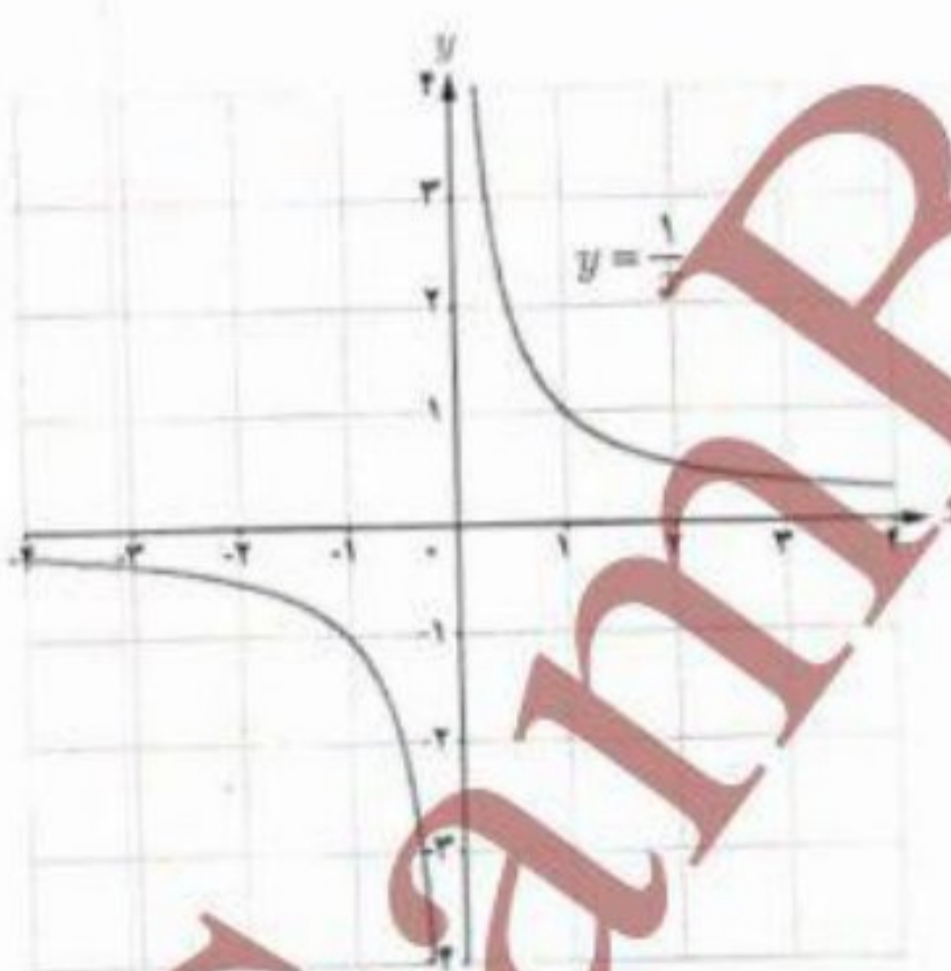
فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) = 0$ ، آزمون بی نتیجه است.

مثال: جهت تقعر توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.



الف) $f(x) = \frac{1}{x}$

ب) $g(x) = x^2 + 3x + 1$

حل: الف) داریم $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

بنابراین:

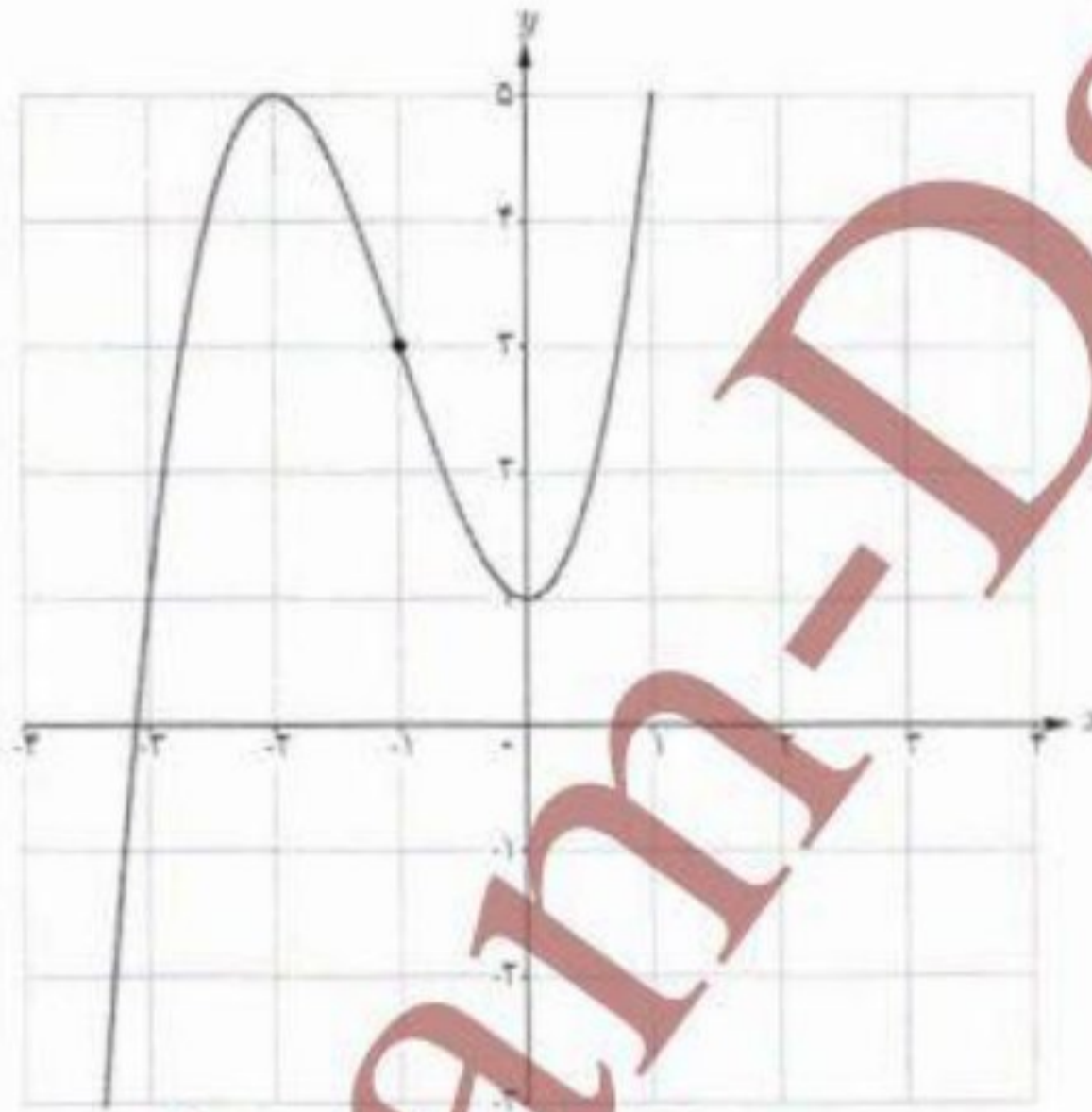
- اگر $x > 0$ ، آنگاه $f''(x) > 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه $(0, +\infty)$ رو به بالاست.
- اگر $x < 0$ ، آنگاه $f''(x) < 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازه $(-\infty, 0)$ رو به پایین است.



ب) داریم $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow g''(x) = 6x + 6$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$



بنابراین :

اگر $x > -1$ آنگاه $g''(x) > 0$ و لذا جهت تغير نمودار این تابع بر بازه $(-1, +\infty)$ به سمت بالاست.
اگر $x < -1$ آنگاه $g''(x) < 0$ و لذا جهت تغير نمودار این تابع بر بازه $(-\infty, -1)$ به سمت پایین است.

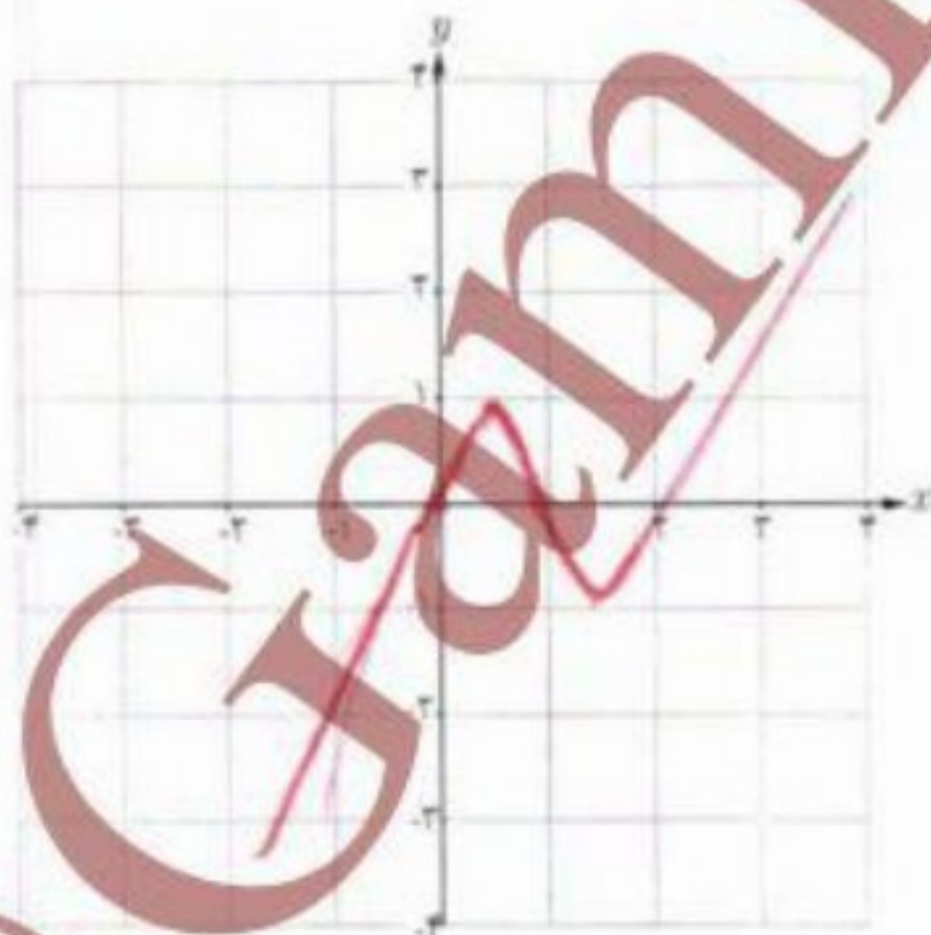
کارد در کلاس

نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید :

$$f(0) = f(1) = f(2) = 0$$

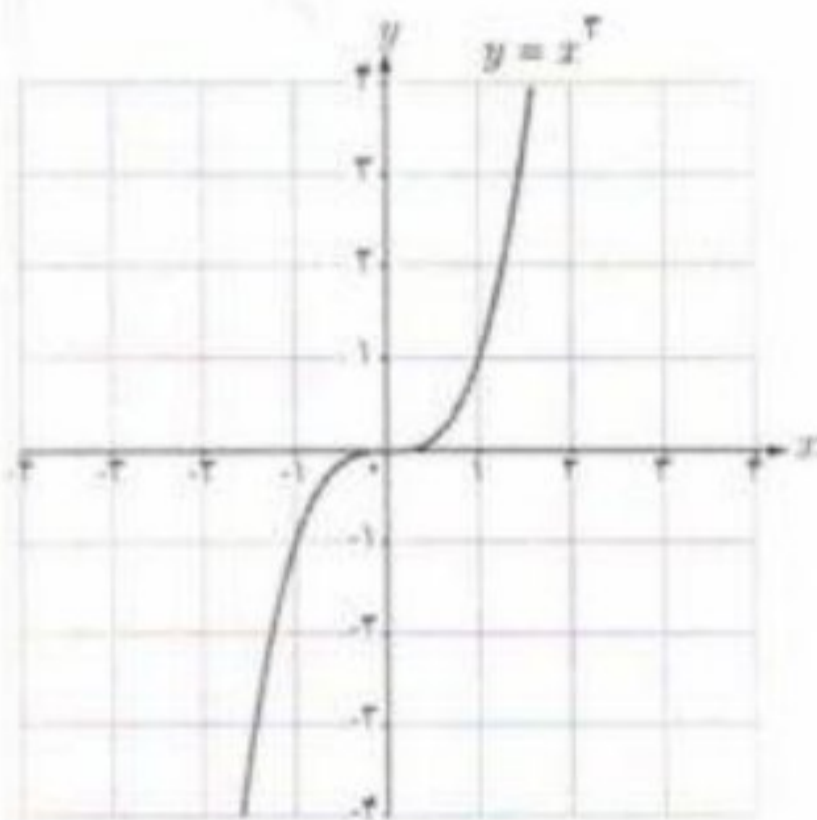
$$f''(x) < 0, (-\infty, 1) \text{ و بر بازه}$$

