

فصل ۱ - امار و احتمال

درس ۱ شمارش

درس ۲ احتمال

درس ۳ چرخه امار در حل مسائل

«... و احاطه بما لذيهم و احصى كل شئ عتداً» (آیه ۲۸ / سوره مبارکه جن)
«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را شمارش کرده است»



رومنای مشکله - استان کیلان (شهرستان انوش)

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۲۰ کتاب متفاوت درباره روان شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می تواند یکی از ۳۰ کتاب روان شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $20 + 25 = 45$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است. او می تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت های ممکن را که او می تواند به صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید: $2 + 3 = 5$

شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به صورت زیر بیان می شود.

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را بتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)



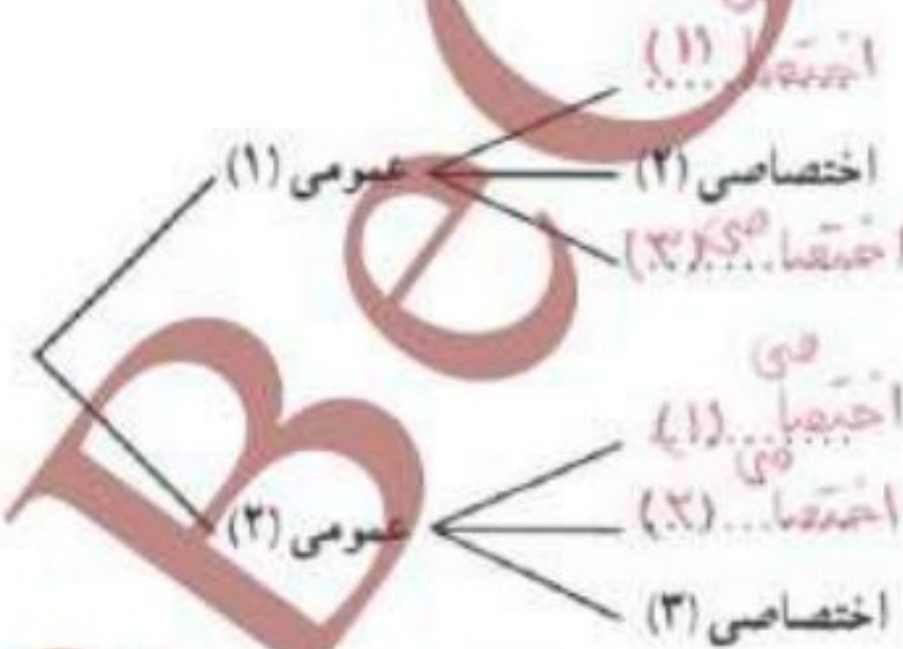
مثلاً شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار یا چهار رنگ مختلف و پنج مداد یا رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟
 حل: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیاء می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

$$۱۲ = ۵ + ۴ + ۳ = \text{تعداد انتخاب‌ها}$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی ۳۰۰ راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به $۲۰۰ \times ۳۰۰ = ۶۰۰۰۰$ طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)



مسئله: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت‌امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می‌گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟
 ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

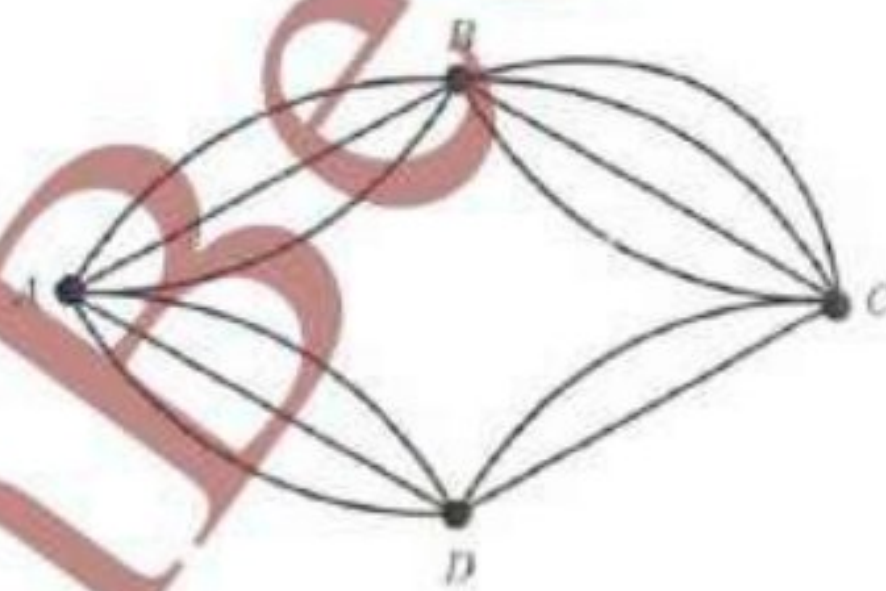
راه حل:

الف) از اصل جمع استفاده می‌کنیم؛ زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به $7+8=15$ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت، مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند «و» به ازای هر انتخاب از A، به ۸ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به $7 \times 8 = 56$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه‌رو، میان چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:
 الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟
 برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ «یا» $A \rightarrow D \rightarrow C$ را انتخاب کرد (اصل جمع)؛ بنابراین:
 تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C به

$$= 4 \times 4 + 3 \times 4 = 16 + 12 = 28$$

ب) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ «یا» $B \rightarrow A \rightarrow D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم:
 تعداد راه‌های مسافرت از B به D = $4 \times 4 + 3 \times 3 = 16 + 9 = 25$

نماد فاکتوریل

همان‌طور که برای ضرب یک عدد، مانند « n »، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « n^n »، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل « $n!$ » استفاده می‌کنیم. برای مثال،

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad \text{و} \quad 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم.

مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{(3 \times 2 \times 1)}^{3!}}{(3 \times 2 \times 1)} = 5 \times 4 = 20$

پ) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$

ت) $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} = \frac{6 \times 120 \times 1}{7 \times 720 \times 1} = \frac{1}{7}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c, d را در نظر بگیرید. آرایش با حالت $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم».

فعالیت

۱- اگر افراد A, B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\frac{3}{A \text{ یا } B \text{ یا } C} \quad \frac{2}{\text{یکی از ۲ نفر باقی مانده}} \quad \frac{1}{\text{نفر باقی مانده}} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

(اول شخص B ، بعد C و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

۲- با ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ و چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad \rightarrow \text{تعداد اعداد ۵ رقمی} \quad \rightarrow \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها}$$



۲- ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیاء یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $(n-1)$ انتخاب داریم و... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنا بر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$.

$$\frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \dots \frac{2}{n-2} \frac{1}{n-1}$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام $0, 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض اند؛ با این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{5}{5} \frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1}$ اصل ضرب $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) بنا بر این:

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{4}{5} \frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1}$ اصل ضرب $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

$$= 120 - 96 = 24$$

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر

حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنا بر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم:

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{4}{5} \frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1}$ اصل ضرب $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{2}{2}$ اصل ضرب $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

$$= 24 + 48 = 72$$

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۵ رقمی هایی که به ۵ ختم می شوند + ۵ رقمی هایی که به صفر ختم می شوند = تعداد ۵ رقمی های مضرب ۵

۵ → تعداد انتخاب ها $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{1} = 120 = 5!$

۵ → تعداد انتخاب ها $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{1} = 96 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

تعداد ۵ رقمی های مضرب ۵ = $120 + 96 = 216$

تبدیل (انتخاب ۳ سی از بین ۷ سی، که در آن جابه جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد.)

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۷ → تعداد انتخاب ها $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

از طرفی: $7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!} = 840$

(توجه دارید که با جابه جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت ها، جابه جایی ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

۵ → تعداد انتخاب ها $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5 \times 4 \times 3 = 60$

از طرفی: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$



در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء ($r \leq n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد انتخاب‌ها $\rightarrow \frac{n}{n} \frac{n-1}{n-1} \frac{n-2}{n-2} \dots \frac{(n-r+2)}{(n-r+2)} \frac{(n-r+1)}{(n-r+1)}$

طبق اصل ضرب $\rightarrow n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \times (n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

* تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

روش اول: $P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$

روش دوم: $\frac{7}{7} \frac{6}{6} \frac{5}{5} \times 6 \times 5 = 210$

* ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد).

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳ جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد). برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر ۳ تقسیم کنیم.



$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۳	۱,۲,۴	۱,۳,۴	۲,۳,۴
جابگشت های سه رقم انتخاب شده	۱۲۳ ۱۳۲ ۲۳۱ ۲۱۳ ۳۱۲ ۳۲۱	۱۲۴ ۱۴۲ ۲۱۴ ۲۴۱ ۴۱۲ ۴۲۱	۱۳۴ ۱۴۳ ۳۱۴ ۳۴۱ ۴۱۳ ۴۳۱	۲۳۴ ۲۴۳ ۳۲۴ ۳۴۲ ۴۲۳ ۴۳۲
	$A_1 = \{1,2,3\}$	$A_2 = \{1,2,4\}$	$A_3 = \{1,3,4\}$	$A_4 = \{2,3,4\}$

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

* ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟
حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 2!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

$$\text{روش اول: } \underline{9} \quad \underline{8} \quad \underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \quad \longrightarrow \quad 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

$$\text{روش دوم: } P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120$$

۲. به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

در ساختن تیم با جابه جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = 84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد (در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

۴. در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

در انتخاب مهره های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

تمرین

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز

$$12 + 11 + 10 = 33$$

انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟

۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:

$$(3 \times 2) + (2 \times 1) = 20$$

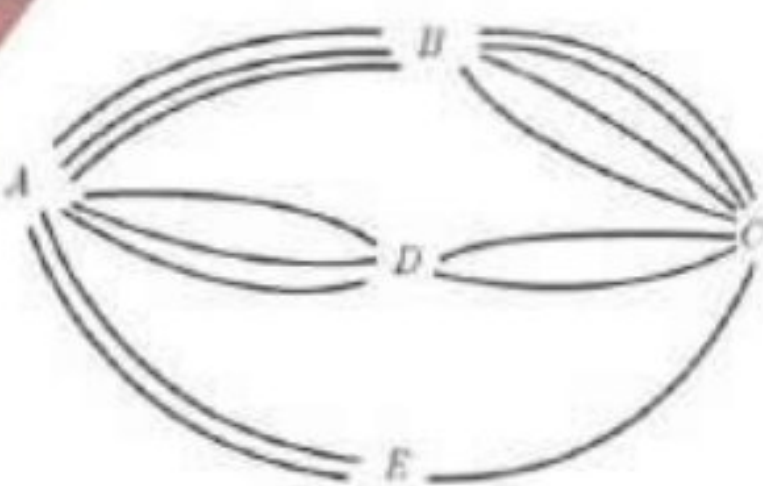
الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

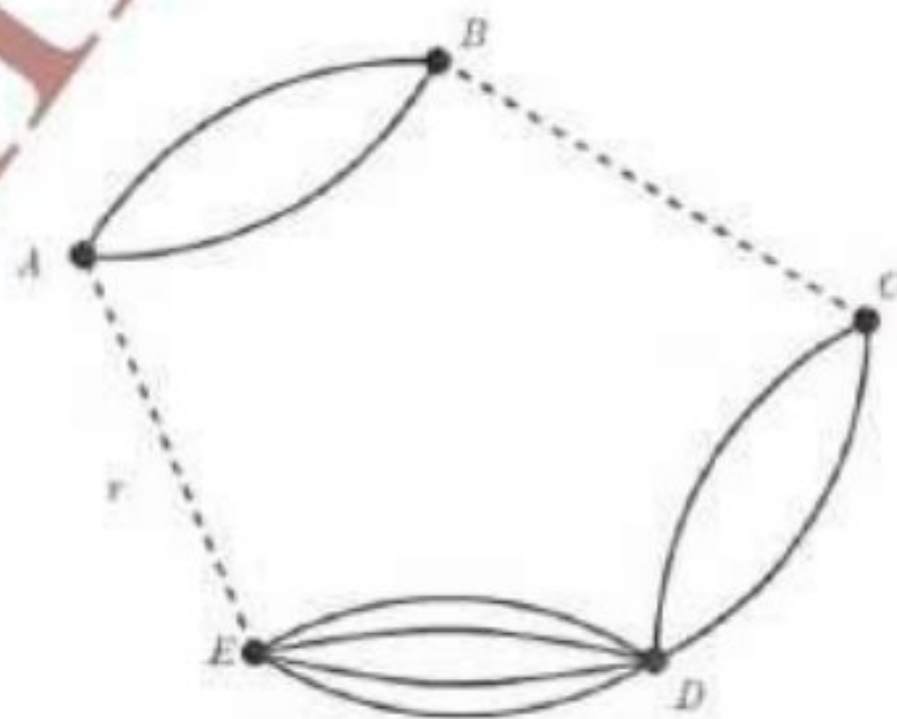
$$(3 \times 2) + (1 \times 2) = 26$$

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

$$3 + (2 \times 2 \times 3) = 27$$



۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)
الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟
ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟
پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟
۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟
۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟
۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛ الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟ ب) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟
ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟
ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟
۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:
الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.
ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.
ب) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.
ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.
۹. مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 2 + 3^2)$ باشد.
۱۰. تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



حل تمرینهای صفحه ۱۱

تمرین ۳:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب) $4 \times 3 \times 1 = 12$

پ) $1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

تمرین ۴:

$$P(10, 2) = \frac{10!}{8!} = 90$$

تمرین ۵:

$$7 \times 2 \times 2 = 28$$

تمرین ۶:

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

ب) $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

پ) $\binom{6}{3} = 20$

ت) $\binom{10}{5} \times \binom{6}{1} = 252 \times 6 = 1512$

کافی است تعداد زیر مجموع های دو عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

تمرین ۷:

الف) $\binom{12}{3} = 220$

ب) $\binom{12}{2} = 66$

تمرین ۸:

الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{2} = 10 \times 15 = 150$

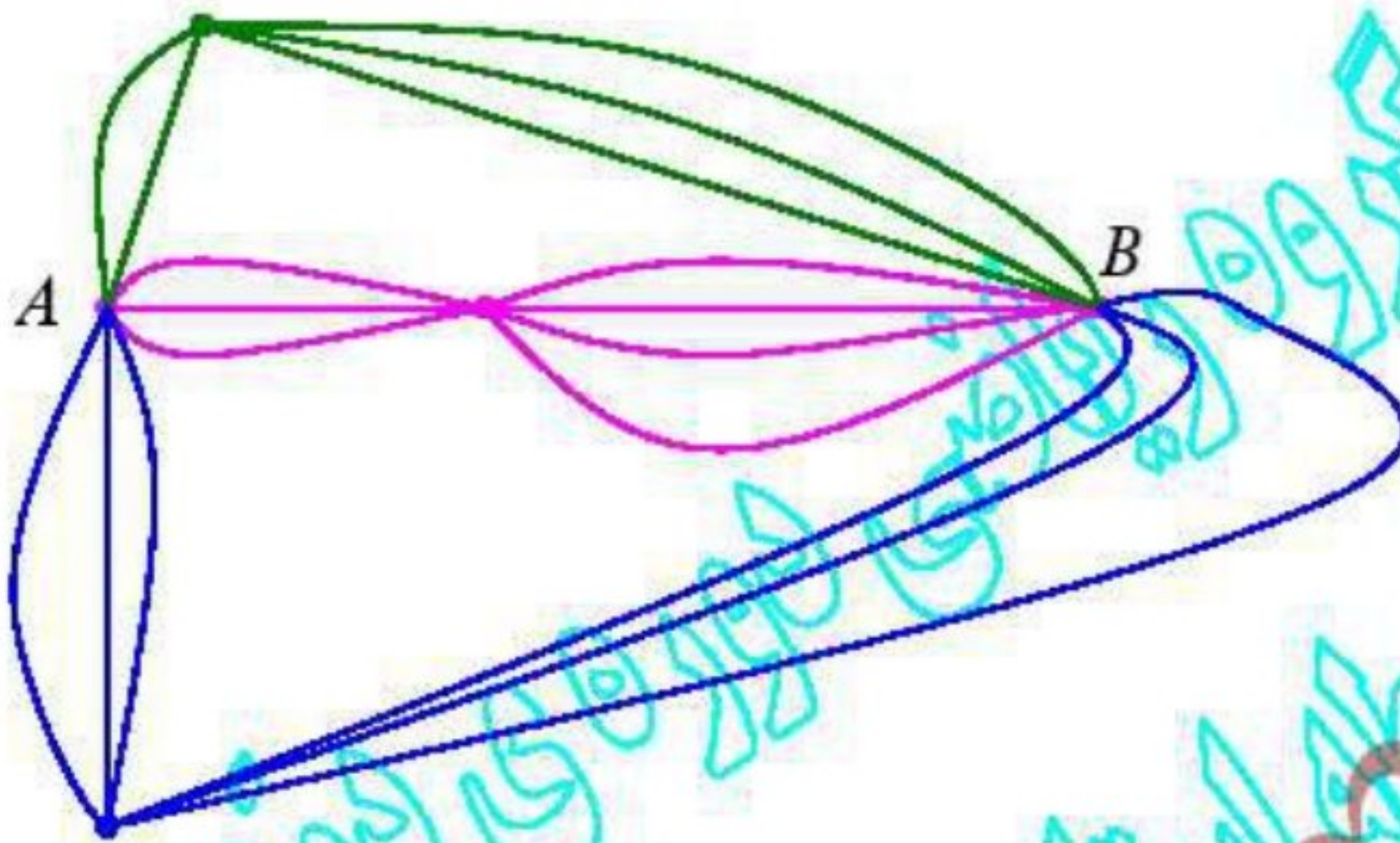
ب) $\binom{12}{2} = \text{????}$

ب))

$$\binom{5}{2} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{0} \times \binom{6}{6} = (10 \times 15) + (5 \times 6) + (1 \times 1) = 150 + 30 + 1 = 181$$

$$c) \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = 10 \times 15 = 150$$

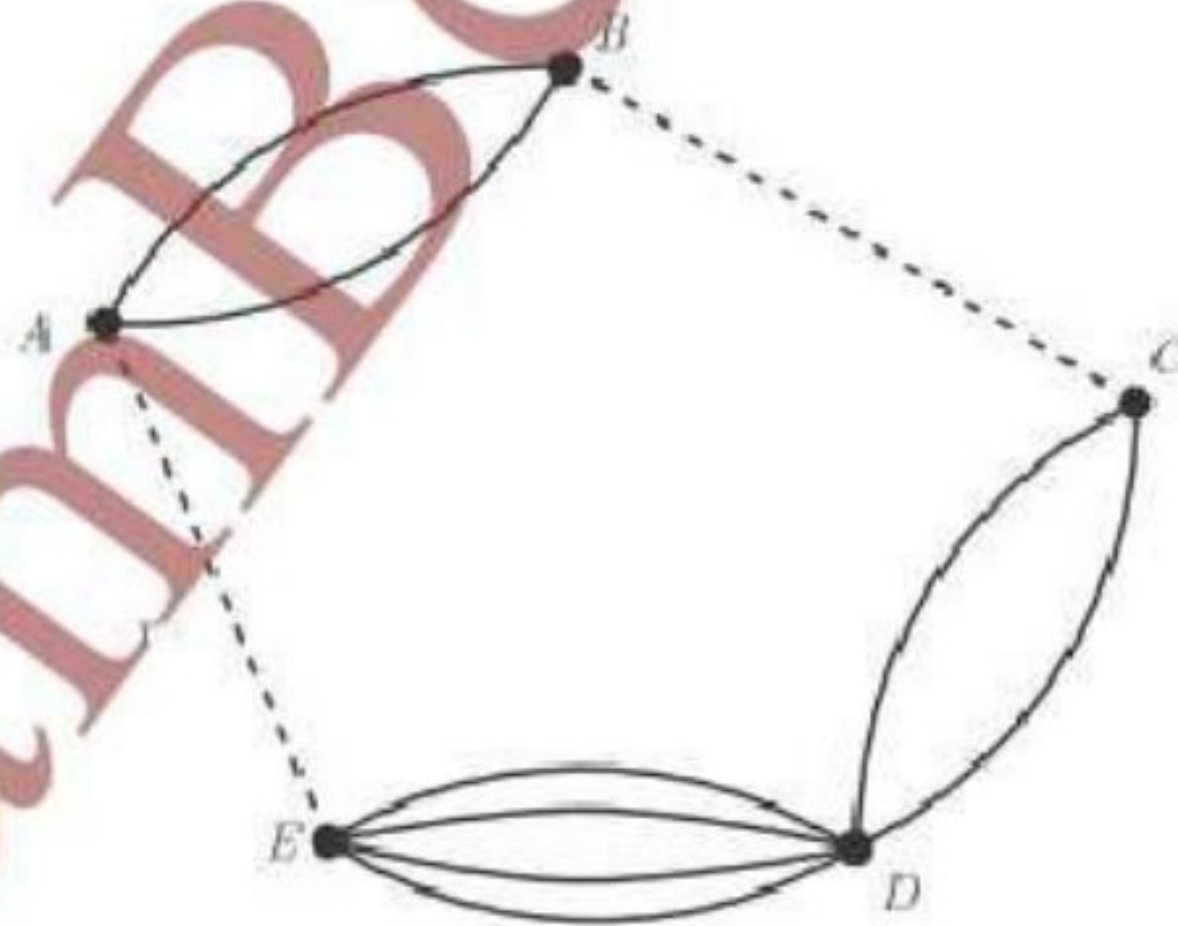
تمرین ۹: به توجه به شکل زیر، تعداد مسیرهای سفر از شهر A به شهر B را به دست آورید.



تمرین ۱۰: به نظر می رسد که صورت مسئله اشتباه تایپی دارد حال اگر تغییر زیر را انجام دهیم می توان

به شکل زیر عمل کرد.

۱۰. تعداد راهها یا جادهها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



اکنون اگر تعداد مسیرهای از B به C را برابر m و همچنین تعداد مسیرهای از E به A را برابر n قرار دهیم خواهیم داشت.

$$2 \times m \times 2 + n \times 4 = 20 \rightarrow 4m + 4n = 20 \xrightarrow{\div 4} m + n = 5$$

لذا می توان نوشت :

m	۱	۲	۳	۴
n	۴	۳	۲	۱

فعالیت

ترگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز ترگس مانند هر روز ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

هیچ‌کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، ترگس به موقع به مدرسه می‌رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟

عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک، از طرفی رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به‌طور معمول منظم نیست و... بنابراین؛ دو وضعیت وجود دارد: یکی اینکه ترگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه ترگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.



پدیده‌هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به‌طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت‌های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به‌طور تصادفی مهره‌ای خارج می‌کنیم، می‌دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به‌طور قطعی مشخص نیست. این‌گونه آزمایش‌ها را آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعا رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

ج) نتیجه قره کشتی

الف) نتیجه برتاب سله
ب) نتیجه برتاب تاس

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشند، آزمایش ها یا پدیده های قطعی می گوئیم.
برای مثل، چنانچه سنگی را به داخل استخری برتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می دانیم که سنگ به داخل آب فرو می رود یا
پیش از برتاب یک سکه، می دانیم که سکه روی زمین می نشیند. این گونه پدیده ها، آزمایش هایی قطعی هستند.

ب) نتیجه استخراج مهره از رویون
کسب وقتی که مهره ها خارج
باشند.

الف) نتیجه رها شدن سیب از درخت

کار در کلاس

۱. کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشند، در کلاس دوازدهم؛ **قطعی**

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، برتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛ **تصادفی**

ب) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ **قطعی**

ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛ **تصادفی**

ت) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای برتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو و تاسش زوج

بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟ **تصادفی**

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟ **خیر**

ب) به نظر شما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

در این کتاب، اشپای مورد بحث را با شماره گذاری متمایز می کنیم.
{ خودکار ۱، خودکار ۲، خودکار ۳، خودکار ۴، خودکار ۵، مداد ۱، مداد ۲، مداد ۳ }



فضای نمونه

در برتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت. مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

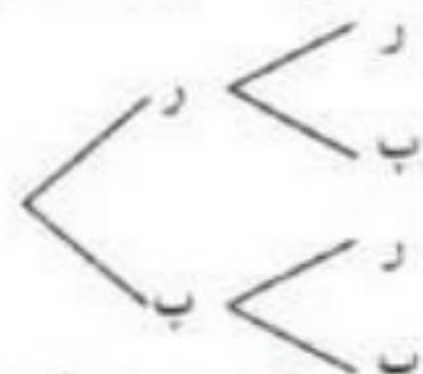


بنابراین، در برتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.
۱. برتاب دو سکه باهم.

برتاب سکه دوم برتاب سکه اول



$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

۲. برتاب سه سکه باهم (برتاب یک سکه سه بار).

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, پ, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ), (پ, پ, ر), (پ, پ, پ)\}$$

۳. برتاب یک تاس و یک سکه باهم.

$$S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\}$$

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه برتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$S = \{(۳۴۵), (۴۳۵), (۴۳۴), (۴۳۳), (۳۴۴), (۳۴۳)\}$$

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

۳. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = 165$$

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$: یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است: $\emptyset \subseteq A$.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad B = \{7\}$$

این مثال باید بعد از ترمین پیشامد بیان شود.

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ پس یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیر ممکن (نشدنی)، همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $\{ر, ب\} = S$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

$$\{\emptyset, \{ر\}, \{ب\}, \{ر, ب\}\}$$

۲. مریم، ملیکا و سوگند بول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هر کسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.

$$S = \{\text{سوگند و ملیکا و مریم}, \text{سوگند و ملیکا}, \text{سوگند و مریم}, \text{ملیکا و مریم}, \text{سوگند}, \text{ملیکا}, \text{مریم}, \emptyset\}$$

۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشتن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{3, 2, 5\}$$

الف)

$$B = \{2\}$$

ب)

۱۵

$$\{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{ملیکا و مریم}\}, \{\text{سوگند و مریم}\}, \{\text{سوگند}\}, \{\text{ملیکا}\}, \{\text{مریم}\}, \{\text{سوگند و ملیکا و مریم}\}, \{\emptyset\}$$



همه پیشامدها، گمان یک برآمد ۲ برابر.

$$C = \{2, 4, 6\}$$

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

مثلاً پیشامد $E = \{3, 4, 6\}$ رخ نداده است. زیرا $2 \notin E$

$$\{(1,1), (1,2), (2,3), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

{}

۴ اعضای S

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$$

۵. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. فرار

است یک گروه پیشناز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش آموز پیشناز از سه پایه مختلف باشند.

دوازدهم یازدهم دهم

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشناز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

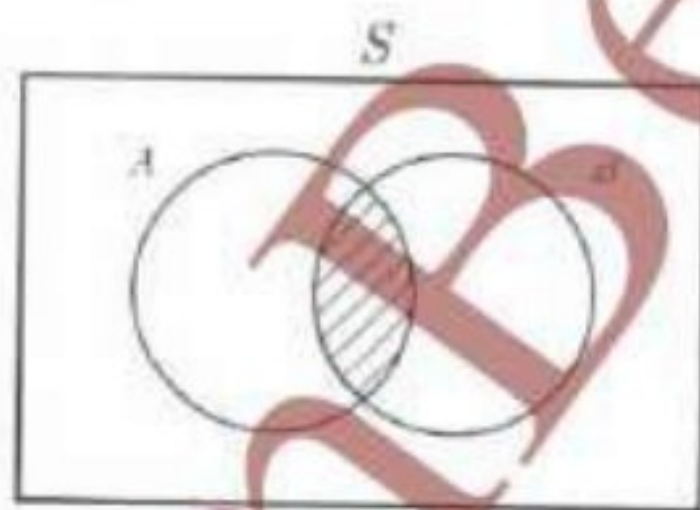
$$n(B) = \binom{6}{2} \binom{9}{1} + \binom{6}{3} \binom{9}{0}$$

$$= 15 \times 9 + 20 \times 1 = 135 + 20 = 155$$

اعمال روی پیشامدها

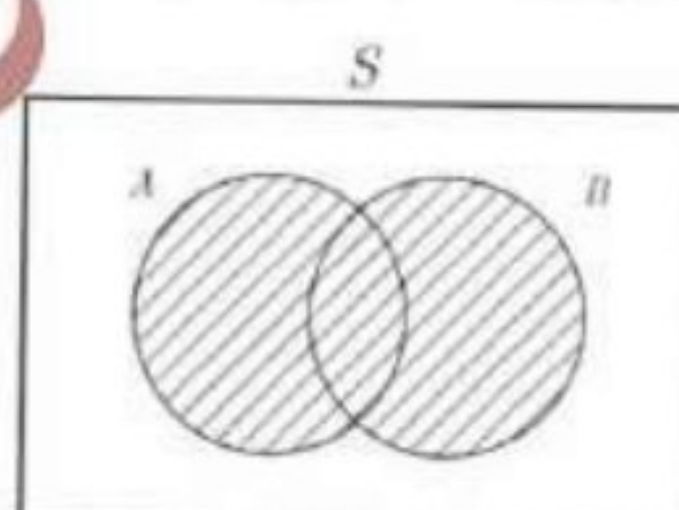
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعه A را به صورت

زیر یادآوری می کنیم.