$$\text{و بر بازه } f''(x) > 0, (1, \infty)$$



©

نقطه عطف نمودار یک تابع



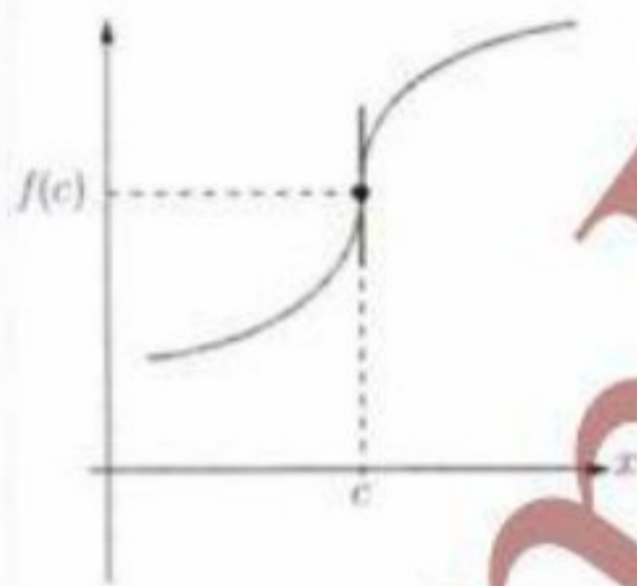
نمودار تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تغير نمودار این تابع در بازه $(-\infty, 0)$ رو به پایین و در بازه $(0, +\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطه $x = 0$ نقطه‌ای است که جهت تغير منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = 0$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطه عطف آن منحنی گوئیم. به عبارت دیگر:

تعریف

فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تغير f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.



خط $x = c$ مماس قائم است.

از شرط (الف) در تعریف نقطه عطف تابع f نتیجه می‌شود که یا $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطه c مماس قائم دارد.

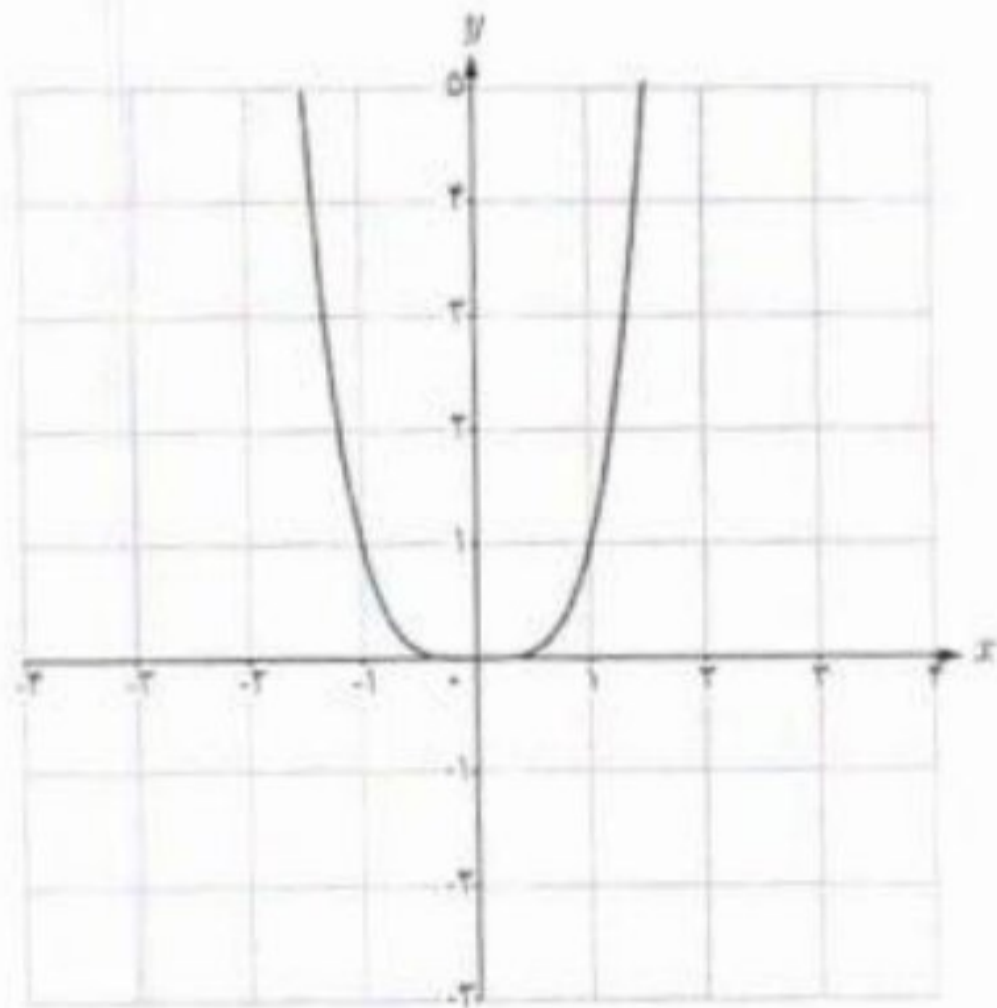
از شرط (ب) می‌توان نتیجه گرفت که خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(c, f(c))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تغير تابع در دو طرف نقطه عطف تغییر می‌کند؛ لذا در یک طرف نقطه c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $(c, f(c))$ یک نقطه عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c) = 0$. با این حال شرط $f''(c) = 0$ برای نقطه عطف بودن $x = c$



به تنهایی کافی نیست؛ یعنی ممکن است $f''(c) = 0$ ولی $x = c$ یک نقطه عطف تابع نباشد. به طور مثال تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

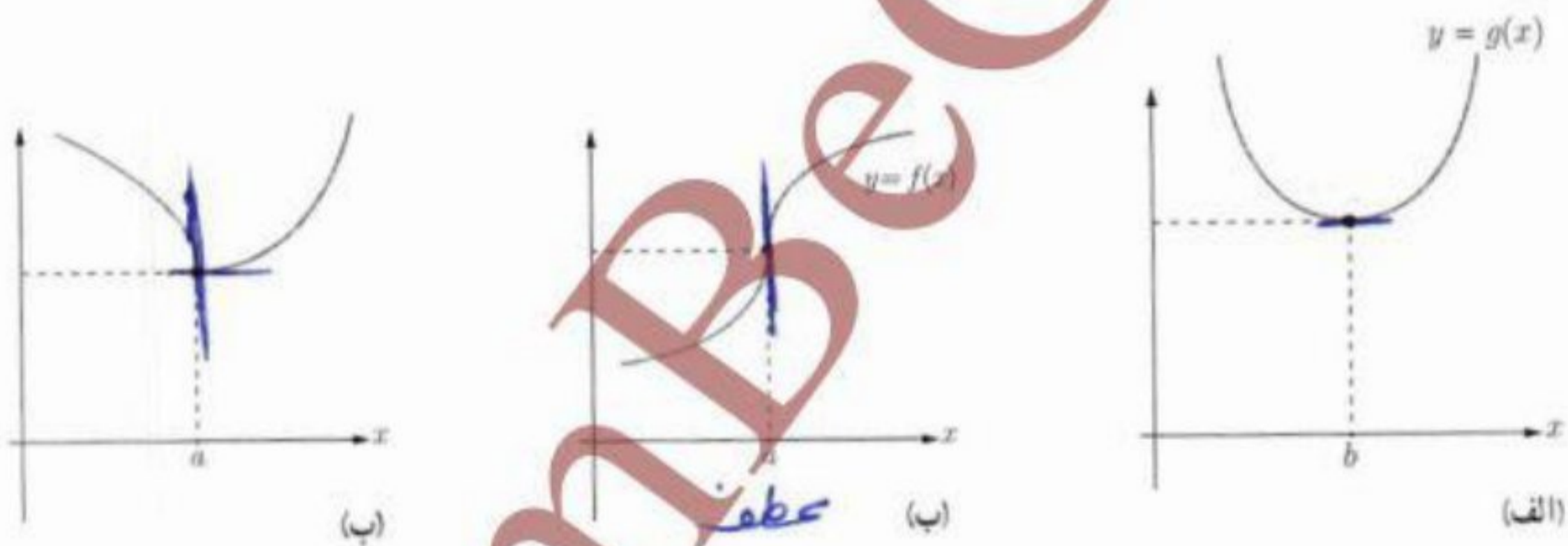
$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$



با اینکه $f''(0) = 0$ اما تابع f'' در دو طرف $x = 0$ مثبت است و لذا تفرع همواره به سمت بالا است و جهت تفرع در $x = 0$ عوض نمی‌شود و لذا $x = 0$ یک نقطه عطف این تابع نیست.

کارد کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



۲ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

(الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند. ✓

(ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطه عطف است. ✗ مثال قسمت (ب)

(پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است. ✗

(ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد. ✓

(ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد. ✗ مانند مثال (ب) سوال ۱

مثال : جهت تفر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به دست آورید.

الف) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

ب) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

حل :

الف) $f'(x) = 3x^2 - 12x$ و $f''(x) = 6x - 12$

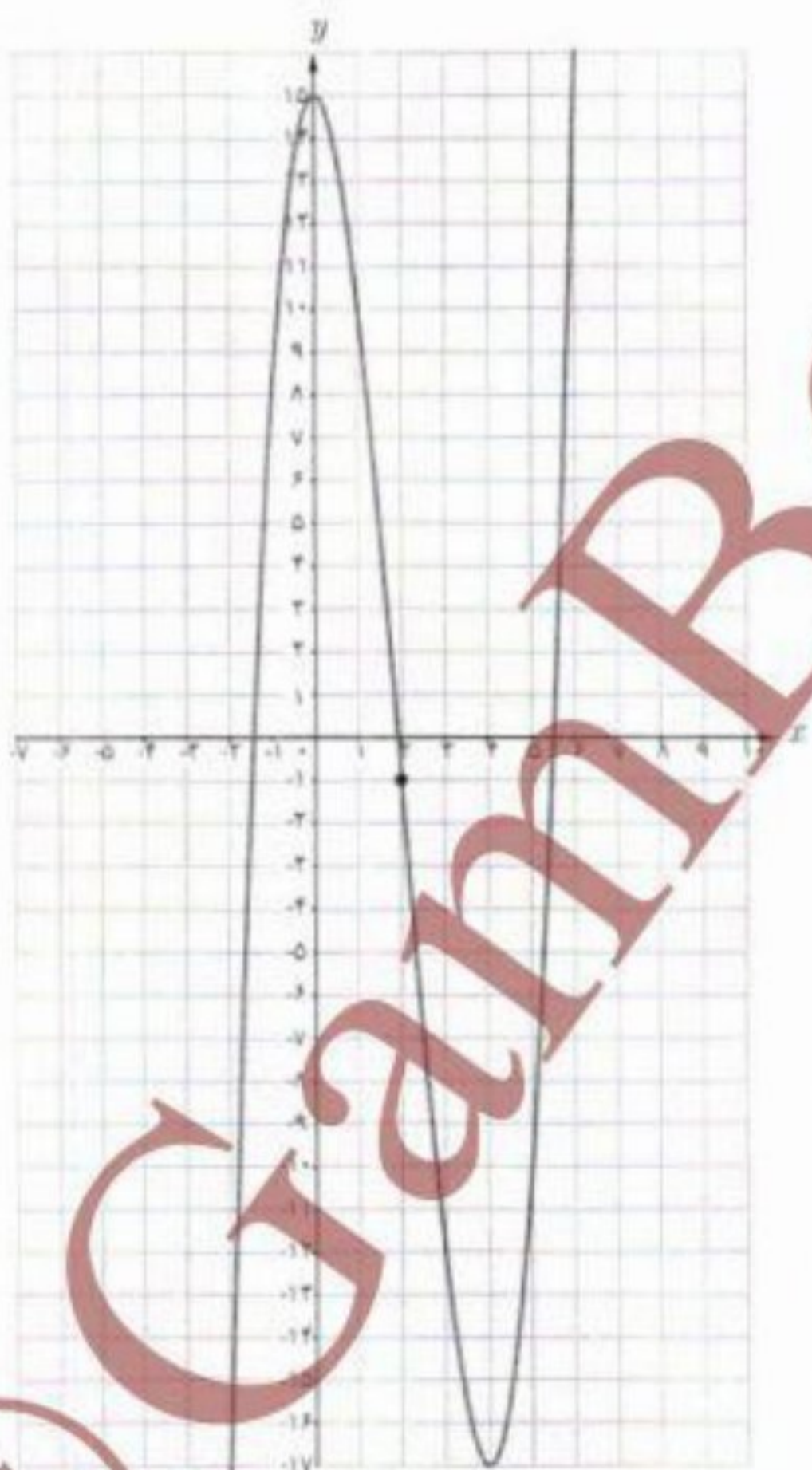
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، و در تمام \mathbb{R} تعریف شده است و تنها در $x = 2$ برابر صفر می شود، بنابراین تنها نقطه ای که می تواند نقطه عطف باشد $x = 2$ است به شرط آنکه :

۱) $f''(2)$ موجود باشد

۲) f'' در دو طرف $x = 2$ تغییر علامت دهد.

اما $f''(x)$ یک تابع چند جمله ای است و دامنه آن \mathbb{R} است و $f''(2)$ نیز موجود و برابر -12 است. از طرفی داریم :



x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$(-)$	0	$(+)$
f		-1	
		نقطه عطف	



$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

از آنجا که مقدار $\sqrt[3]{x^5}$ به ازای x های مثبت، مثبت و به ازای x های منفی، منفی است.

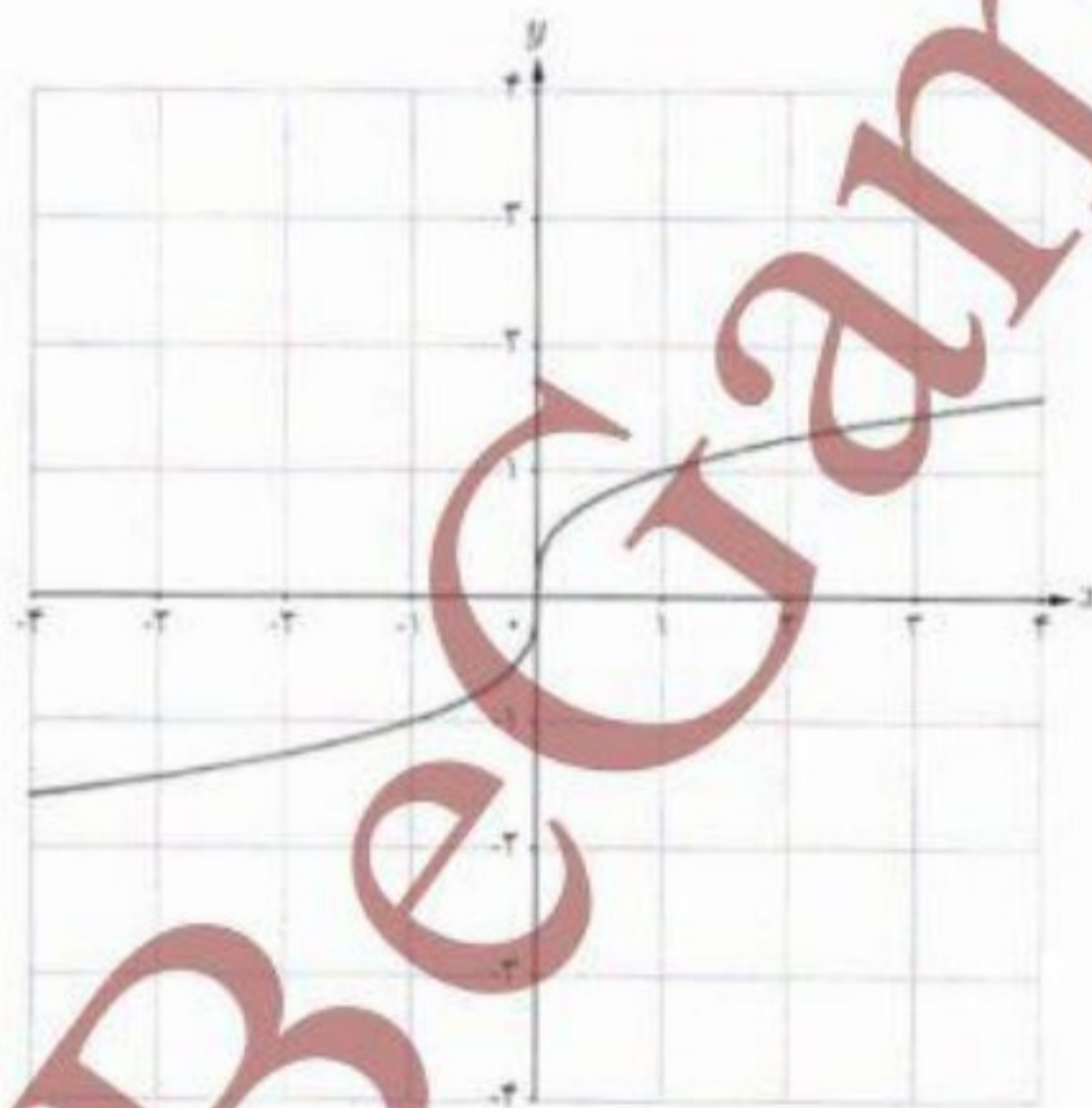
(ب)

داریم: اگر $x > 0$ ، آنگاه $f''(x) < 0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت پایین است.

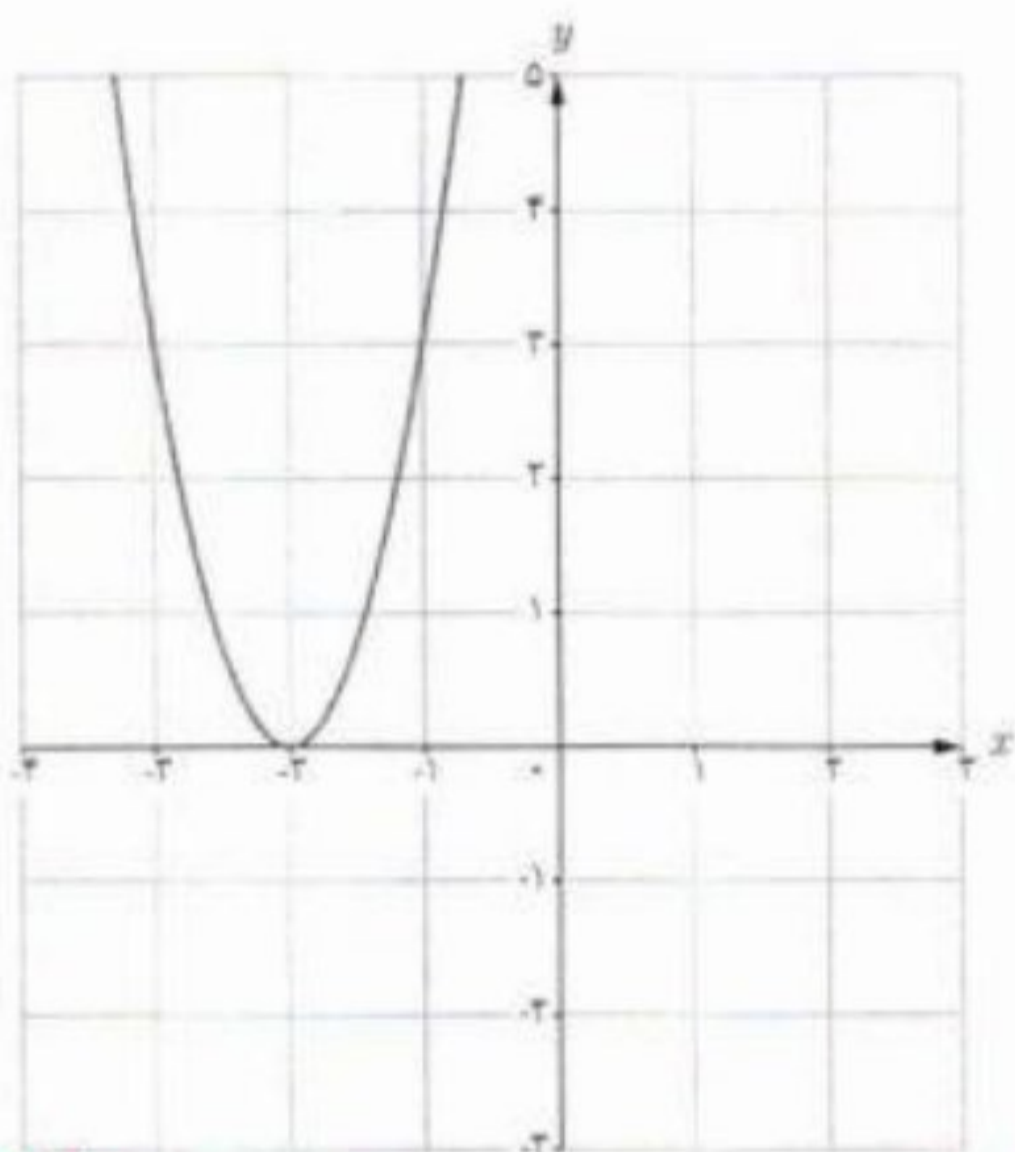
اگر $x < 0$ ، آنگاه $f''(x) > 0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت بالاست.

لذا جهت تقعر این تابع در $x = 0$ عوض می شود. از طرفی در فصل مشتق دیدیم که این تابع در نقطه $x = 0$ دارای مماس (مماس قائم) است.

بنابراین $x = 0$ نقطه عطف این تابع است.

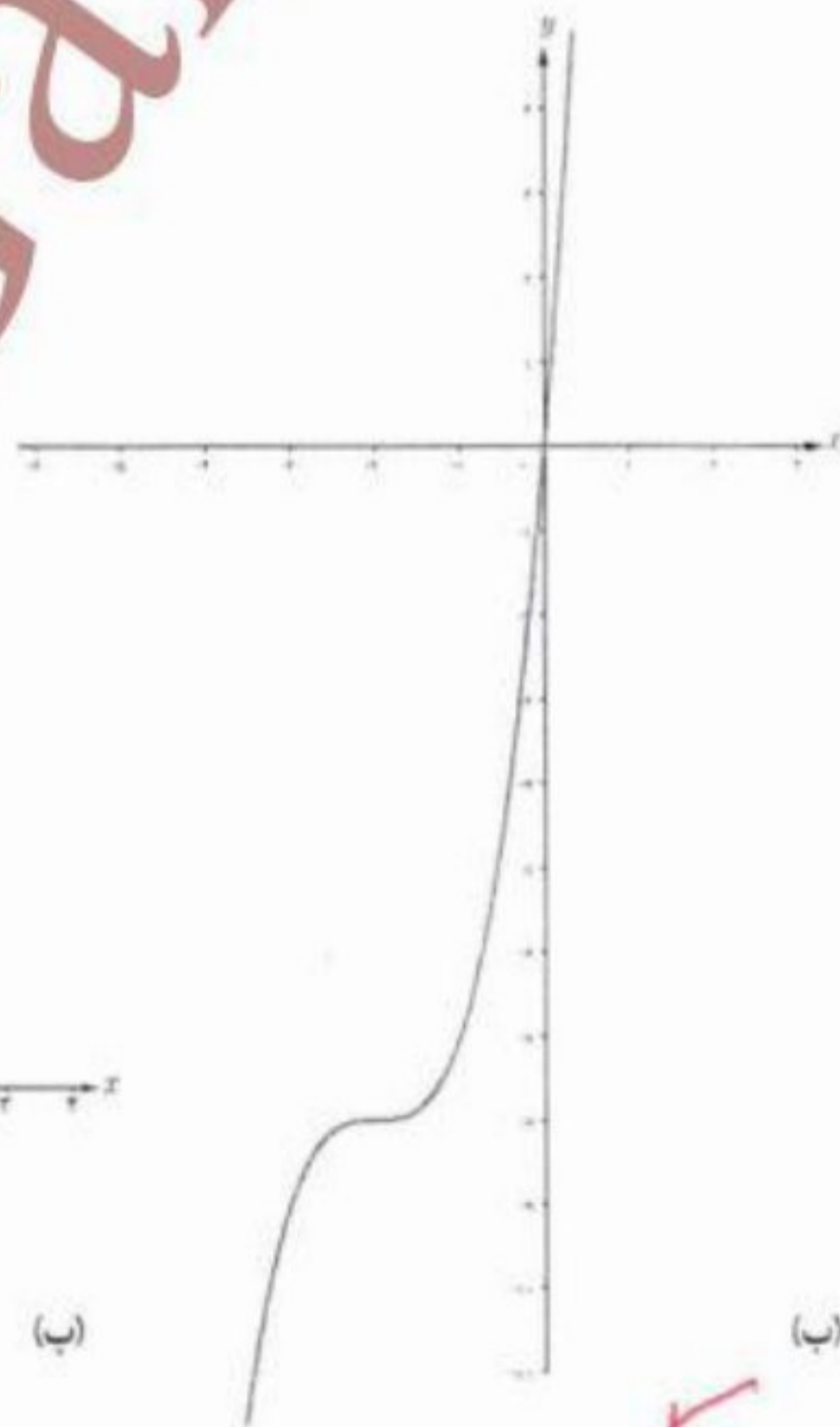


۱۱ اگر شکل کشیده شده در صفحه شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می تواند نمودار تابع f باشد؟