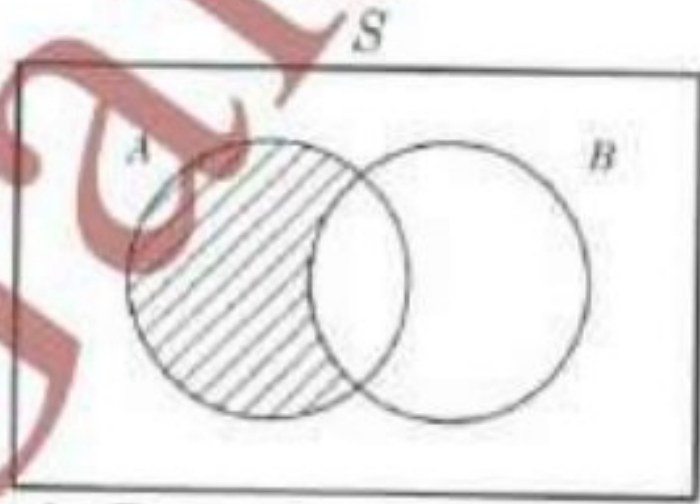
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(شکل ۱)



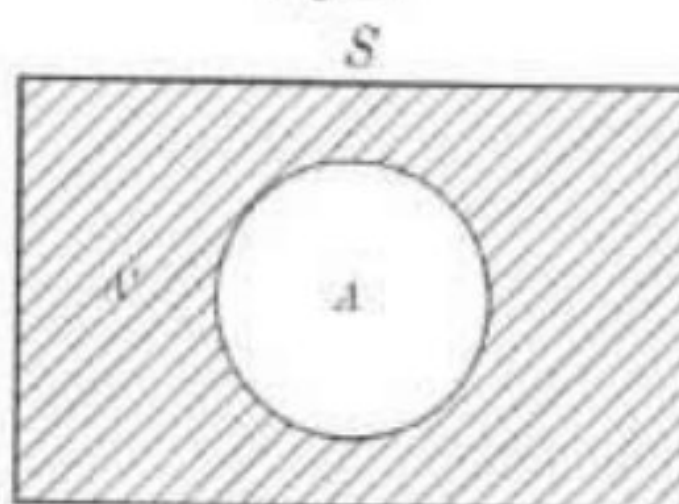
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(شکل ۲)



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(شکل ۳)



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

(شکل ۴)

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند :

الف) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را برتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد

$A = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)\}$ یکی از تاس‌ها ۵ باشد

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A \cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A \cap B = \{(1,5), (5,1)\}$$

ب) پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را برتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ دو تاس یکسان

$B = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$ مجموع ۴ باشد

پیشامد مورد نظر برابر با $A \cup B$ است.

$$A \cup B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,3), (3,1)\}$$

ب) پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

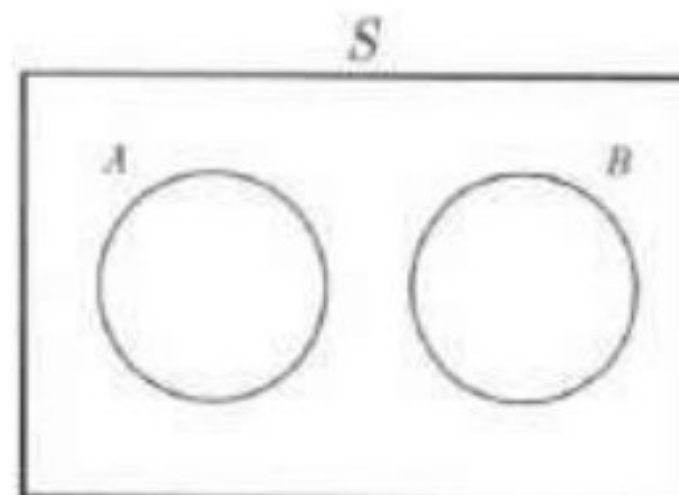
ت) پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم و همواره داریم :

$$A \cup A' = S, A \cap A' = \emptyset$$

مثال : هرگاه A و B دو پیشامد ناهمی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ ، در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

حل : چون $A - B = A$ و $B - A = B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای ناهمی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A \cap B = \emptyset$.



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

برای مثال، در برنامه یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

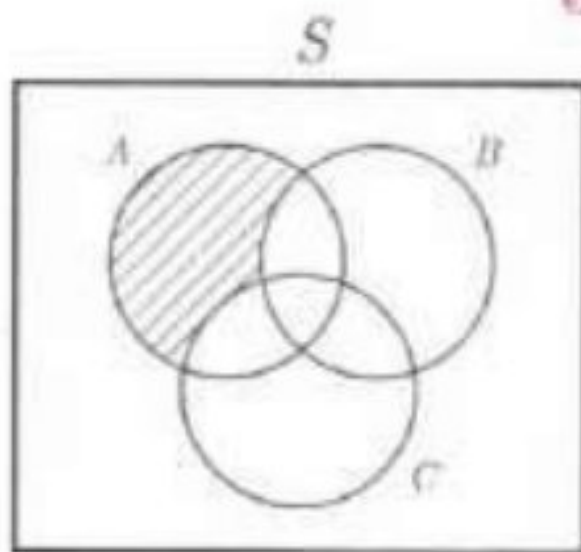
$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{2, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

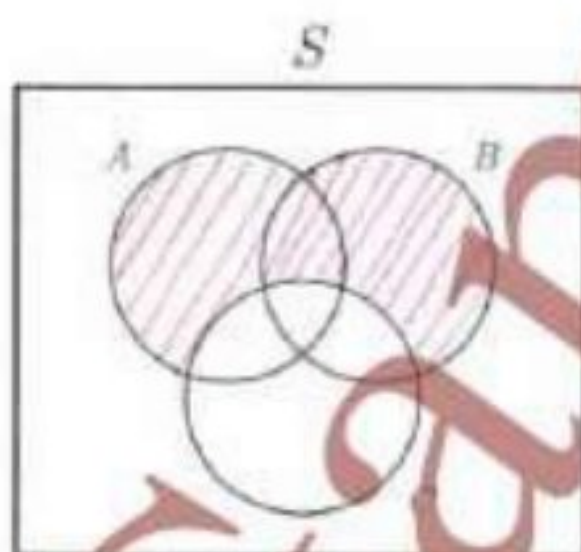
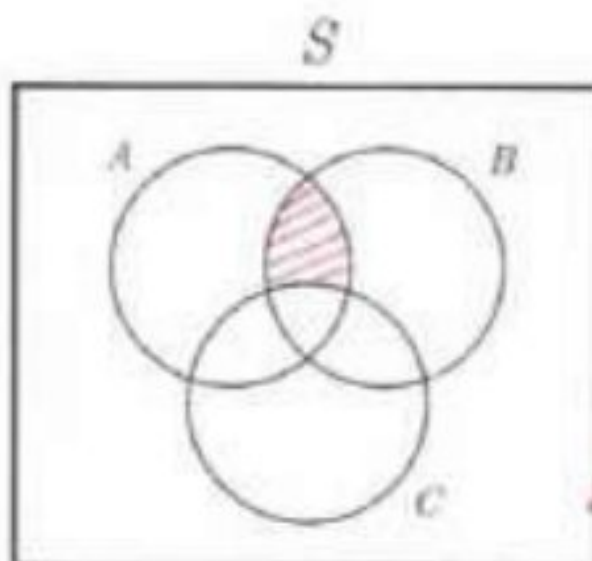
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{4, 6\}$$

$$B - A = \{3, 5\}$$



$A - (B \cup C)$



۱. تاسی را برناب می‌کنید؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

- پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

- پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

- پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

- پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

- پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

$$B' = S - B = \{1, 4, 6\}$$

۲. فرض کنید A و B و C پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

- فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.

- پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

- پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

$$S = \{(\text{د}, \text{د}, \text{د}), (\text{د}, \text{د}, \text{ب}), (\text{د}, \text{ب}, \text{د}), (\text{د}, \text{ب}, \text{ب}), (\text{ب}, \text{د}, \text{د}), (\text{ب}, \text{د}, \text{ب}), (\text{ب}, \text{ب}, \text{د}), (\text{ب}, \text{ب}, \text{ب})\}$$

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

$$A = \{(\text{د}, \text{د}, \text{د}), (\text{ب}, \text{ب}, \text{ب})\}$$

$$B = \{(\text{د}, \text{ب}, \text{ب}), (\text{ب}, \text{د}, \text{ب}), (\text{ب}, \text{ب}, \text{د})\}$$

$$C = \{(د > د), (د > پ), (د > س), (پ > د), (پ > پ), (پ > س), (س > د), (س > پ), (س > س)\}$$

چرا پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سوالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟ **بله**

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟ **بله**

آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟ **خیر**

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید. در پرانتز **تاس** و **تاس** پیشامدها **آوردن عدد فرد و آوردن عدد زوج** ناسازگارند.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه منتهی یک پدیده تصادفی باشد. اگر S ، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

$$P(S) = 1$$

۳. هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

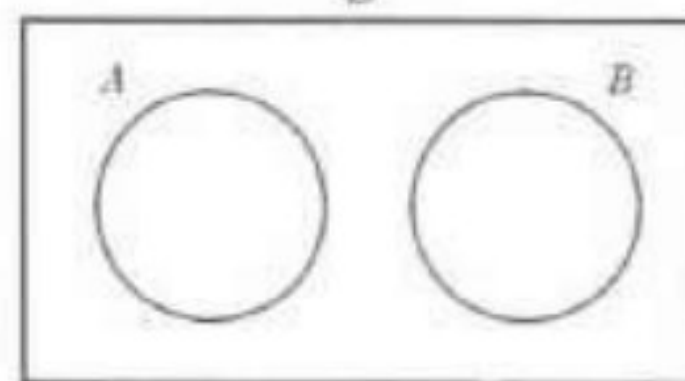
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

کار در کلاس



۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) تاس زوج بیاید.

می‌دانیم فضای نمونه این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛ بنابراین $n(S) = 12$.

$$S = \{(1, r), (2, r), \dots, (6, r), (1, p), (2, p), \dots, (6, p)\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با:

$$A = \{(2, r), (4, r), (6, r), (2, p), (4, p), (6, p)\}; n(A) = 6$$

بنابراین، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(1, p), (2, p), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p)\} \rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{(1, r), (2, r), (3, r), (4, r), (5, r), (6, r), (1, p), (2, p), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p)\}$$



ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

$$D = \{(1, p), (3, p), (5, p)\} \rightarrow P(D) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبه $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت بر می‌شوند.

$$n(s) = 12^5 \rightarrow \begin{matrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ \text{فروردین} & \text{فروردین} & \text{فروردین} & \text{فروردین} & \text{فروردین} \end{matrix}$$



برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A، به طوری که همه آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه $n(A)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

تعداد انتخاب ها $\rightarrow \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \rightarrow n(A) = 1$

در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

(ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند. $P(B) = \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \frac{1}{12^5} + \dots + \frac{1}{12^5} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$

(ب) تولد هیچ دو نای آنها در یک ماه نباشد.

$$P(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{55}{12^4}$$

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می دهیم. سپس با برتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می شود.

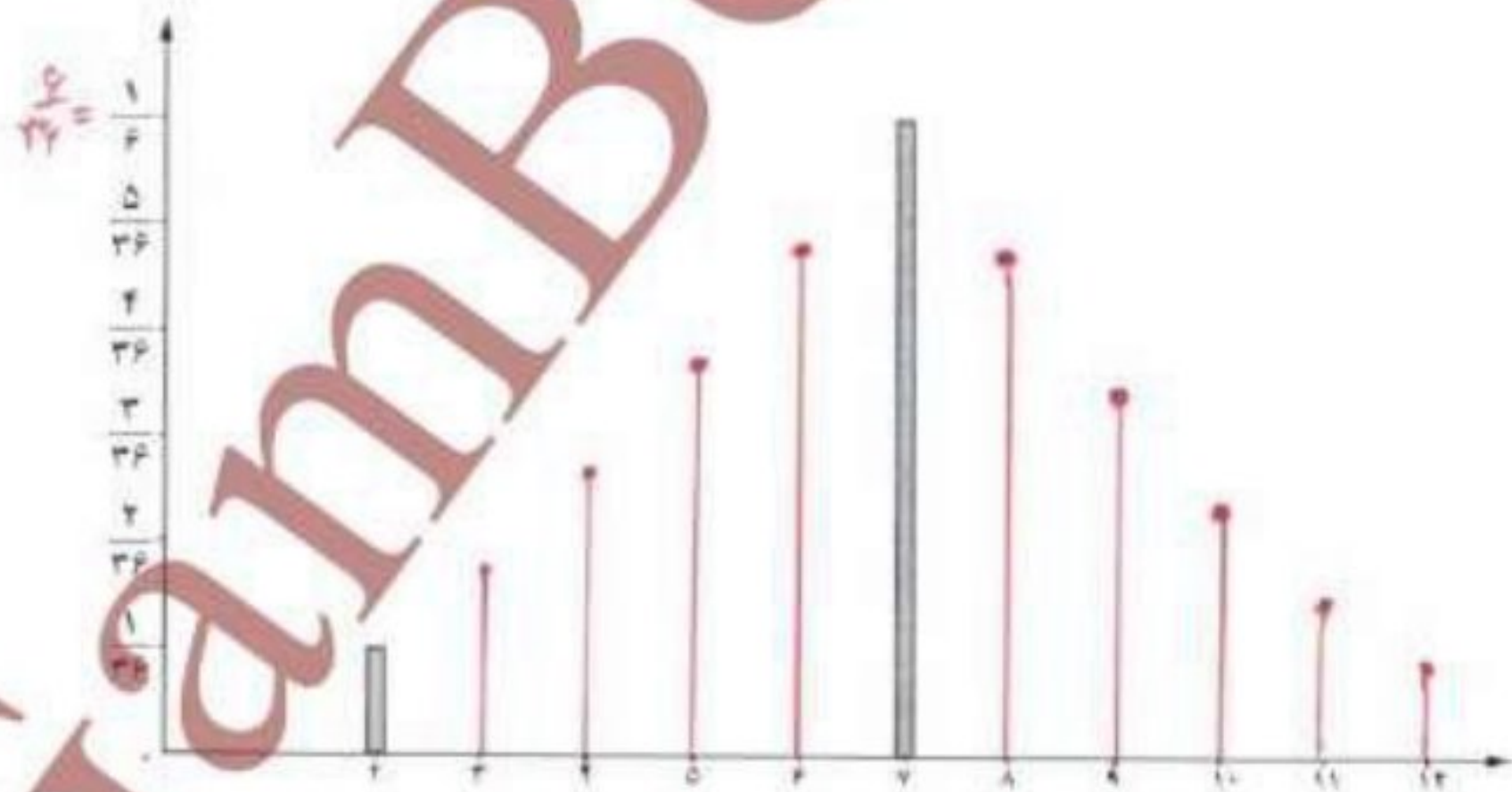
$$n(S) = 36$$

الف) احتمال برنده شدن چه شماره ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

(ب) احتمال برنده شدن کدام شماره ها از همه کمتر است؟

(ب) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



نمودار میله ای مجموع ۵

$$E = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$P(E) = \frac{4}{36}$$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالتها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
احتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

فعالیت

- در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه:
 - الف) احتمال این را بیاید که شیء انتخابی مداد باشد؛ $P(A) = \frac{3}{8}$
 - ب) احتمال این را بیاید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ $P(B) = \frac{5}{8}$
 - پ) احتمال این را بیاید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A') = \frac{5}{8}$
 ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

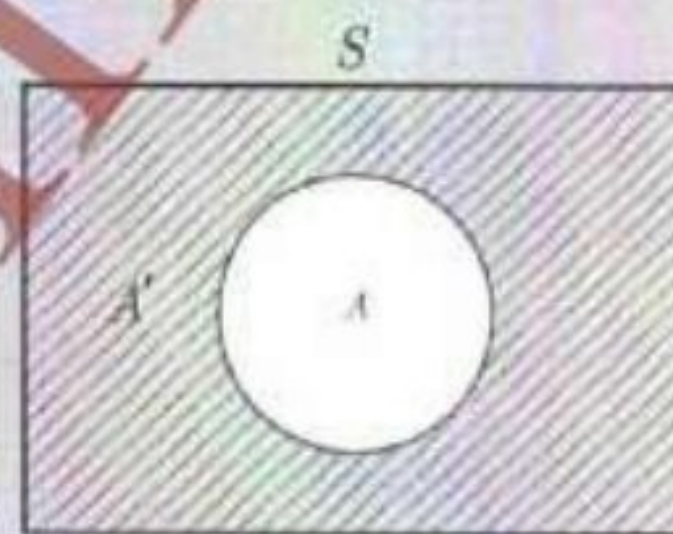
مداد بیارد = خودکار نیارد

$$P(B) = P(A')$$



$$P(A) + P(A') = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A و A' را دو پشامد متعم می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نیاند. $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

۲. احتمال اینکه کبارش فردا به مدرسه نرود برابر با $\frac{99}{100}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کبارش به مدرسه برود. $1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

$$1 - \frac{32}{49} = \frac{49 - 32}{49} = \frac{17}{49}$$

مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی بیراهن ورزشی شامل ۴ بیراهن قرمز، ۴ بیراهن آبی و ۲ بیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ بیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

(الف) احتمال این را که ۳ بیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

(ب) احتمال این را که رنگ ۳ بیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

(پ) احتمال این را که حداقل ۲ بیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

(ت) احتمال این را که حداکثر ۲ بیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

(ث) احتمال این را که رنگ ۳ بیراهن آبی نباشند، محاسبه کنید.

(ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: (الف) چون فرار است ۳ بیراهن از بین ۱۰ بیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

چنانچه هر سه بیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند؛ بنابراین، اگر A بشامد هر سه قرمز و B بشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که A و B ناسازگارند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{120} + \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

(ب) برای اینکه رنگ سه بیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک بیراهن قرمز، یک بیراهن آبی و یک بیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم:

$$n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32 \quad ; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

ب) برای اینکه حداقل ۲ بیراهن قرمز باشند، آن گاه ۲ بیراهن قرمز یا ۳ بیراهن قرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت:

$$n(D) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40 \quad ; \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو بیراهن آبی باشند، باید دو بیراهن آبی یا یک بیراهن آبی و یا صفر بیراهن آبی داشته باشیم:

$$n(E) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 116$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ بیراهن آبی باشد، آن گاه $P(F^c) = 1 - P(F)$ احتمال این است که ۳ بیراهن آبی نباشند؛ بنابراین:

$$P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان است. یعنی می‌توان راه‌حل قسمت «ت» را برای قسمت «ث» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ بیراهن به دنبال تعداد بیراهن‌های آبی باشیم، پیشامدهای ممکن روی فضای نمونه به صورت زیر است.



$$P(A \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = P(S) = 1$$

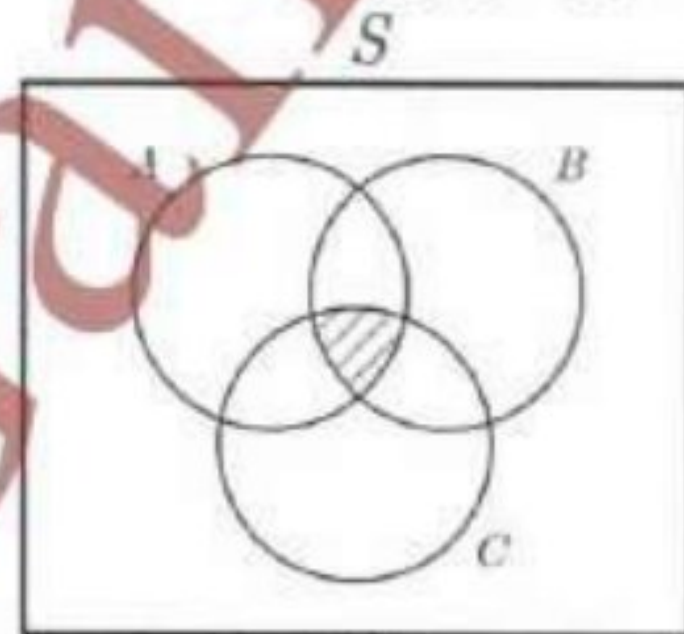
تمرین

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
 الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود. **تصادفی**
 ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود. **قطعی**
 پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم. **تصادفی**
 ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.
 - عددی را انتخاب می‌کند.
 - سه واحد به آن عدد می‌افزاید.
 - سپس حاصل را دو برابر می‌کند.
 - از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.
 - نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.
 - از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.
 - در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

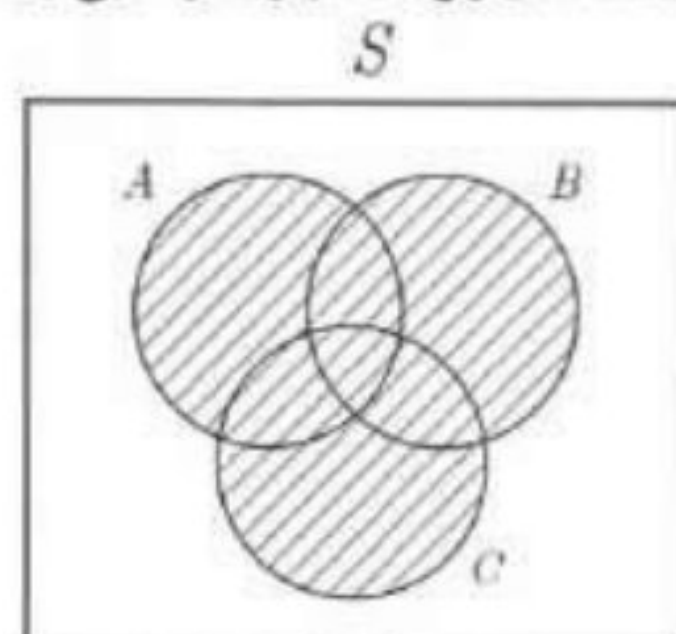
پنجشنبه چهارم ۲۰۱۳

قطعی

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گانه‌تاس را می‌زنیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.
 الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.
۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:
 الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی
 ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.
 ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.
۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

۵. در هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.
 ۶. خانوادای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

- ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. ب) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.
 ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.
 ۷. خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

ب) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.

ب) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشند.

۹. عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

ب) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.



۱۰. ۷ برج مختلف را به هفت میله برج نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این برج ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله برج ها با شماره های غیر اول در مکان های زویر باشند.

۱۱. از ده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۲ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک بازی جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رها می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای ممتنع داده‌اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

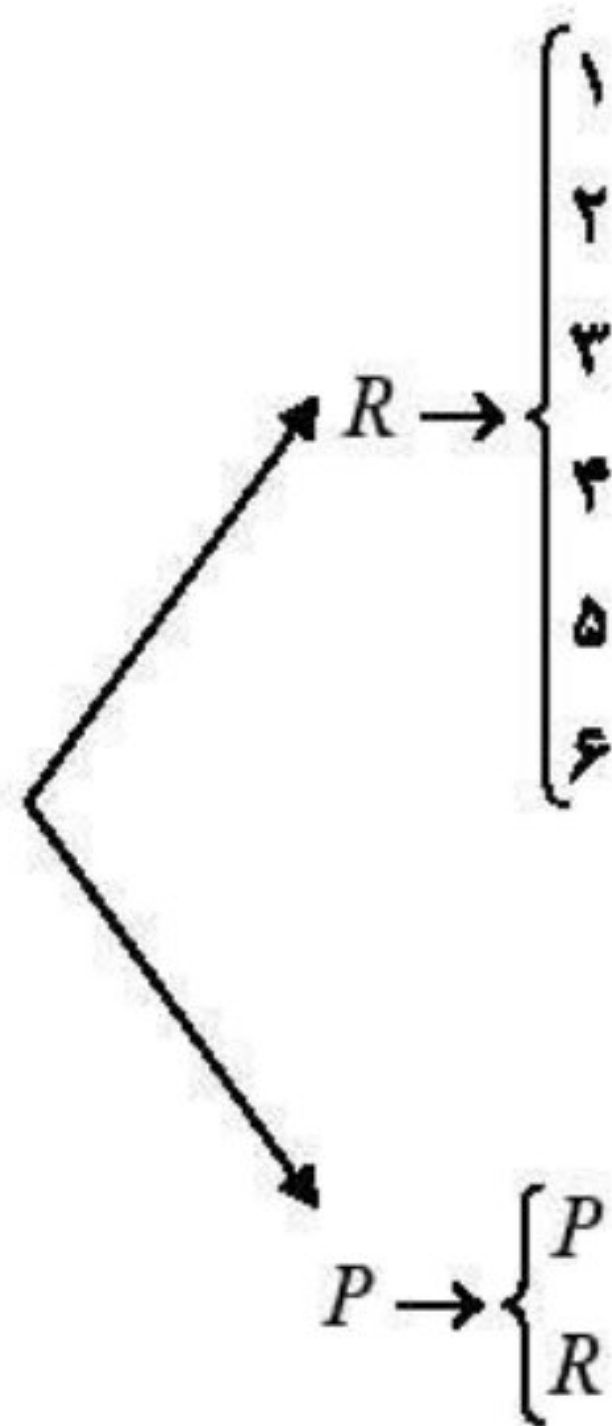
در یک مسابقه، سه درجه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان یک درجه به طور تصادفی باز می‌شود و تویی از آن به طرف شرکت‌کننده برتاب می‌شود. اگر این فرد نتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می‌شود.

به نظر شما، احتمال برتاب توپ از هر درجه چقدر است؟ اگر یک درجه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شماره درجه غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال برتاب توپ از هر درجه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟



حل تمرینهای صفحه‌ی ۲۵

تمرین ۲:



$$S = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (P, P), (P, R)\}$$

(الف)

(ب)

$$A = \{(R, 2), (R, 4), (R, 6), (P, P), (P, R)\}$$

تمرین ۳:

(الف)

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

(ب)

$$A = \{3, 9, 15\}$$

(پ)

$$B = \{1, 9\}$$

(ت)

$$A \cap B = \{9\} \text{ و } A - B = \{3, 15\}$$

تمرین ۴:

الف: هر سه پیشامد C و B و A با هم رخ دهند.

ب: حداقل یکی از سه پیشامد C یا B یا A رخ دهند.

تمرین ۵:

(الف)

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

$$A = \{12, 24, 42\}$$

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

تمرین ۶:

(الف)

$$S = \{PPP, PPR, PRP, RPP, PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

$$A = \{PPP, RRR\}$$

$$B = \{PPR, PRP, RPP\}$$

$$C = \{PPP, PPR, PRP, RPP\}$$

$$D = \{PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

تمرین ۷:عضو $2^4 = 16$ (الف)

$$\text{ب) } A = \{PPRR, PRRR, RPPR, RRRR\}$$

$$\text{پ) } C = \{PPRR, RPPR, RRRP, RRRR\}$$

(ت) خیر ناسازگار نیستند.