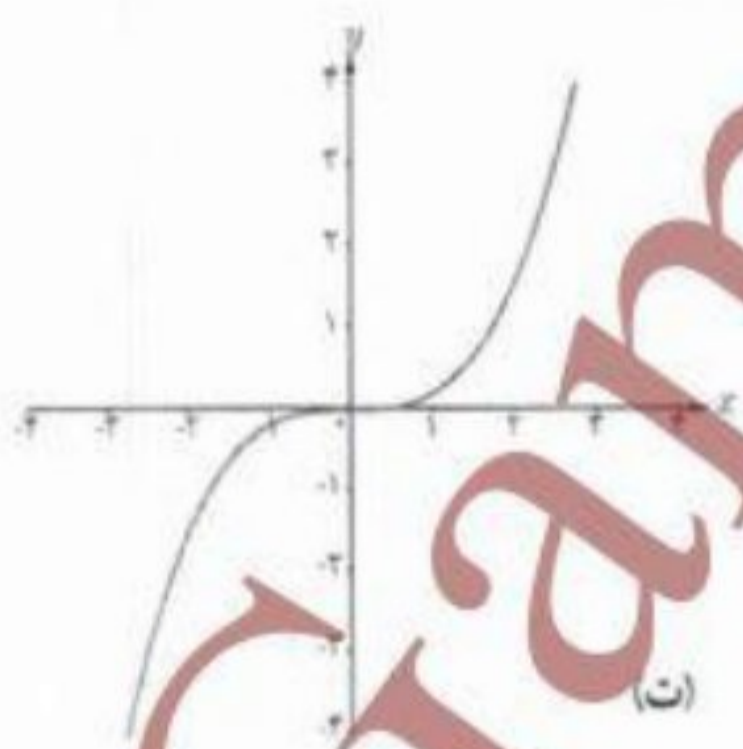


(الف)

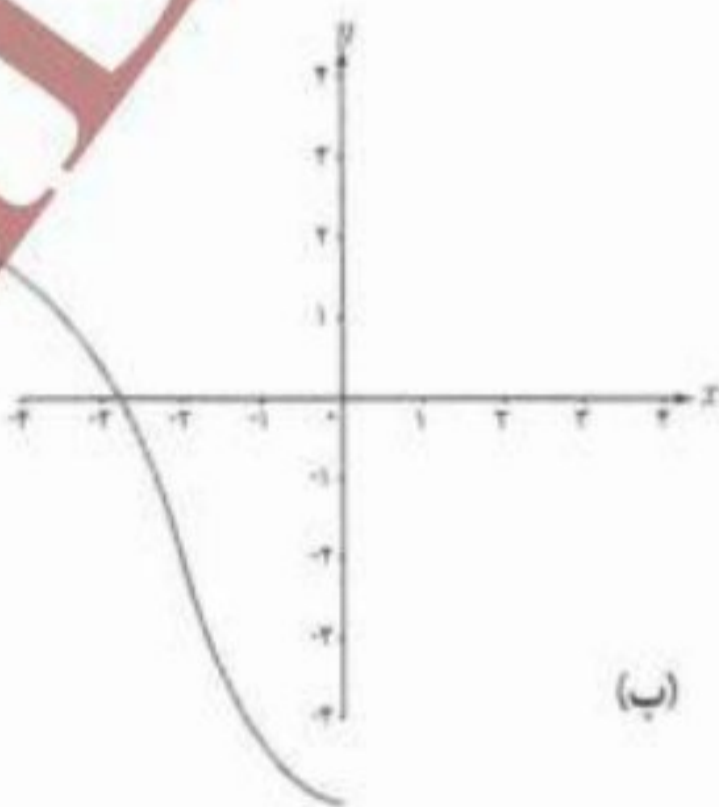
$a > 0$ $0 > 0$
 $-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow -b < 0 \Rightarrow b > 0$
 یعنی تابع صعودی و طول نقطه
 عطف آن منفی باشد



(ج)



(د)

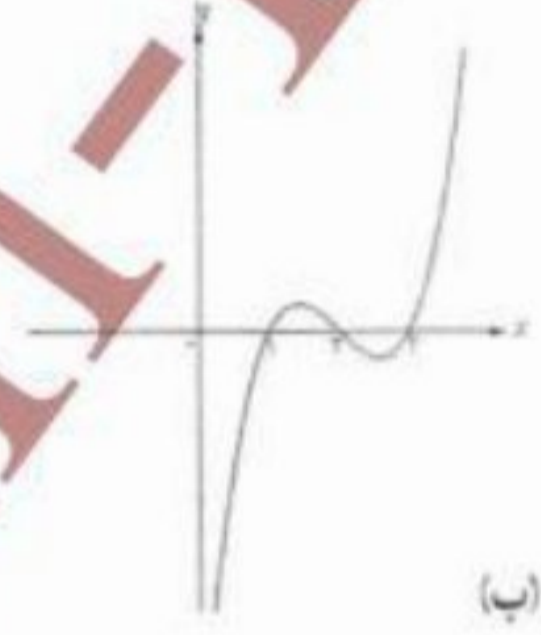
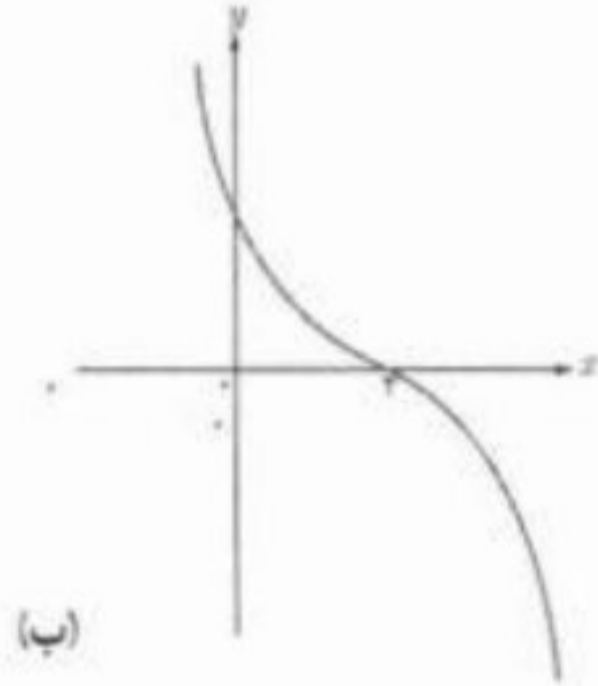
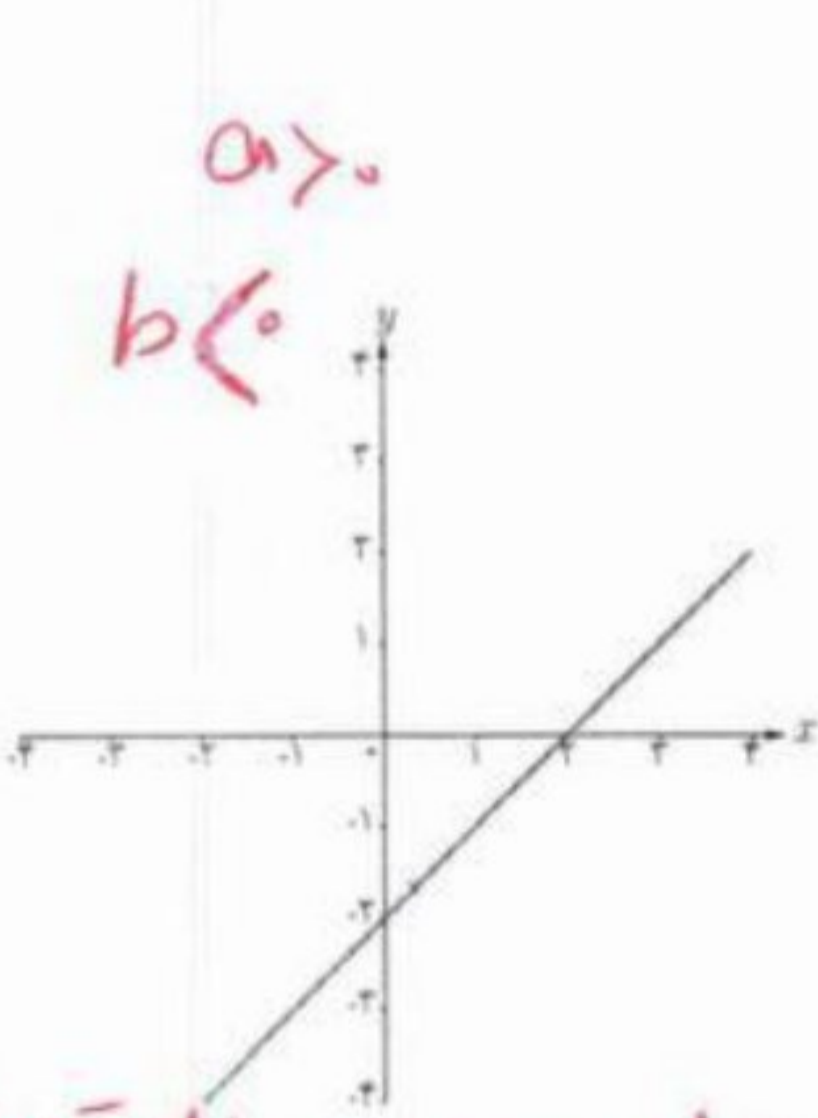


(ه)

✓

@CamBe

۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f باشد کدام نمودار می تواند نمودار تابع f باشد؟



تابع صعودی حول نقطه عطف
آن $x = -\frac{b}{3a}$ است
نقطه عطف $y = \frac{4b^2 - 27ac}{27a^2}$

تمرین

۱ نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که در نقطه ای مانند a جهت تغير عوض شود ولی این نقطه، نقطه عطف نباشد.

۲ جهت تغير توابع زیر را در دامنه آنها بررسی کرده و نقطه عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

ب) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

ب) $f(x) = \sqrt{x+1}$

۳ برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بزنید که نقطه داده شده نقطه عطف آن باشد.

الف) نقطه $(0, 0)$

ب) نقطه $(1, 0)$

ب) نقطه $(1, 0)$

ت) نقطه $(2, 2)$

$f(x) = (x-2)^3 + 2$

$f(x) = x + 1$

$f(x) = (x-1)^3$

$f(x) = y = x^3$

۴ مقادیر a, b, c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0) = 1$ و $f(1) = 2$ و $x = \frac{1}{3}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.

۵ اگر نقطه عطف تابع درجه سوم $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ با ضابطه $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a, b, c را پیدا کنید.