تمرین ۸:

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{0}}{\binom{17}{3}} = \frac{220 \times 1}{680} = \frac{11}{34} \quad \text{ب) } P(B) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{33}{68}$$

$$\text{پ) } P(C) = \frac{\binom{12}{3} \times \binom{5}{0} + \binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{11}{34} + \frac{33}{68} = \frac{55}{68}$$

تمرین ۹:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

$$C = \{3, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(الف)

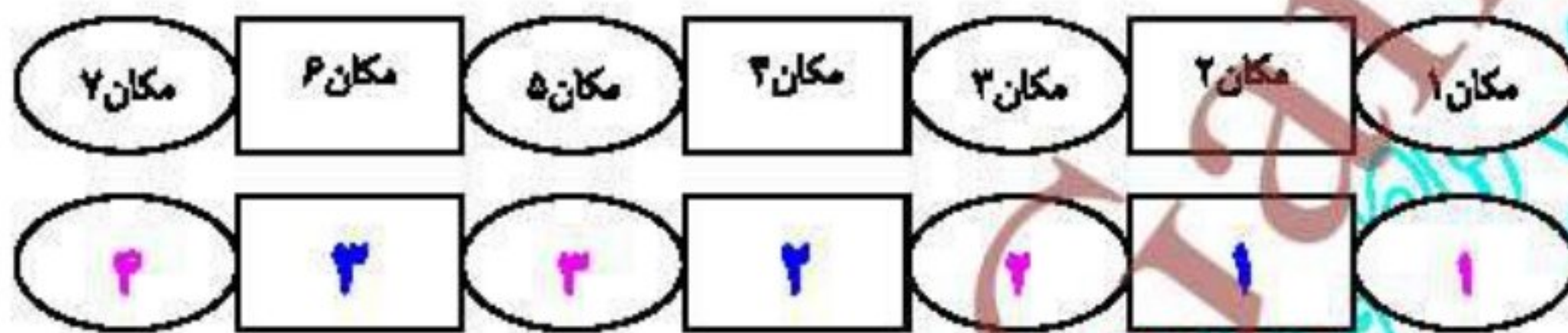
(ب)

(ج)

تمرین ۱۰:

۶ و ۴ و ۱ پرچم های غیر اول

۷ و ۵ و ۳ و ۲ پرچم های اول

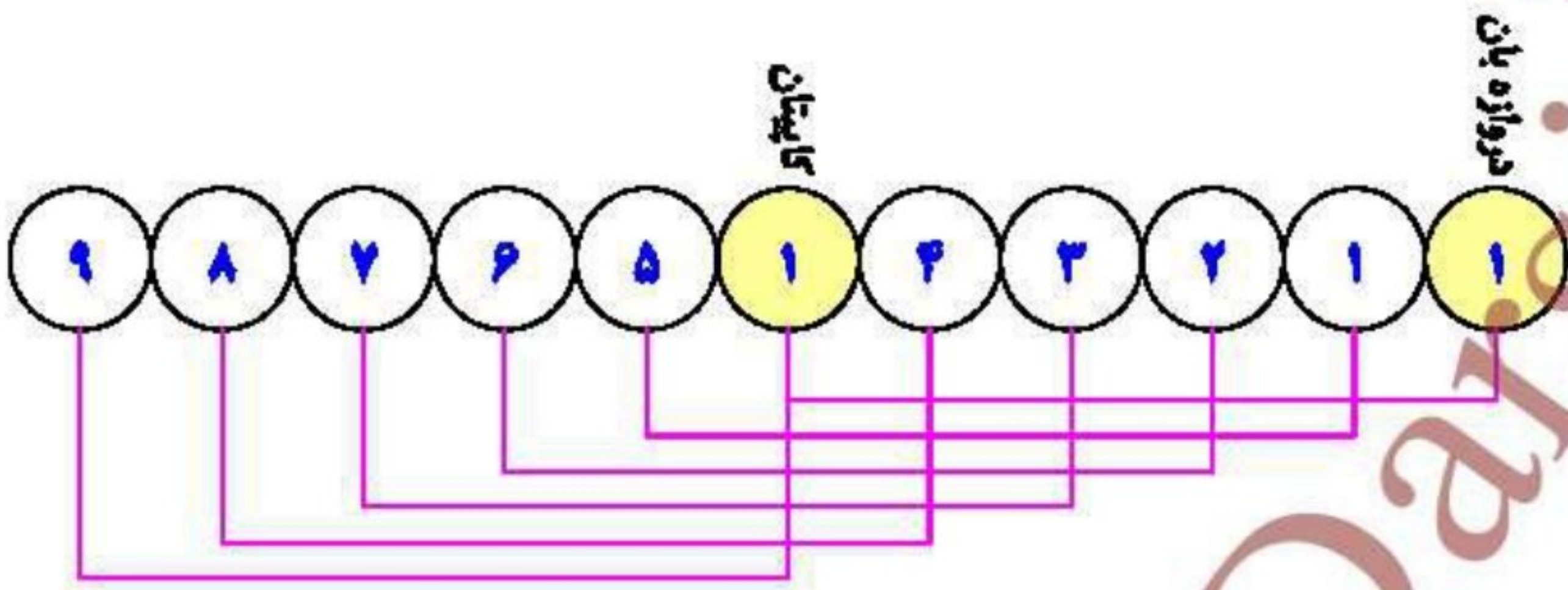


تعداد حالت های مساعد $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3! = 144$

تعداد کل حالت ها $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$

$$P(E) = \frac{144}{5040} = \frac{1}{35}$$

تمرین ۱۱:



تعداد حالت های مساعد = $9! \times 6 \times 2$

تعداد کل حالت ها = $11!$

$$P(E) = \frac{9! \times 6 \times 2}{11!} = \frac{9! \times 6 \times 2}{11 \times 10 \times 9!} = \frac{6}{55}$$

تمرین ۱۲:

$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{15}{5} + \binom{5}{1} \times \binom{15}{6} + \binom{5}{0} \times \binom{15}{7}}{\binom{20}{7}} =$$

تمرین ۱۳:

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{5}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \times 5 + 10 \times 1}{120} = \frac{50 + 10}{120} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$



دنیای امروز بر از اطلاعاتی است که ما در بخش های مختلف زندگی با آنها روبه رو می شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم. محدودیت های تنایب به دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می خواهیم از شکل گیری یک مسئله در محیط زندگی مان تایافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

فعالیت

❓ دانش آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن های هوشمند اختصاص می دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش آموزان به تلفن های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش آموزان از تلفن های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش آموزان پایه های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت هایی از تلفن های هوشمند خود استفاده می کنند؟»

📌 گروه اجراکننده این پروژه، پرسش نامه ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش آموزان خواستند که این پرسش نامه را تکمیل کنند:

- الف) به طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می کنید؟
 ب) از میان گزینه های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه ها با تلفن هوشمند خود انجام می دهید، علامت بزنید.
- خواندن کتاب الکترونیک شبکه های اجتماعی عکاسی بازی تماس تلفنی
 تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میانه و دامنه میان چارگی گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

جدول زیر نتایج دانش‌آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

پایین درستی کمترین؟

• اگر واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در بررسی اول مشخص نمی‌شود، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟
 ممکن است پایین‌ها گویا شود، شده زیاد اکم و ...

• داده‌ها پس از گردآوری در نرم‌افزار وارد شدند. اشتباه‌های ناشی تا حد ممکن رفع و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. بررسی‌نامه‌هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود) کنار گذاشته شدند.

• ممکن است برخی دانش‌آموزان نخواهند کسی از جزئیات فعالیت‌های آنها با تلفن هوشمند باخبر شود. در طراحی بررسی‌نامه چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌های گردآوری شده را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم؟

• نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷ دقیقه و دامنه میان چارگی آن $(Q_1 = 65, Q_3 = 100)$ دقیقه بود.



• با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟

۲۵ درصد

خواندن کتاب الکترونیک ← کمترین
 شبکه‌های اجتماعی ← بیشترین

• با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌هاست؟

• چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

چون ممکن است دانش‌آموزی چند گزینه را انتخاب کرده باشد.

۱- پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. در داده‌های مرتب شده، میانه داده‌های قبل از چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. دامنه میان چارگی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است که آن را با IQR (Interquartile Range) نمایش می‌دهیم.



دوم، نهم و دوازدهم

باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش آموزان پایه‌های این مدرسه (نه دانش آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از تلفن‌های هوشمند... (نه ابزارهای دیگر) صادق است.

با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟ شبکه‌های اجتماعی

از میانه و دامنه میان چه چیزی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می‌کنید؟
 ۵۰ درصد دانش آموزان بیش از ۷۰ دقیقه از تلفن هوشمند استفاده می‌کنند و ۵۰ درصد دیگر کمتر از ۷۰ دقیقه در روز

مشاوران آموزشی، به کمک دانش آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت‌هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانش آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که ۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانش آموزان را بهبود بخشد؛ ۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های آموزشی جذاب،



محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش آموزان قرار دهند و دانش آموزان در ساعاتی از شبانه‌روز که آمادگی بیشتری دارند، فیلم‌ها را تماشا کنند و پرسش‌هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم‌ها در میان بگذارند؛ ۳) با برگزاری دوره‌های آموزشی و نمایشگاه‌هایی از آثار دانش آموزان، می‌توان علاقه دانش آموزان به عکاسی و در نتیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.

در این نظرسنجی فقط درباره مدت زمانی که دانش آموزان در طول روز با تلفن‌هایشان کار می‌کنند، پرسیدیم اما اگر بخواهیم برنامه‌های داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش آموزان بهتر شود، باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش آموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم.

همان‌طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های: ۱. بیان مسئله، ۲. طرح و برنامه‌ریزی، ۳. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴. تحلیل داده‌ها و ۵. بحث و نتیجه‌گیری است.



۱- هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با آن نتیجه‌گیری می‌کنیم، به اصطلاح می‌گوییم نتایج را تعمیم داده‌ایم.



کار در کلاس

اکنون که چرخه حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونه حل‌شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح درک مسئله	در پی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	بجای برداشته	نتایج برداشته را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در فضای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۴	کنترل داده‌ها	با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	گردآوری داده‌ها	داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

گام‌های چرخه امار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم». همان‌طور که در مثال «استفاده از تلفن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با رویش بر سدن ابعاد مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازمینی می‌شود. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.



مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش‌های بهلوانی و...) یا توانایی‌ها و ناتوانی‌های

جسادی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی‌توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

همین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میامی بصران ۱۲ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کربانتا» می‌تواند به عنوان یک مسئله مطرح شود. چند مثال دیگر بزنید.

بحث و گفت‌وگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه آماری مورد بررسی تاثیر بگذارد؟ چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کنند؟ گروه اجرا کننده این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (اعددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دمای اسان است؛ زیرا با ابزارهایی آشنا می‌توانیم توصیف‌هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمیتی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه‌گیری همیشه این قدر هم آسان نیست. فرض کنید در مطالعه‌ای می‌خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه‌گیری کنیم. چه پرسش‌هایی می‌تواند برای اندازه‌گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه‌گیری دارای‌ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد، وستان و... لزوماً مشخص می‌کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسش‌نامه‌ها را طوری طراحی می‌کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه‌گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.



تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم. هرچه بزرگ‌تر متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

کار در کلاس

۱. در هر قسمت، برای بررسی کدام یک از موارد به اندازه نمونه بزرگتری نیاز است؟ توضیح دهید.

الف) کلاس دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید. *نمونه کوچک*
 ب) معادل سال گذشته دانش آموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید. *نمونه بزرگ*

هرچه بزرگتری نمونه مورد بررسی بیشتر باشد، باید نمونه بزرگتری انتخاب شود.

ب) بررسی متوسط حقوق معلمان یک مدرسه دولتی *نمونه کوچک*

ب) بررسی متوسط حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی *نمونه بزرگ*

۲. علی و امید در یک پروژه دانش آموزی می خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ ابادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت هایی مشغول اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می کنند.»

علی پیشنهاد می کند: «برای نمونه گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند.»

امید پیشنهاد می کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه گیری فهرستی از دانش آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ ابادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش آموز بپرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت هایی انجام می دهد و به صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت ها مشغول است.»



موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهاد های امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغشان را در خانه می گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیشنهاد علی*

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند. *اشکال پیشنهاد امید*



پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند، میانگین داده های به دست آمده (اماره نمونه) بزرگتر از میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) می شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی روند، در نظر گرفته نشدند. *اشکال پیشنهاد علی*

دو اشکال دیگر را که به نمونه گیری علی وارد است، مطرح کنید. *عدم طبقه بندی، عدم ثبت / عدم توجه به روزها حضور نوجوانان در مکان مختلف*

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

الف) انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه ها

ب) انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه ها.

گام ۳ (گردآوری و پاک سازی داده ها)



در مورد رقم اول چون ممکن است رقم اول متباین باشد یا گند ولی در مورد رقم دوم و سوم چون متباین است، استفاده کرد.

در سوال مهم است.

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه گیری، گردآوری یا ثبت داده ها و با وارد کردن داده ها در نرم افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده ها می توان برخی از این اشتباه ها را تصحیح کرد.

کار در کلاس

جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک پروژه دانش‌آموزی بیش از برطرف کردن اشتباهات است.

چون برخی نرم‌افزارها نمی‌توانند داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کد تعیین می‌کنیم؛ مثلاً در این داده‌ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و تنیس به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است.

در این داده‌ها هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است.

نمره ادبیات	متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	شماره دانش‌آموز
۱۵	۲	۱	۱	۱۴	۱
۱۴	۱	۱	۲	۱۵	۲
۱۵	۳	۲	۱	۱۴	۳
+	۵	۲۲	۱	۱۵	۴
۱۷	۲	۲	۲	۵۱	۵
۱۸	۶	۳	۲	۱۴	۶
	۱۹	۷	۳	۱۵	۷
۱۷	۴	۴	۲	۱۴	۸
۱۵	۳	۳	۱	۱۴	۹
۱۰	-	۲	۱	۱۴	۱۰
۱۲	۱	۲	۱	۱۴	۱۱
۱۴	۴	۱	۲	۱۴	۱۲
۲۰	۷	۲	۱	۱۵	۱۳
۱۸	۵	۱	۲	۱۳	۱۴

با توجه به جدول داده‌ها

الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم‌افزار، این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟
 دانش‌آموز ۵۱ سالم وجود ندارد. ردیف ۵

ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش‌آموز چیست؛ نمره ادبیات او چند است. ردیف ۷ / کد ۳ بسکتبال / ۱۹

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟ ۲۲ ردیف ۴
 ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی، حذف یا اصلاح کنیم؟ ۳۴ / بله

ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟ دانش‌آموز ردیف ۴ نمره ۲۰ + به صورت کلمه

بحث و گفت و گو

- اگر دانش موزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد چه باید کرد؟ اگر بخواهیم نمره‌ای برای او در نظر بگیریم، این کار را چگونه انجام دهیم؟ در این باره چه پیشنهادی دارید؟
ایا با بررسی تمامی موارد ممکن می‌توانیم مطمئن باشیم که داده‌ها کاملا درست ثبت شده‌اند؟ چرا؟

گام ۴ (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.
یادآوری: همان‌طور که می‌دانید، برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند. به یاد دارید که اگر داده دور افتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود. چرا؟

معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود. چرا؟

کار در کلاس

با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	داده‌ها	معیارهای گرایش به مرکز		معیارهای پراکندگی	
		میانه	میانگین	IQR	SD (s)
سن (سال)	۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹	۱۶,۸۳	۱۷	۲,۵	۱,۴۱
میزان تماشاگر تلویزیون	۴ ۲۱ ۴ ۶ ۷ ۶/۵ ۷ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵	۹,۷۱	۹,۲۵	۳	۸,۹۴

راهنمای جدول: میزان تماشاگر تلویزیون: متوسط ساعت‌های تماشاگر تلویزیون در هفته: IQR: دامنه میان‌چارکی: SD: انحراف معیار.

با توجه به جدول بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.
 $Q_3 = 19$ $Q_2 = 17$ $Q_1 = 15,5$ $min = 15$ $max = 19$
 $Q_3 = 30$ $Q_2 = 9,25$ $Q_1 = 4,5$ $min = 4$ $max = 30$

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

میانگین / انحراف معیار زیرا داده دور افتاده وجود ندارد.

IQR: Interquartile Range

SD: Standard Deviation



ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟
 میان / دامنه / میان چارگی
 و نمود داده را در آیه
 (ب) انحراف کدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟
 ۲۹ و ۳۰ توان دادیم اصلاً ف از میانگین زیاد می‌شود.
 (ت) اگر برای توصیف داده‌های متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می‌شد، خوانندگان که به داده‌های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می‌شدند؟
 میانگین غیر واقعی در اختیار دارند. واقعیت کمتر از آنچه دوست می‌آید.
 بهتر است میانگین محاسبه گردد.

در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطای آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ت) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، کدام یک از نمودارهای زیر نشان‌دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟
 نمودار الف یا ب؟



اگر داده‌های دور افتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتدا، خط میانی و انتها) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟
 جعبه‌ای

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دور افتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است؟
 جعبه‌ای زیرا اگر داده‌ها پراکنده نباشند، قدری متقارن می‌شود. میانگین و میانه هم نزدیک هم می‌مانند.

کار در کلاس

دو شرکت بزرگ پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول تقریباً ۱۴ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

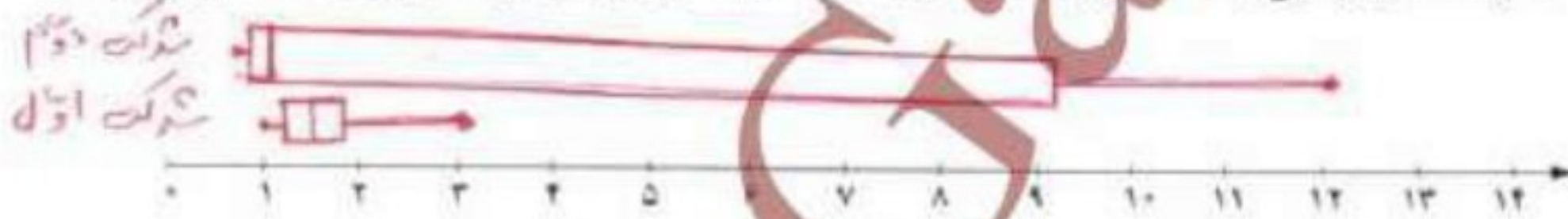
اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»
مریم می‌گوید: «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکنندگی چه فایده‌ای دارد؟»
انها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

	حقوق کارمندان									
	۱	۱.۵	۱.۲	۱.۷	۱.۴	۱.۸	۳	۱.۱	۱.۸	
شرکت اول										
شرکت دوم	۰.۷	۱	۸	۱۲.۱	۰.۸	۱.۶	۱.۱	۰.۹	۰.۸	

Min=۰.۷
Q₁=۰.۸
Q₂=۱
Q₃=۱.۱
Max=۱.۱

Min=۱
Q₁=۱.۱
Q₂=۱.۵
Q₃=۱.۸
Max=۳

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است. *درست*
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. *درست*
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است. *نادرست*

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰٪ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟ *هر دو مقدار در ۱۵ دانشگاه برتر کشور*
شده مشخصی نیست، زیرا انتخاب مدرسه را بر اساس اطلاعات کمی نیست.
ب) افزایش ۲۰٪ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

در مورد ۲۰٪ افزایش، اگر ۱۰۰ نفر در مدرسه اول و ۱۰۰ نفر در مدرسه دوم باشند، در مدرسه اول ۲۰ نفر افزایش یافته و در مدرسه دوم ۲۰ نفر افزایش یافته است.



فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبلاً ۶ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟

به نظر ما، باید در نظر بگیریم که...

ت در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می‌تواند همراه کننده باشد؟

بدین ۲۰٪ (۸۴ نفر) برابر ۱۰۰ درصد (۴۲۰ نفر) است.

برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری)

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه‌ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه‌گیری، داده‌ها را با روش‌های مناسبی تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (\text{از جامعه‌ای با اندازه } N \text{ به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه } n \text{ داشته باشیم؟})$$

یکپارچگی چرخه امار در حل مسائل

همان‌طور که دیدید، در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با امار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر امارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام گام‌ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم. کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه امار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می‌توانیم جرایب گزارش میانگین یا میانه و با گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.



کار در کلاس



۱. برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان‌شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکان در قسمت کم‌عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟ این آگاهی کمک می‌کند یا نه؟
 ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، درباره فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدهند؟

ب) چگونه مشورت با افراد بومی درباره اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم‌عمق

و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟
 دریا و اطلاعات افراد بومی در مورد سن آنها و تعیین میانگین سنی

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام است و بر کدام کام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند. *مطلوب بود نتیجه نهایی*

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است. *غیر واقعی بودن معیارها می‌شود نتایج داده‌ها*

ب) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند. *معیارهای غیر واقعی است*



ت) در پژوهشی با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا»، مجربان پروژه جلساتی را با حضور کارشناسان برگزار می‌کنند و پس از تصمیم‌گیری درباره طراحی و برنامه‌ریزی پروژه، برای گردآوری داده‌ها چند نفر را استخدام می‌کنند. امارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل‌گیری مسئله و اهداف این پژوهش، برای بر کردن پرسش‌نامه‌ها به منازل مختلف مراجعه می‌کنند. هنگام وارد کردن داده‌ها در

نرم‌افزار، مشاهده می‌شود که در چندین پرسش‌نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته‌اند: «قوت شده است». *داده‌های نادرست به دست می‌آید.*

ث) پس از گردآوری و تحلیل داده‌ها به شیوه‌ای که پیش‌تر در گام «طرح و برنامه‌ریزی» به تأیید رسید، بود، نتایج مورد انتظار به دست نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش نتایج انتخاب شده است. *عدم تعریف مناسب مسئله واقعی به نادرست*

ج) نتایج را فقط افراد متخصص امار تفسیر کرده‌اند. *عدم شناخت ویژگی‌های منطقه*



خواندنی

پادشاهی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرده بود تا او را از علوم نجوم و رمل و غیره آموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودکی. روزی پادشاه انگشتری در مشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که بیا بگو در مشت چه دارم؟ پسر گفت: «انچه داری گرد است و زرد است و مجوف (میان تهی) است.» پادشاه گفت: «چون نشان‌های راست دادی، پس حکم کن که آن چه چیزی باشد.» پسر گفت: «باید که غریب (غریب، الک) باشد.» پادشاه گفت: «از قوت تحصیل و دانش این چندین نشان‌های دقیق دادی که عقول در آن حیران شوند اما ندانستی که غریب در مشت نگنجد؟»

برگرفته از قیه ما فیه - مولانا جلال‌الدین محمد

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تاثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

• ۱- پیاده یا با دوچرخه

• ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی

• ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روش می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و اماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان ترم سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می‌شود؟ توضیح دهید.

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تاثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی

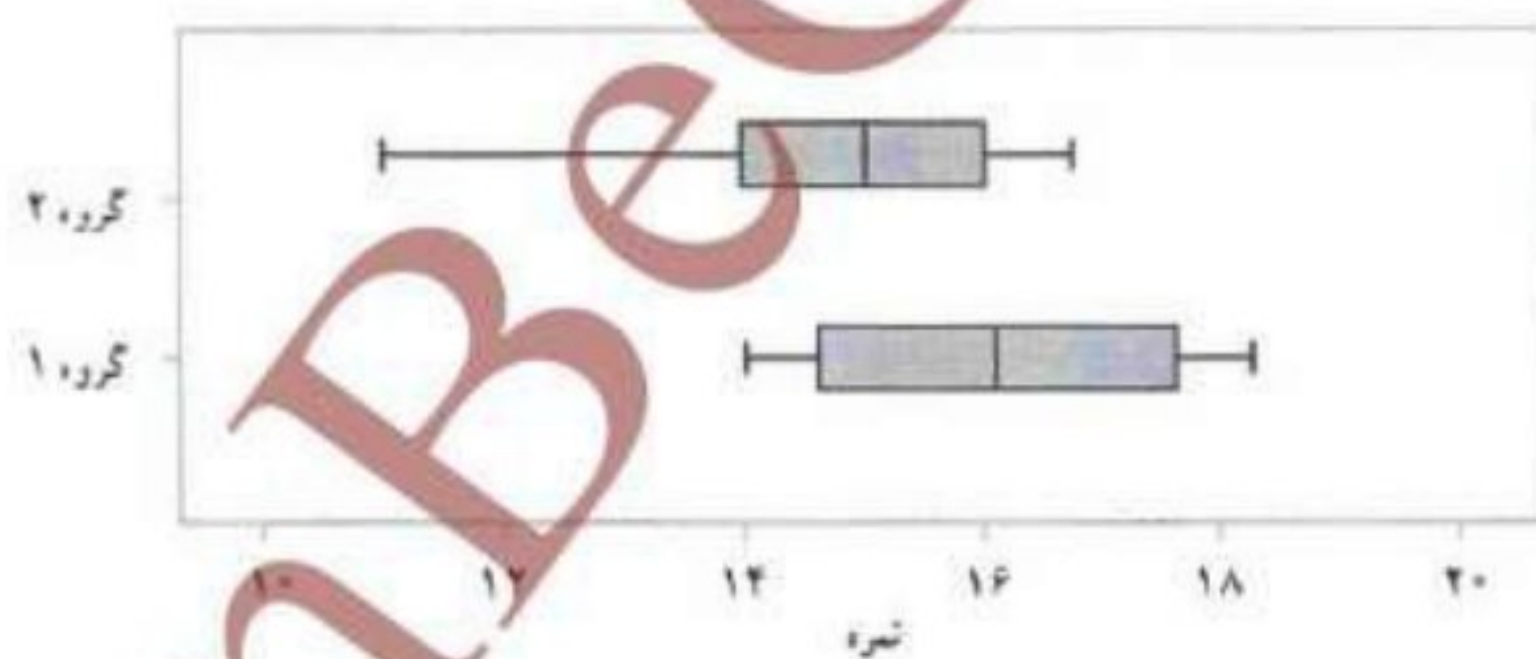
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون
 نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

ب) مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته شده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به‌صورت هم‌زمان هستیم، در واقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تنه خیرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما که می‌تواند منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای آنکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»
 سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.

ب) از مقایسه کمینه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند همراه‌کننده باشند؟

ت) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

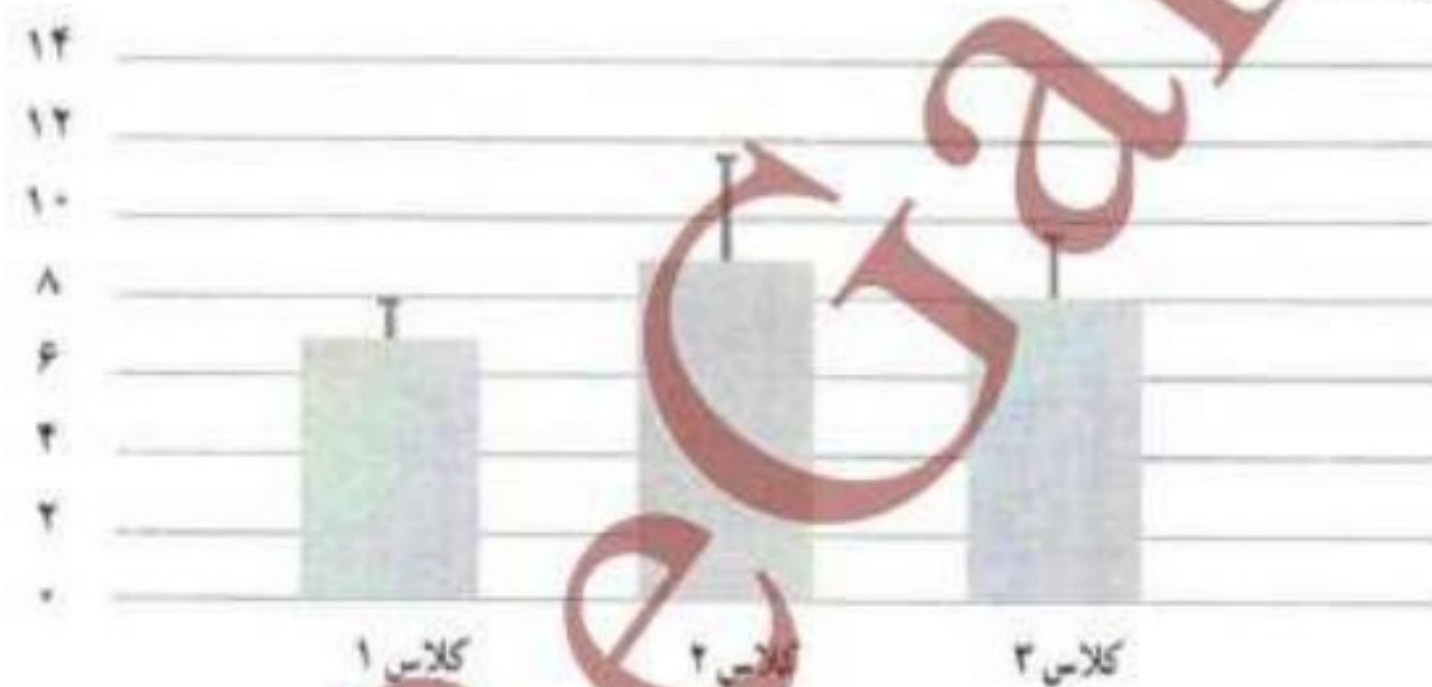
ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۴