$y' = 3x^2 + 2ax + b$

$y'' = 6x + 2a \Rightarrow 6(0) + 2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$(\min) x = 2 \Rightarrow 3(2)^2 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -12$

$(0, 0) \Rightarrow 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

پایه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به دست می‌دهد به طوری که $y = f(x)$ و زوج مرتب (x, y) یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همه این نقاط (x, y) به ازای تمام $x \in D_f$ ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازه زیرمجموعه \mathbb{R} تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجه ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: اگر بدانید تابع $y = f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم:

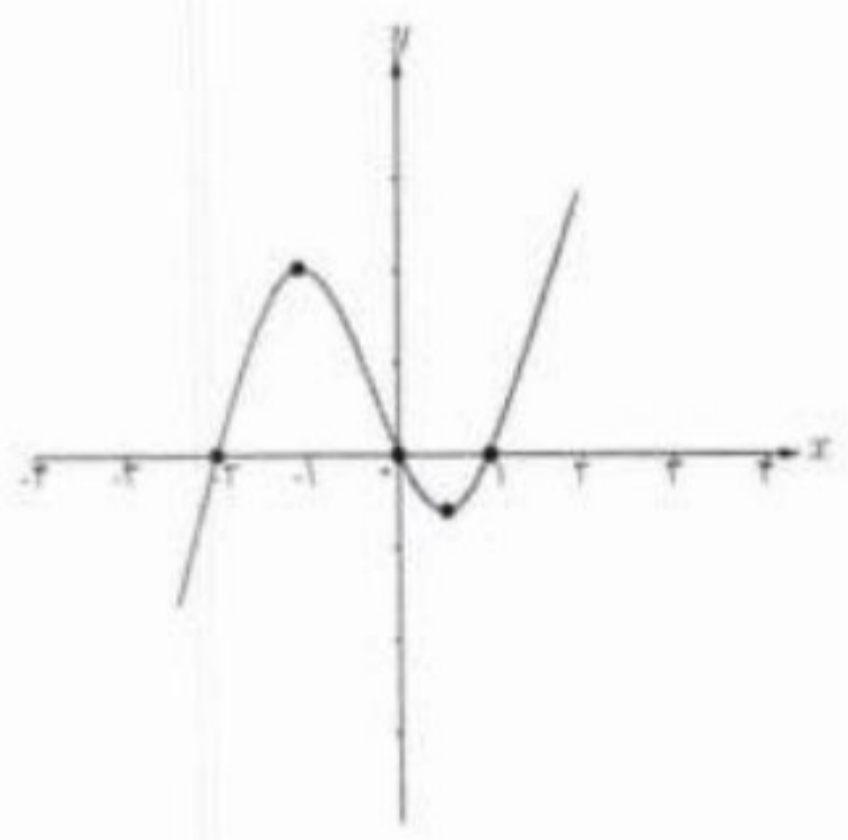
۱ ریشه‌های تابع f به صورت $x = 1$ و $x = 0$ و $x = -2$ است و f در همه نقاط مشتق پذیر باشد.

۲ ریشه‌های تابع f' به صورت $x = \frac{1}{4}$ و $x = -\frac{6}{5}$ است و علامت f'' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است و $f(\frac{1}{4}) = -0.6$ و $f(-\frac{6}{5}) = 2$.

۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x = -\frac{1}{3}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{1}{3}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است و $f(-\frac{1}{3}) = 0.7$.
در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

حله: از (۱) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x = \frac{1}{4}$ و $x = -\frac{6}{5}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x = -\frac{6}{5}$ و $x = \frac{1}{4}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع اند و از (۲) نتیجه می‌شود که تغییر تابع f قبل از $x = -\frac{1}{3}$ رو به پایین و در سمت راست $x = -\frac{1}{3}$ رو به بالاست و چون f' در $x = -\frac{1}{3}$ وجود دارد لذا مماس در این نقطه وجود دارد، بنابراین $x = -\frac{1}{3}$ نقطه عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همه اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

x	$-\infty$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
f'	+	۰	-	-	۰	+
f''	(-)	(-)	۰	(+)	(+)	
f	\nearrow	۲	\searrow	0.7	-0.6	\nearrow
		ماکزیم	نقطه عطف	مینیم		



با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور x ها هستند نمودار تابع به صورت روبه‌رو است.

همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

- ۱ دامنه تابع را مشخص می‌کنیم.
- ۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۳ f' را به دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.
- ۴ نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع را به دست می‌آوریم (در صورت وجود).
- ۵ f'' را به دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.
- ۶ نقطه عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).
- ۸ معادله مجانب‌های تابع را به دست می‌آوریم (در صورت وجود).
- ۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.
- ۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.
- ۱۱ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.



مثال: نمودار تابع $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

حل: دامنه این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه اش پیوسته و مشتق پذیر است. حال با به دست آوردن f' و f'' و ریشه های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می دهیم.

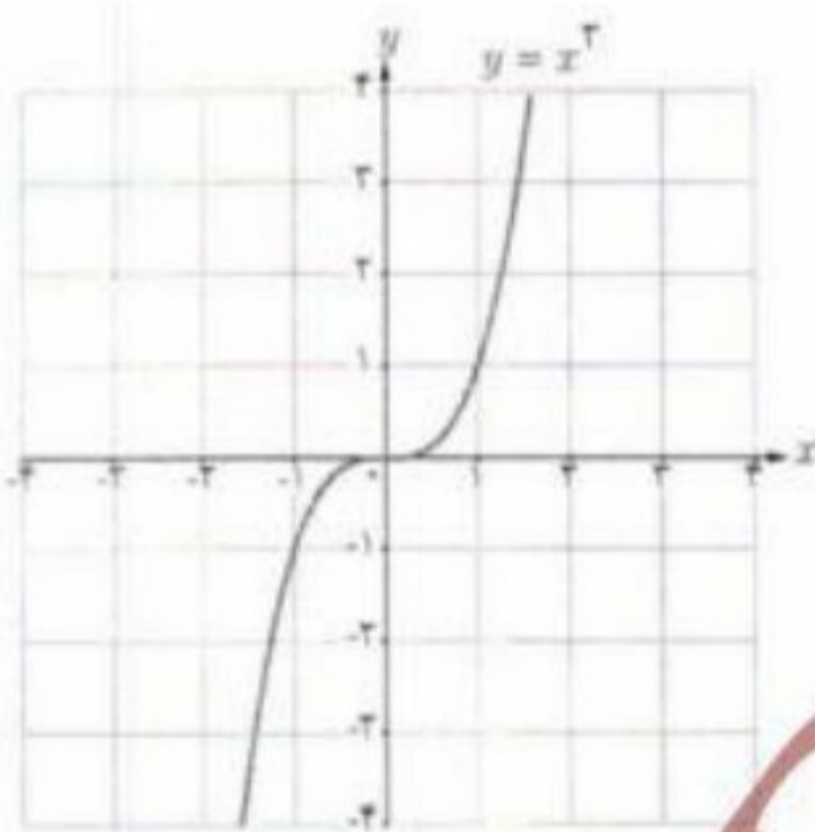
$$f(x) = x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{محل برخورد نمودار با محورهای مختصات } (0, 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	+	+
f''	-	-	+
f	↗	↗	↗

نقطه عطف



این تابع همواره صعودی است و اکسترم نسبی ندارد. از طرفی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لذا دو شاخه انتهایی نمودار در ربع های اول و سوم قرار دارند.

می توان برای دقیق تر شدن شکل، نقاط بیشتری از منحنی را به دست آورد؛ مثلاً در اینجا نقاط $(1, 1)$ و $(-1, -1)$ نیز بر نمودار تابع واقع اند. با توجه به آنچه گفته شد می توان نمودار تابع $y = x^3$ را به صورت مقابل رسم کرد.

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2(x+3)$ را رسم کنید.

حل:

دامنه این تابع \mathbb{R} است و این تابع همواره پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -3$$

بنابراین نقاط $(1, 0)$ و $(-3, 0)$ محل های برخورد با محور x ها است

$$x = 0 \Rightarrow y = 3$$

بنابراین نقطه $(0, 3)$ محل برخورد با محور y هاست

$$f'(x) = 2(x-1)(x+3) + (x-1)^2 = (x-1)(3x+5)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -\frac{5}{3}$$



لذا نقاط $(1, 0)$ و $(-\frac{5}{3}, \frac{256}{27})$ نقاط بحرانی اند

$$f''(x) = (3x + 5) + 3(x - 1) = 6x + 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

ز آنجا که مماس بر منحنی در نقطه $x = -\frac{1}{3}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطه $x = -\frac{1}{3}$ تغییر علامت می دهد، نقطه

$(-\frac{1}{3}, \frac{128}{27})$ نقطه عطف تابع است. از طرفی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

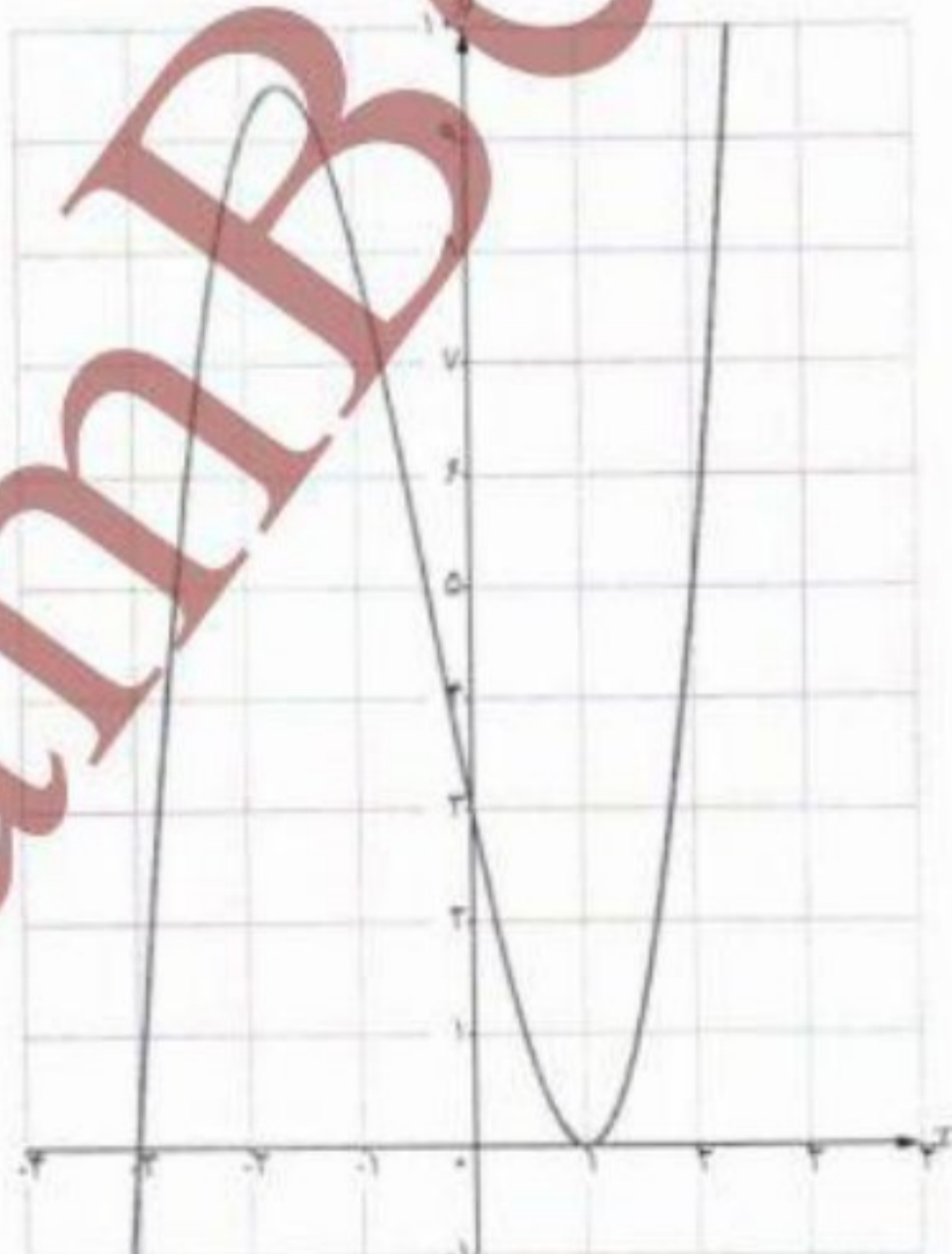
x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
f'		+	-	-	+
f''		(-)	(-)	(+)	(+)
f	$-\infty$	$\frac{256}{27}$	$\frac{128}{27}$		$+\infty$

ماکزیمم

عطف

مینیمم

حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل زیر است.



@CamBe

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c = 0$ و $d \neq 0$ باشد معادله این تابع به صورت $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادله یک خط راست است و اگر $c \neq 0$ و $d \neq 0$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

بنابراین $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = +\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین $x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است.

مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید.

حل: دامنه این تابع $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ است. داریم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ ، لذا خط $y = 1$ مجانب افقی است و از طرفی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ، لذا $x = 1$ مجانب قائم نمودار این تابع است.

همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(-2, 0)$ و $(0, -2)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت:

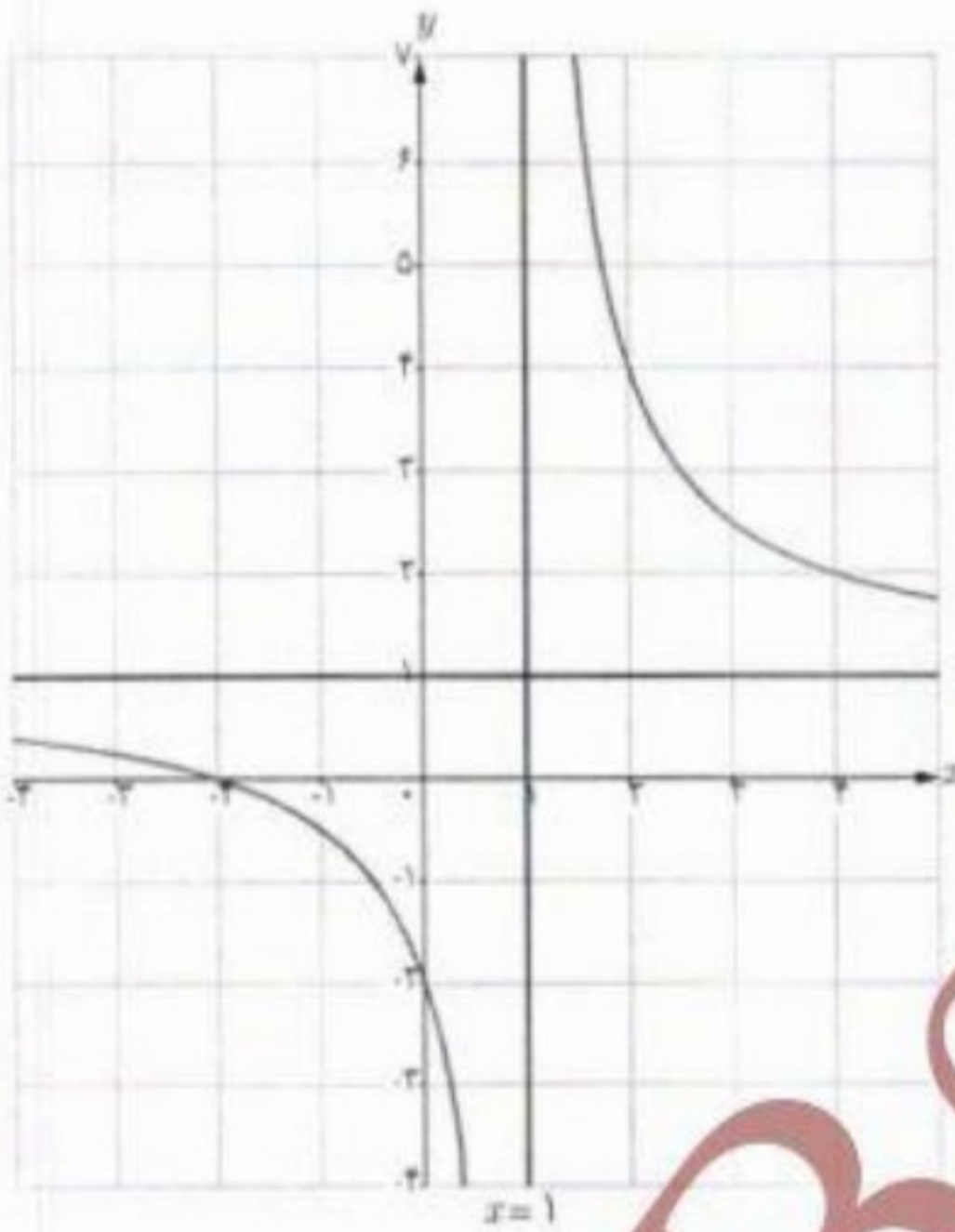
$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت:

$$f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{6}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

بنابراین برای هر x در بازه $(-\infty, 1)$ داریم $f'''(x) < 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازه $(1, +\infty)$ داریم $f'''(x) > 0$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	-	-	-	-	-
y''	\cap	\cap	\cap	\cup	\cup
y	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow



با توجه به اطلاعات این جدول می توان نمودار این تابع را به صورت روبه رو رسم کرد.

مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{3x+4}{-2x+1}$ را رسم کنید.

حل: دامنه این تابع $D = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ است. داریم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{3}{4}$ ، لذا $y = -\frac{3}{4}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی

لذا $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ ، مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(0, 4)$ و $(-\frac{4}{3}, 0)$ محورهای مختصات را قطع می کند.

$$f'(x) = \frac{11}{(-2x+1)^2} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2}$$



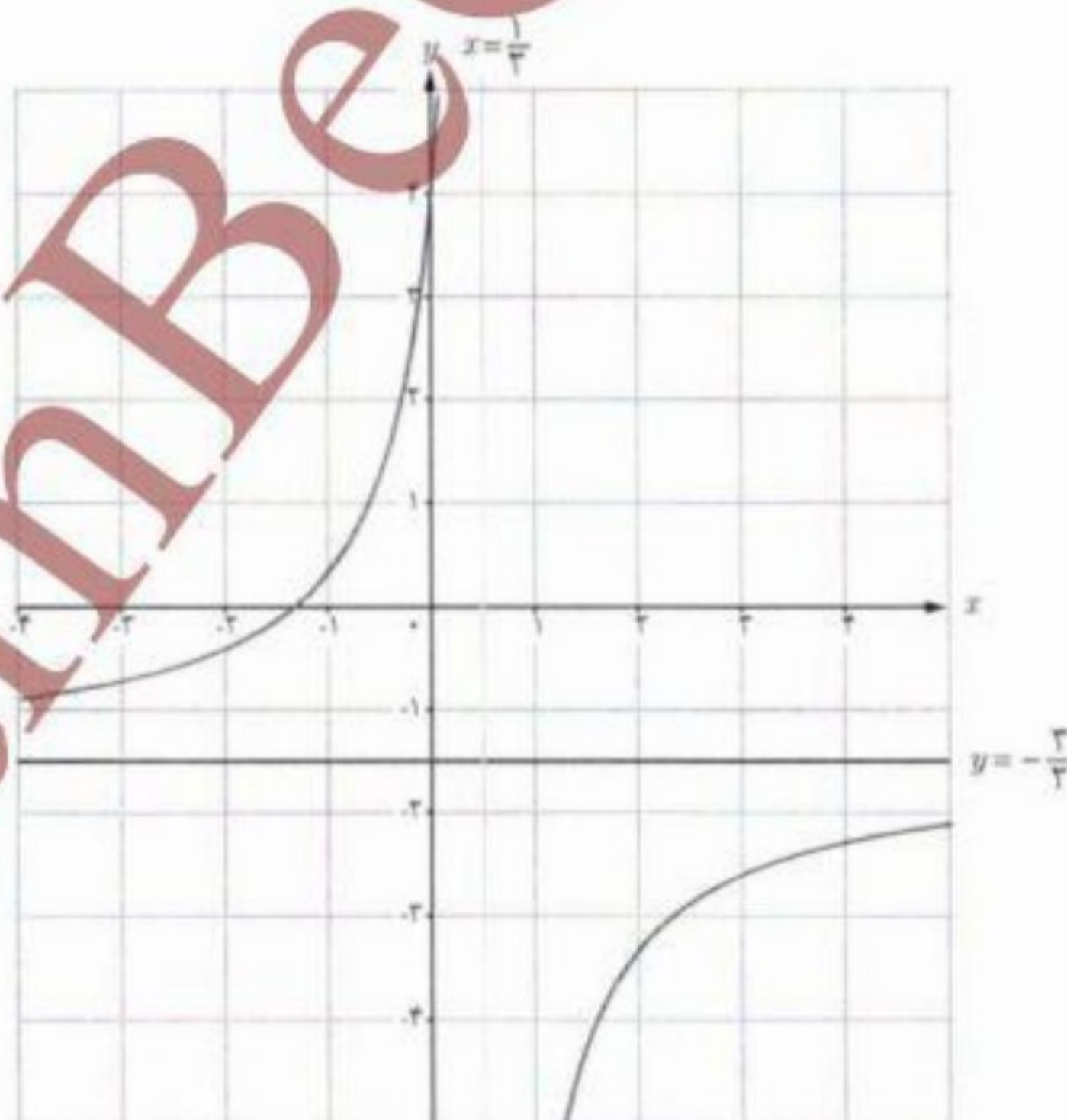
بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty, \frac{1}{3})$ و $(\frac{1}{3}, +\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت:

$$f''(x) = \frac{24}{(-2x+1)^3} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

بنابراین برای هر x در بازه $(-\infty, \frac{1}{3})$ داریم $f'' > 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازه $(\frac{1}{3}, +\infty)$ داریم $f'' < 0$ ، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'		+	+	+	+
y''		(+)	(+)	(+)	(-)
y	$-\frac{2}{3}$	\nearrow	\nearrow	\nearrow	$-\frac{2}{3}$

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطه کمکی می‌توان نمودار این تابع را به صورت زیر رسم کرد.



$$(2, 1) = \left(-\frac{a}{c}, \frac{a}{c}\right) \Rightarrow -\frac{a}{c} = 2, \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c, d = -2c \quad (2)$$

$$(-1, 0) \Rightarrow a(-1) + b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax + a}{ax - 2a} \Rightarrow f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$$