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.
ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تاثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و اوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته برحسب ساعت برسی‌دند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خطی نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌پرسیم آیا آن‌ها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

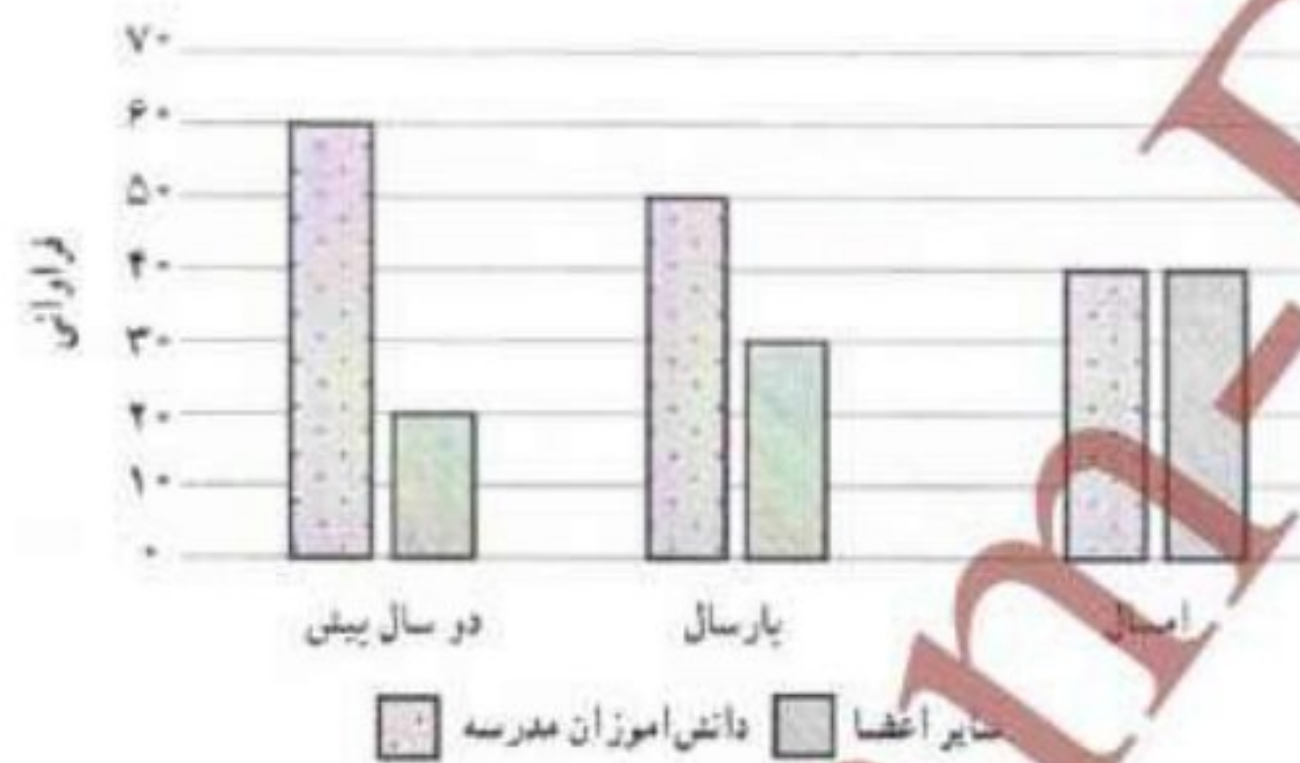
ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.
پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

ت) چه عواملی می‌تواند بر نتایج این مطالعه تاثیر بگذارد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید، پاسخ دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

ث) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



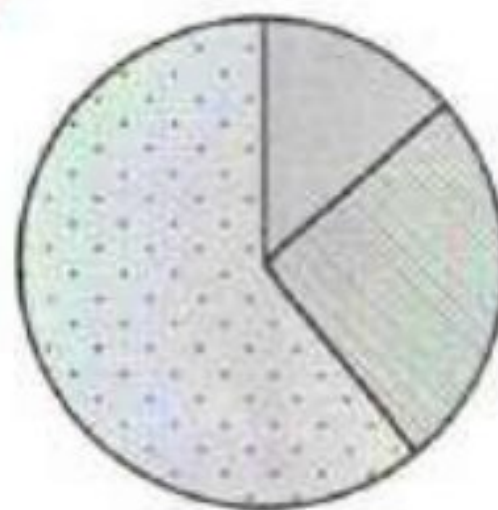
الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) یا استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)



□ ۴۰ تا ۶۰ سال □ ۲۰ تا ۴۰ سال □ کمتر از ۲۰ سال

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۲۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشند؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازتنسنگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.

۹. جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

(کیلومتر در ساعت) سرعت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۴۲۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.» نتیجه‌گیری بالا چه انسکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از نگاه‌های چرخه امار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعات روزانه حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی درباره تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی درباره کلاس درسی که می‌توانید برشش‌های خود را ازادانه در آن مطرح کنید.
- نظرسنجی درباره ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعت‌های مطالعه ازاد دانش‌آموزان و مقایسه آن بین دو گروه از دانش‌آموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامه مورد علاقه دانش‌آموزان.



حل تمرینهای صفحه‌های ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱:

بررسی وضعیت نمرات درسی دانش آموزان پایه‌ی اول دبستان چند پایه‌ی مختلط شهید احمدی شهرستان
پستان خوزستان در سال تحصیلی ۹۸-۹۷

تمرین ۲:

الف:

جامعه‌ی آماری	دانش آموزان کلاس
نمونه‌ی آماری	دانش آموزان انتخاب شده
اندازه‌ی جامعه	۲۸ نفر
اندازه‌ی نمونه	۹ نفر

ب: پرسش شفاهی (چون تعداد نمونه کم است) / ممکن است در روز جمع آوری اطلاعات مشکلی مثلاً
برای سرویس مدرسه پیش آمده باشد و دانش آموزان پیاده به مدرسه آمده باشند.

پ: شیوه‌ی رفتن به مدرسه / کیفی / اسمی

ت: دایره ای، میله ای / مد و نسبت

ث: خیر، چون ممکن است در ایام امتحانات شرایط متفاوتی پیش بیاید.

ج: خیر، نتایج ممکن است قدری تغییر کنند.

تمرین ۳:

الف: (۱) مدیران شیفت شب در نظر گرفته نشده اند. (۲) مدیران نمی توانند، نماینده‌ی کل کارمندان محسوب
شوند برای رفع مشکل نمونه گیری از هر دو شیفت به تناسب و از تمامی کارمندان صورت گیرد.

ب: ممکن است برخی از مادران در این ساعت سرکار رفته باشند و لذا اطلاعات از آنها دریافت نمی شود.
برای رفع این مشکل کافی است مدت مراجعه را تغییر یا افزایش دهیم.

پ: (۱) دانش آموزان پسر از این مطالعه حذف شده اند. (۲) نمونه گیری تصادفی نیست.

نمونه‌ی انتخاب نمونه ای تصادفی و به تناسب دانش آموزان توصیه می شود.

تمرین ۴:

الف: تقریباً مساویند. (ولی گروه اول نتیجه‌ی بهتری دارد).

ب: دامنه‌ی تغییرات در گروه ۲ بیشتر از گروه ۱ است. دامنه‌ی میان چارکی در گروه ۱ بیشتر از گروه ۲ است.

پ: مقدار کمینه‌ی گروه ۱ برابر چارک اول گروه ۲ است. (گروه ۱ بهتر است).

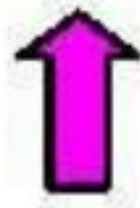
ت: گروه الف، چون داده‌ی دور افتاده دارد.

ث: گروه ۱، نمودار متقارن است. (عدم وجود داده‌ی دور افتاده)

ج: جامعه‌ی گروه ۱ به دلیل اطمینان از درست بودن نتایج

تمرین ۵:

۰ و ۴ و ۶ و ۱۰ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۸ و ۲۰ و ۲۰ و ۲۲



Q_1

چارک اول



Q_2

چارک دوم (میانه)



Q_3

چارک سوم

جمع کل داده ها برابر ۱۸۹ و میانگین آنها ۱۲/۶

الف : داده‌ی آخر را به یک عدد دوره افتاده مانند ۵۰ تغییر می دهیم.

ب : میانگین این داده ها ۱۲/۶ می باشد . لذا می توان دو داده طوری اضافه کرد که مثلاً ۳ واحد بیشتر و ۳ واحد کمتر از میانگین باشند (۱۲/۶ و ۹/۶) . بدین شکل میانگین تغییر نمی کند از طرفی چون وسط بودن میانه نیز حفظ شده است، لذا با این عمل میانه نیز ثابت مانده است.

تمرین ۶:

الف : ممکن است میزان ساعت خواب توسط دانش آموزان با دقت بیان نشود. برای رفع این مشکل لازم است از آنها بخواهیم ساعت خواب و بیداری خود را قبل از خواب و بعد از بیداری یادداشت نموده و بعد اعلام نمایند.

ب : کمی / نسبی (چون صفر مطلق دارند)

پ :

گروه	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۸	۱/۸

ت : اولاً : ممکن است برخی از دانش آموزان به دلیل مسائلی مانند میهمانی / جشن تولد / بیماری و ساعت خواب آنها موقتاً تغییر کند. ثانیاً : میزان تأثیر خواب بر یادگیری اگر تعریف عملیاتی نشود، نتایج مطالعه ارزش نخواند داشت.

ث : والدین دانش آموزان ، خود بهتر از خود دانش آموزان از میزان ساعت و خواب فرزندان خود و تأثیر آن بر یادگیری آگاهند.

تمرین ۷:

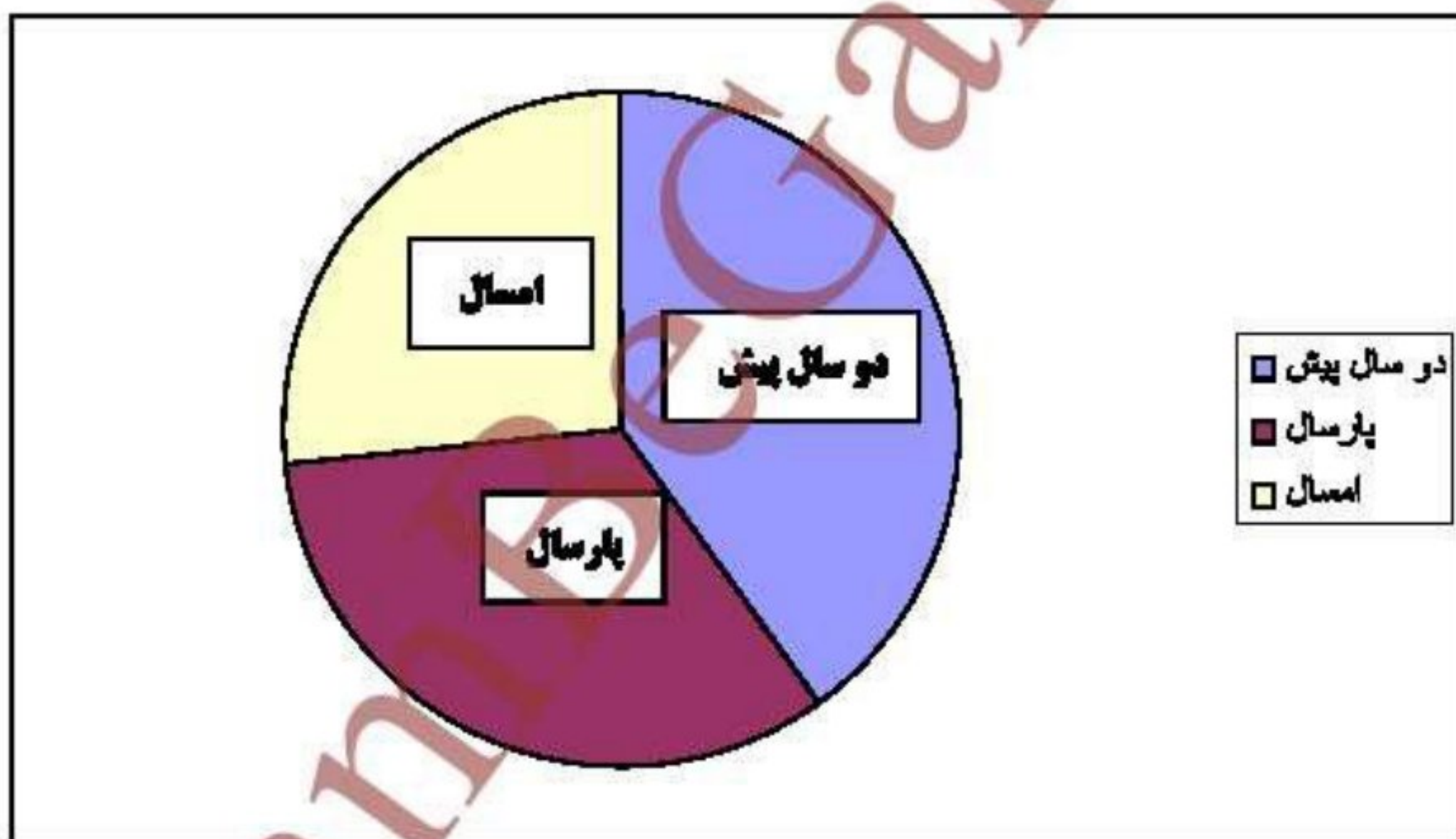
الف: ۳۰ نفر

ب: ۳۰ نفر (روند نزولی دارد)