۱۴۴

تمرین

جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

ب) $f(x) = x^2 - 5x + 5$

ب) $f(x) = -x(x+2)^2$

ن) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

ن) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

ج) $f(x) = 2x^2 - 9x + 12x + 1$

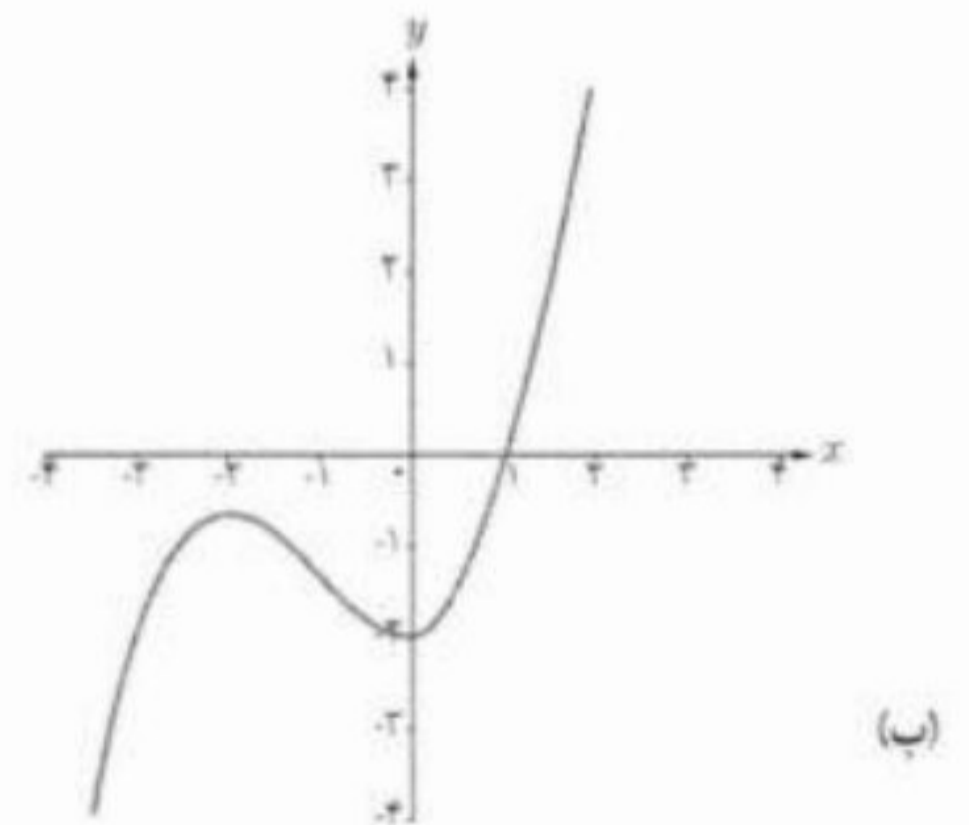
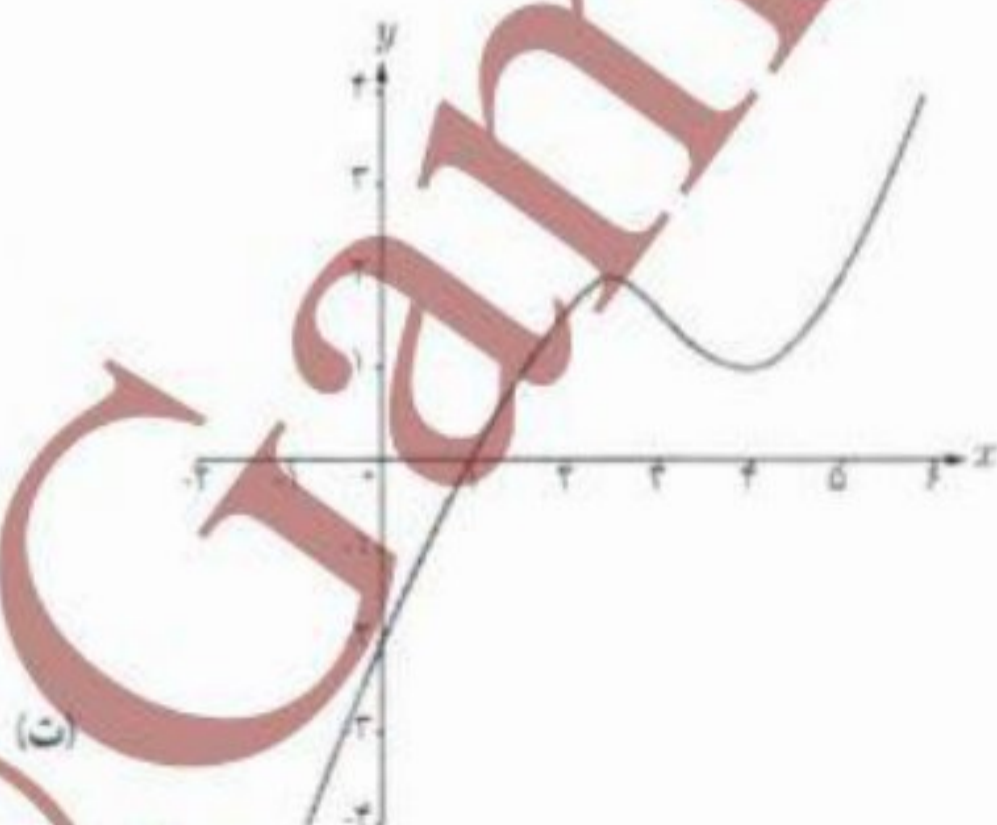
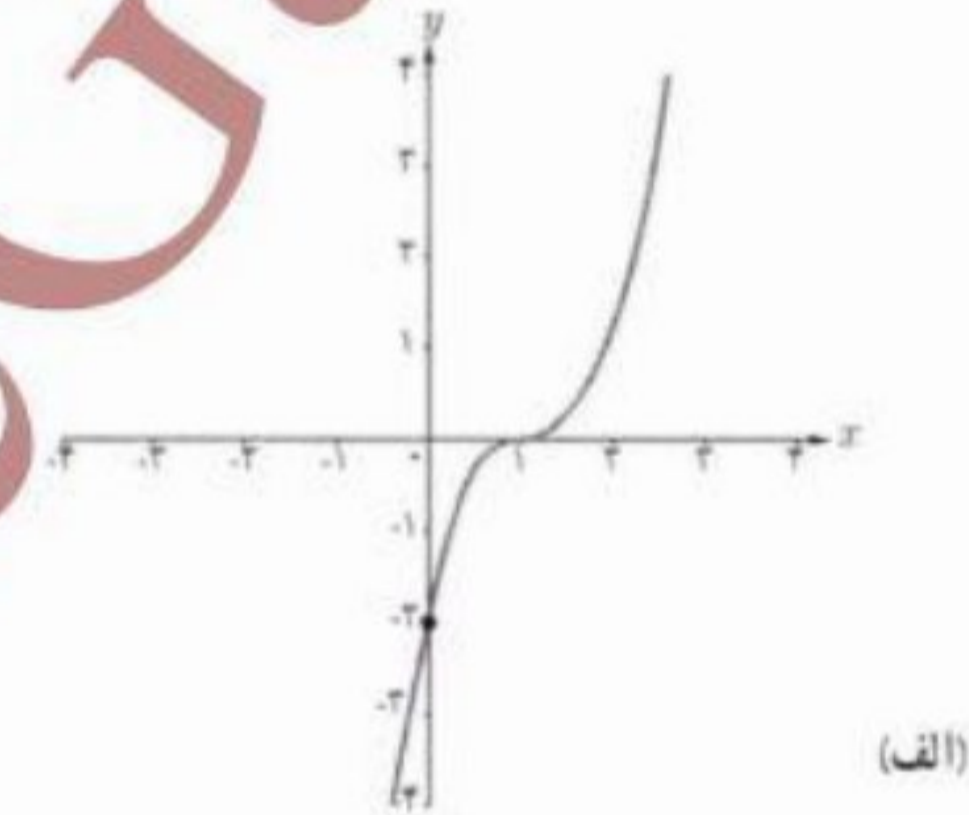
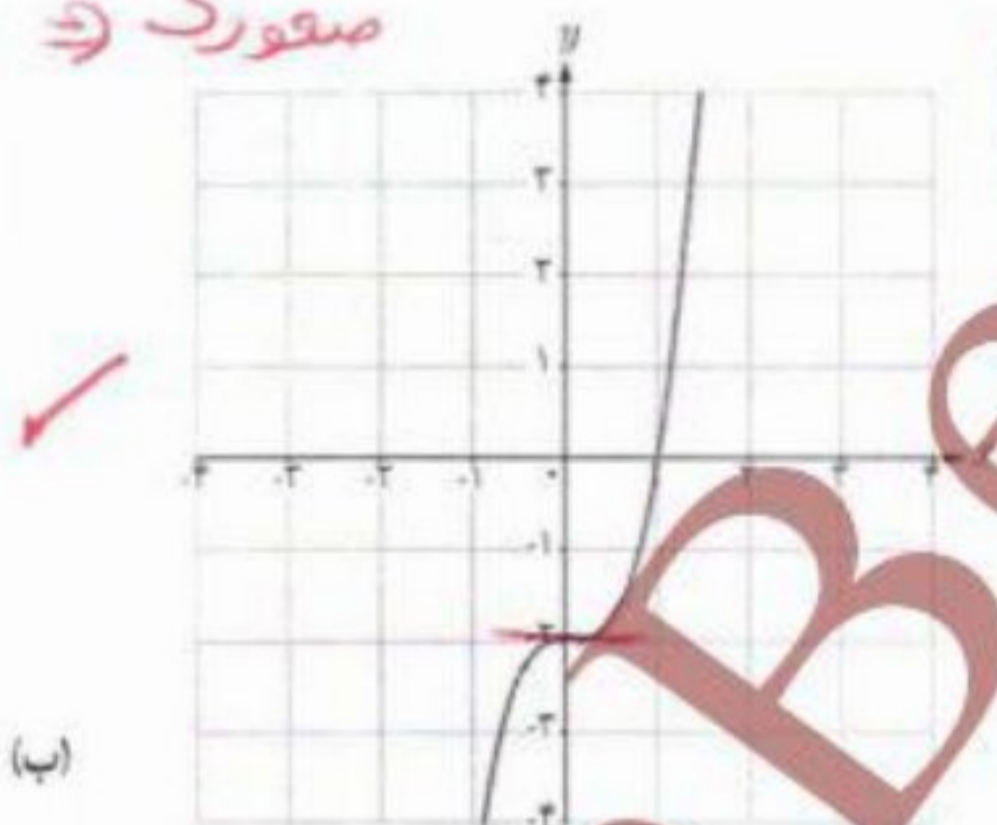
فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

حل الی صفر

کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^2 + x - 2$ است.

$$x = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow f(0) = -2$$

صغورک $a > 0$



©

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

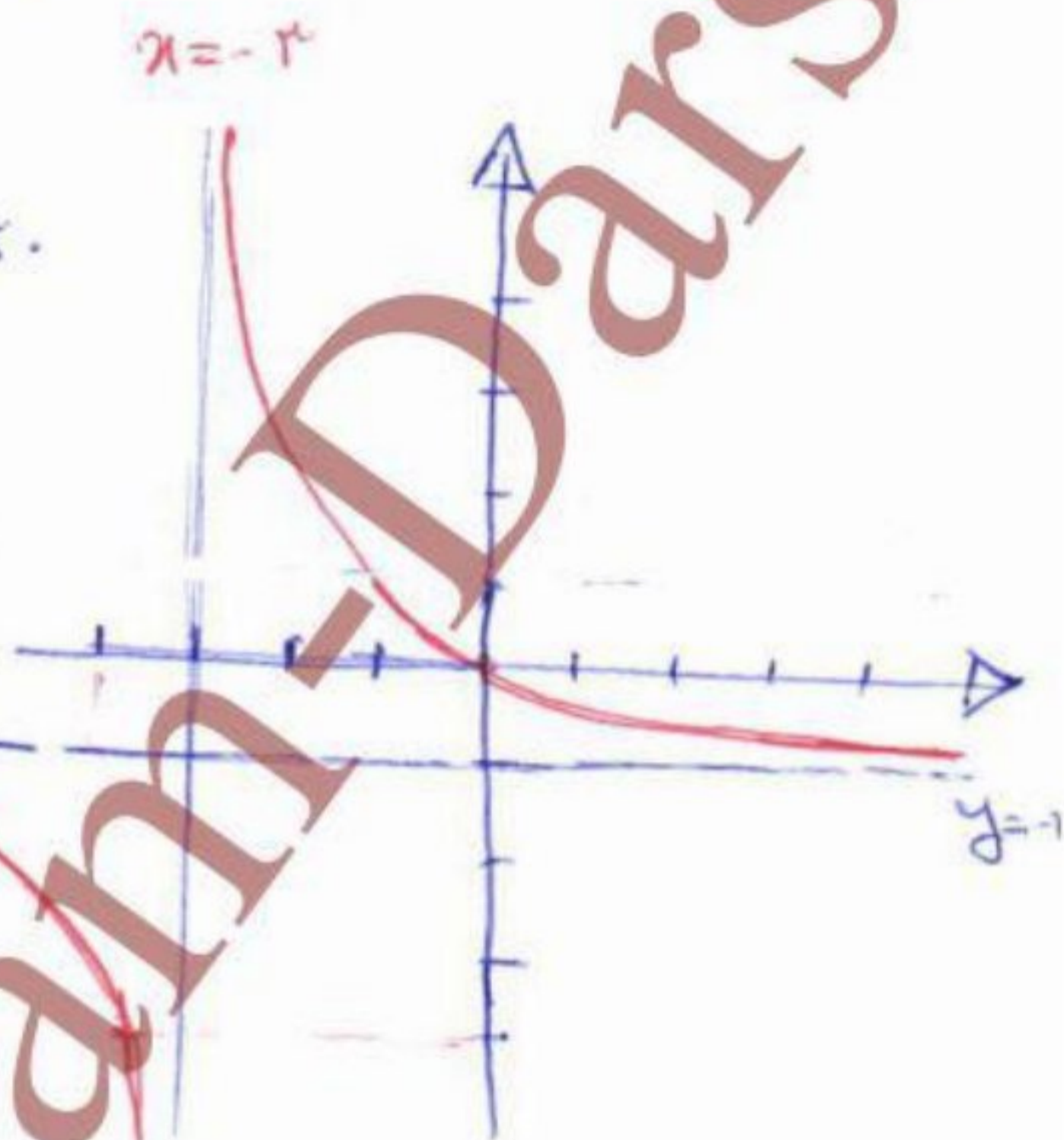
۱) $f(x) = \frac{-x}{x+3} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3\}$

۱) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \pm \infty \Rightarrow x = -3$ عمود قائم
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-x}{x+3} = -1 \Rightarrow y = -1$ افقی

۲) $f'(x) = \frac{-(x+3) - (1)(-x)}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(x+3)^2}$

۳) $f''(x) = \frac{6}{(x+3)^3}$ ($x+3=0 \Rightarrow x=-3$)

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
f'	-	-	-	-
f''	-	-	+	+
f	-1	$-\infty$	$+\infty$	-1

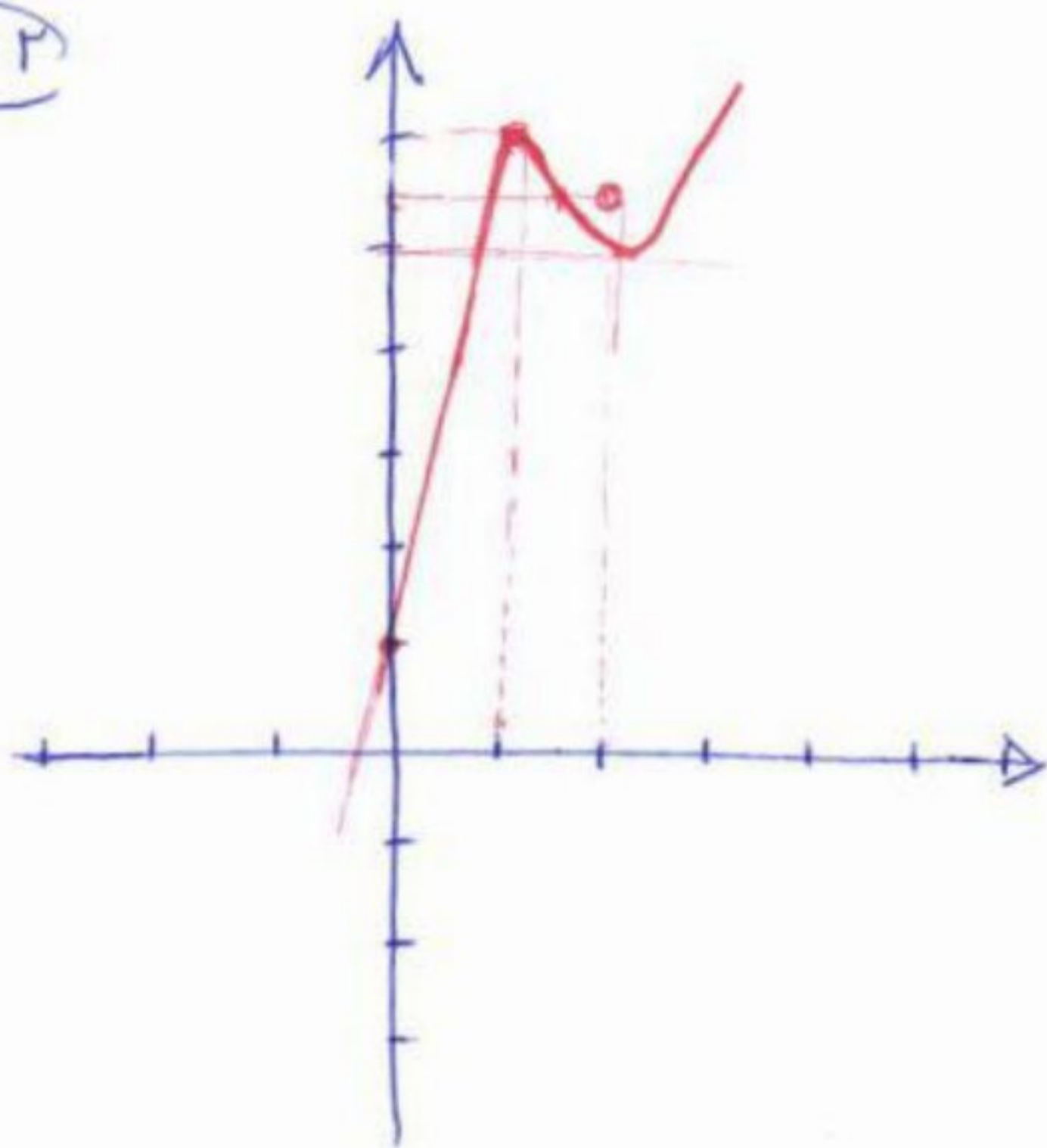


۲) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ ($D_f = \mathbb{R}$)

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$

$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f'	+	+	-	+	+
f''	-	-	+	+	+
f	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow



⊙ $f(x) = -x(x+2)^2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

$f'(x) = -1(x+2)^2 + 2(x+2)(-x) = 0$

$(x+2)(-x-2-2x) = 0$

$(x+2)(-3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
f'	-	0	+	+	-
f''	+	+	-	-	-
f				0	

$f''(x) = 1(-3x-2) + (-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow f''(x) = -3x-2-3x-6 \Rightarrow -4x-8 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

نہیہ کنندہ:

گروہ ریاضی مقطع دوم متوسطہ، استان خوزستان

⊙ $f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{2\}$

① $x=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty$ محاسب قائم

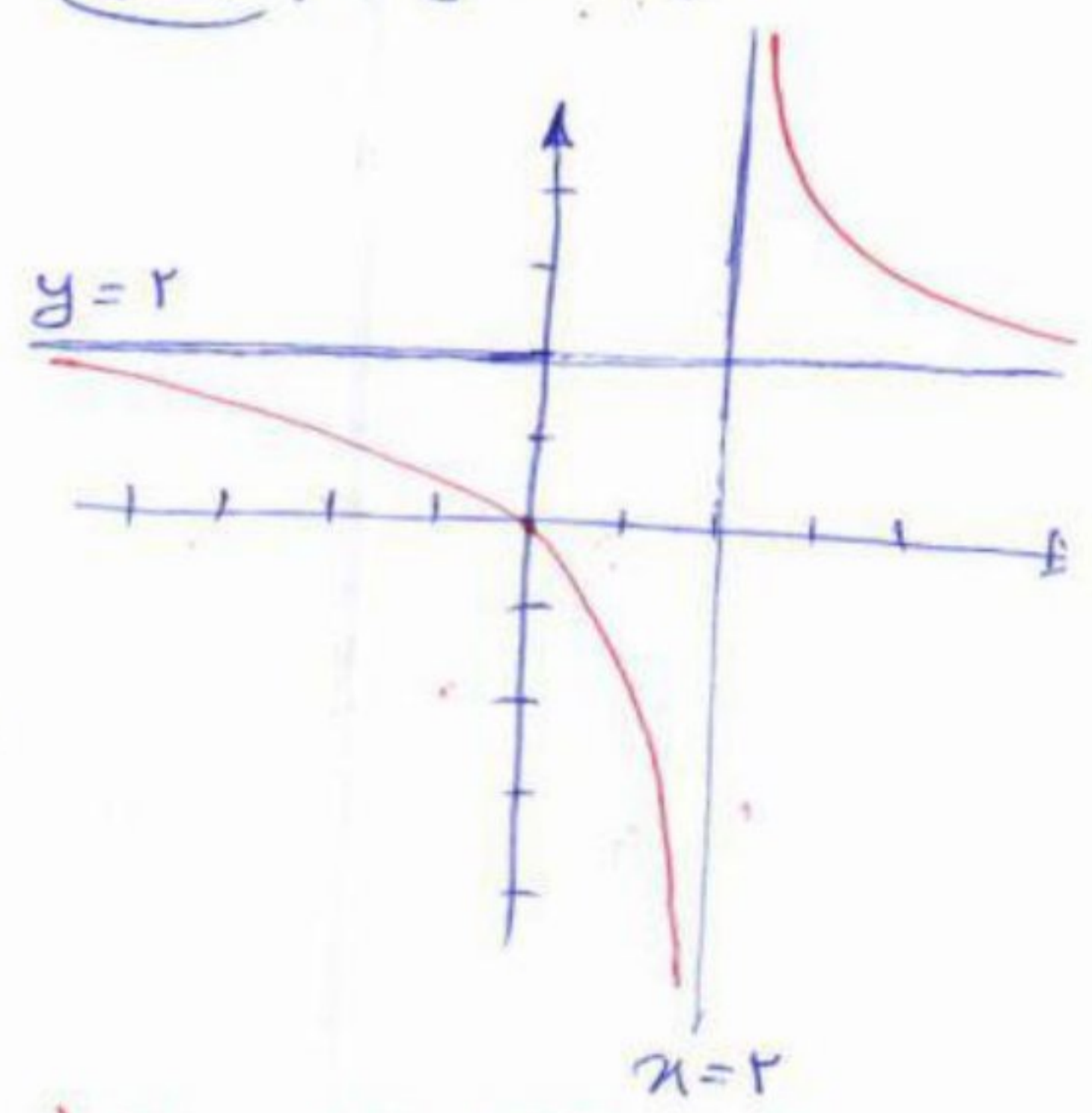
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2$ محاسب افقی

② $f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-4x+3}{(x-2)^2}$

③ $f''(x) = \frac{0 + 4(x-2)}{(x-2)^3} = \frac{4}{(x-2)^2}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	-	-
f''	+	-	+
f			



از نقاط گامی دیگر می توان استفاده نمود.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ ($D = R$)

① $f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$

② $f''(x) = 4 > 0$

③ $x = 0 \Rightarrow y = 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'		-	-	+
f''		(+)	(+)	(+)
f		\searrow	\searrow	\nearrow

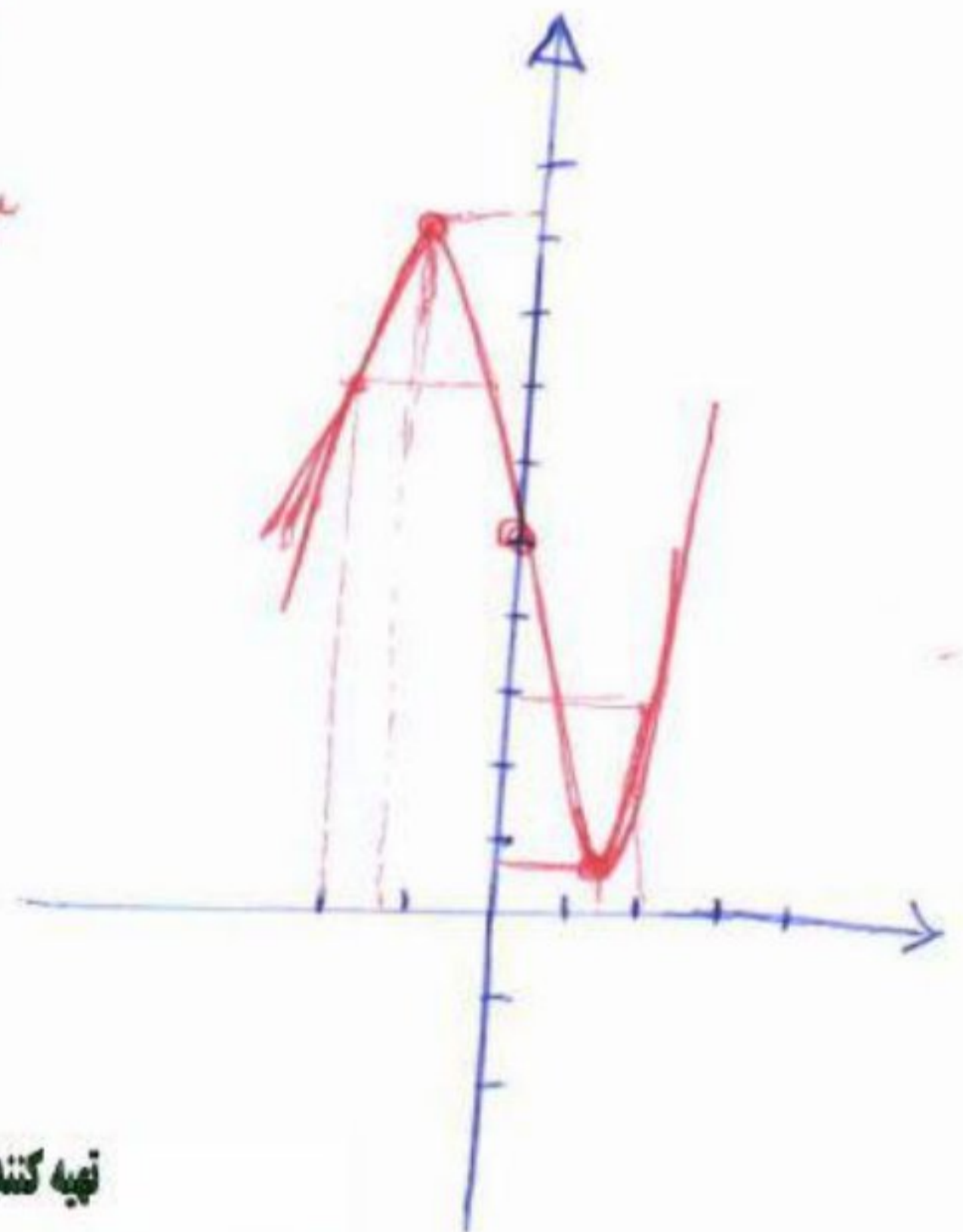


ب) $f(x) = x^3 - 5x + 4 \Rightarrow D = R$

$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.3$
 $x = -\sqrt{\frac{5}{3}} = -1.3$

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	$(-)\sqrt{\frac{5}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$(+)\infty$
f'	+	+	-	-	+
f''		(-)	(-)	(+)	(+)
f	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow



تہیہ کنندہ:

گروہ ریاضی مقطع دوم متوسطہ، استان خوزستان

2