پ:

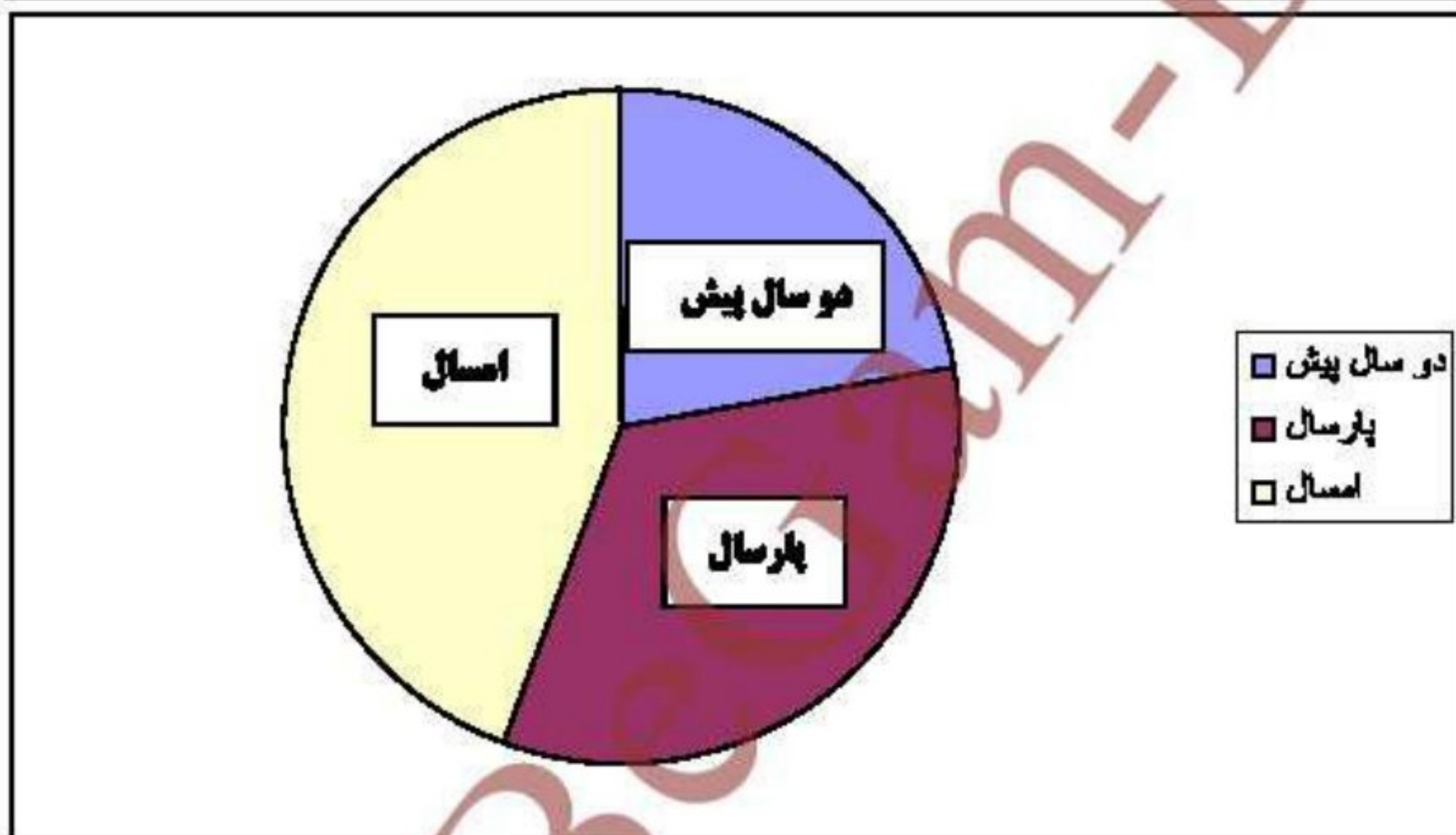
نمودار دانش آموزان مدرسه

سال	فراوانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۶۰	$\frac{60}{150} \times 360 = 144$
پارسال	۵۰	$\frac{50}{150} \times 360 = 120$
امسال	۴۰	$\frac{40}{150} \times 360 = 96$
جمع	۱۵۰	۳۶۰



نمودار سایر اعضا

سال	فراوانی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۲۰	$\frac{20}{90} \times 360 = 80$
پارسال	۳۰	$\frac{30}{90} \times 360 = 120$
امسال	۴۰	$\frac{40}{90} \times 360 = 160$
جمع	۹۰	۳۶۰



ت : عواملی مانند مدیریت / تبلیغات / اوقات فراغت / هزینه و ... تناسب کتابهای موجود با سن اعضا نیز ممکن است اثرگذار باشد.

تمرین ۸ :

الف :

دوره ی سنی	زاویه ی مرکزی (بر حسب درجه)
کمتر از ۲۰ سال	۵۴
بین ۲۰ الی ۴۰	۹۰
بین ۴۰ الی ۶۰	۲۱۶
جمع	۳۶۰

$$360 - (90 + 54) = 216$$

$$\frac{360}{100} = \frac{216}{x} \rightarrow x = \frac{216 \times 100}{360} = 60 \text{ درصد}$$

ب : مورد اول، زیرا

اولاً : در ساعات اداری افراد بازنشسته لزومی ندارد که در ادارات حاضر شوند. ثانیاً : افراد کمتر از ۲۰ سال سن معمولاً دانش آموز هستند که در این مطالعه سهم کمتری دارند.

تمرین ۹ :

اشکال این نتیجه گیری این است که تعداد کمتری از رانندگان خودروها ممکن است خود با سرعت ۸۰ به بالا به رانندگی کنند که این مورد ملاحظه نشده است. از طرفی تعداد کل جهت مقایسه س بهتر نیز در اختیار نیست.

توجه به جدول و عدم کمک گرفتن از نظرات رانندگان موجب این تصور نادرست شده است.

مؤسسه استانی حوزه قضایی لار و هی لاروم

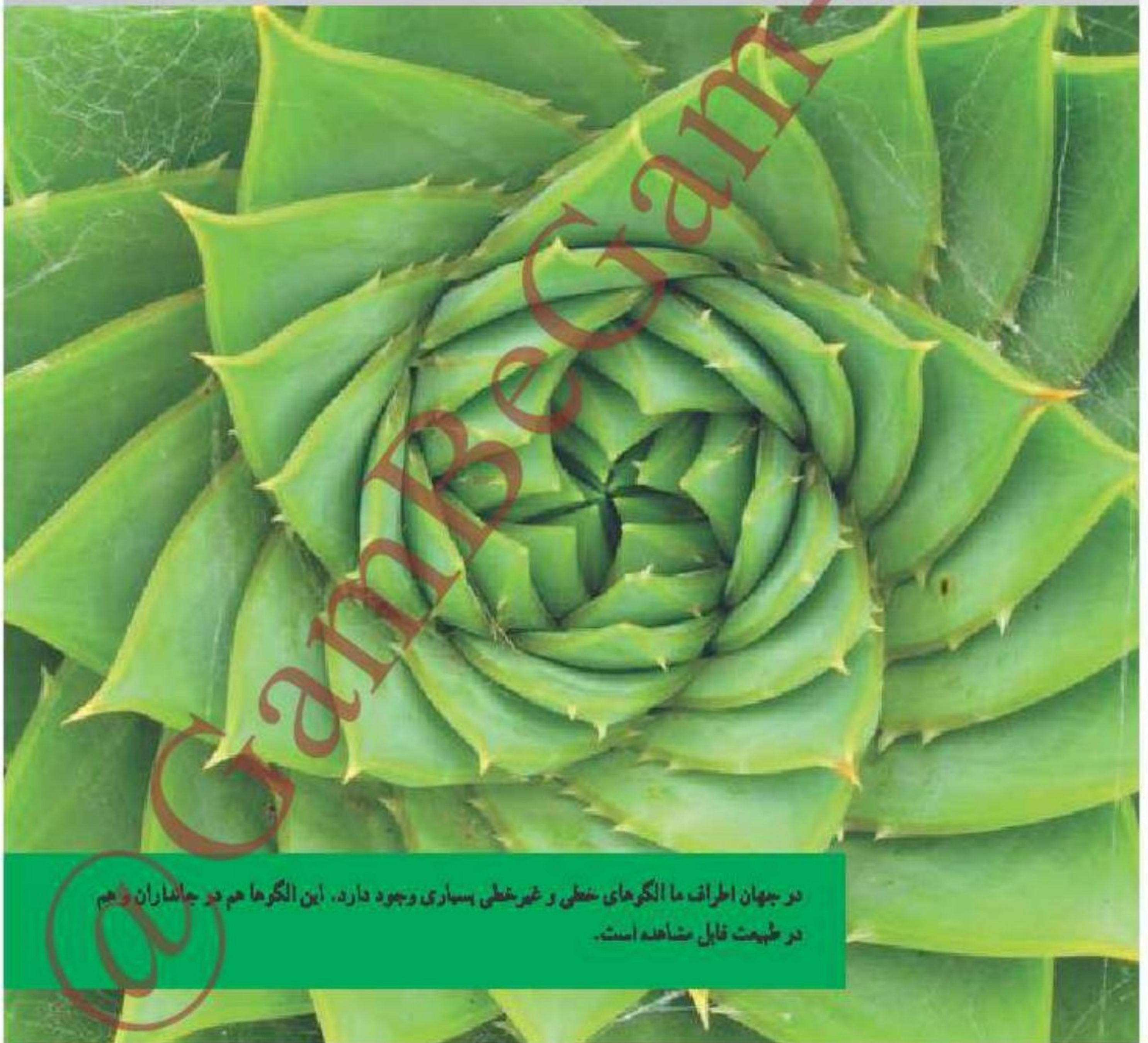
@GambBe

فصل ۲- الگوهای خطی

درس ۱ مدل سازی و دنباله

درس ۲ دنباله حسابی

إن فی خلق السموات والأرض واختلاف الليل والنهار لآياتٍ لأولي الألباب (آیه ۱۹۰ سوره مبارکه آل عمران)
در مسلماً در آفرینش آسمان‌ها و زمین و آمدورفت شب و روز نشانه‌های (درویشی) برای خردمندان است»



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

درس ۱

مدل سازی و دنباله

مدل سازی

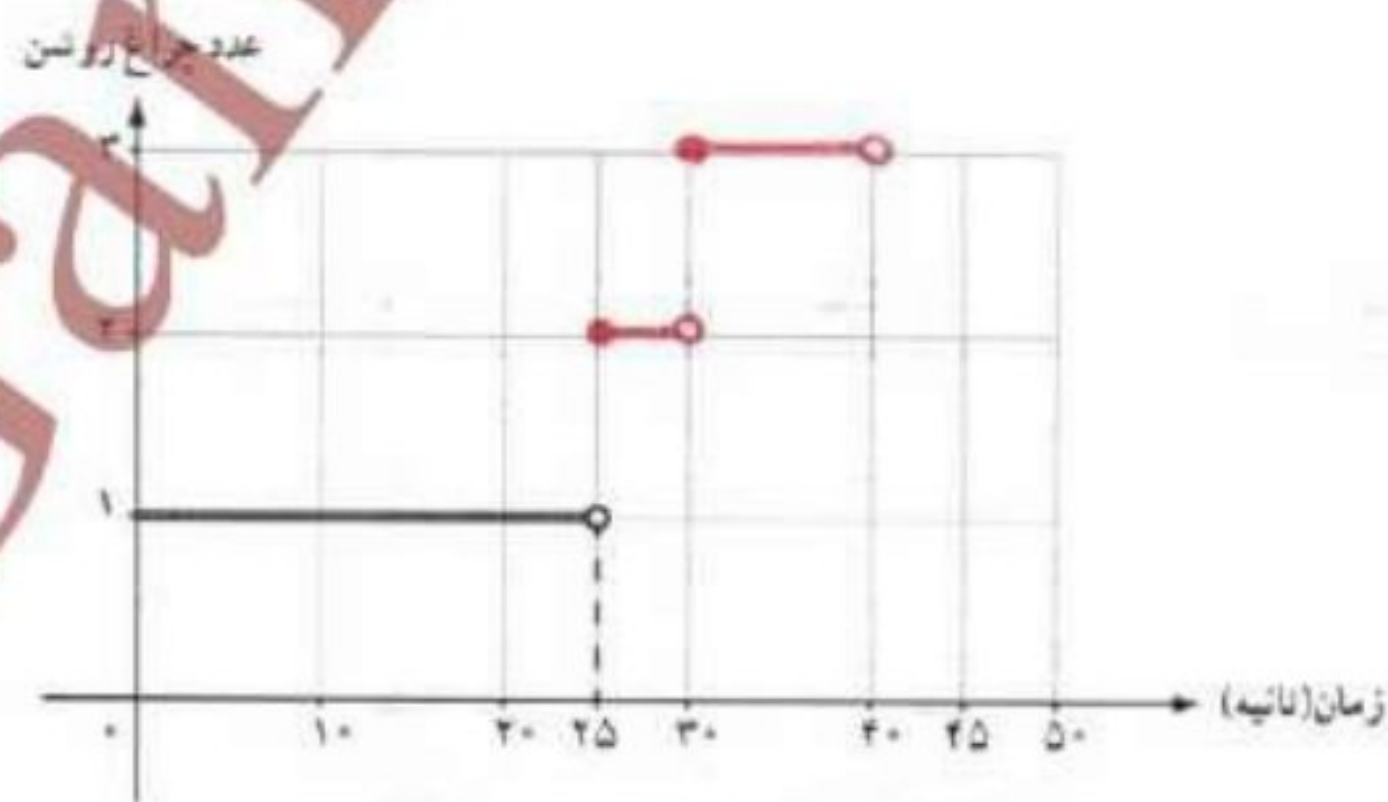
در کتاب بازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

فعالیت

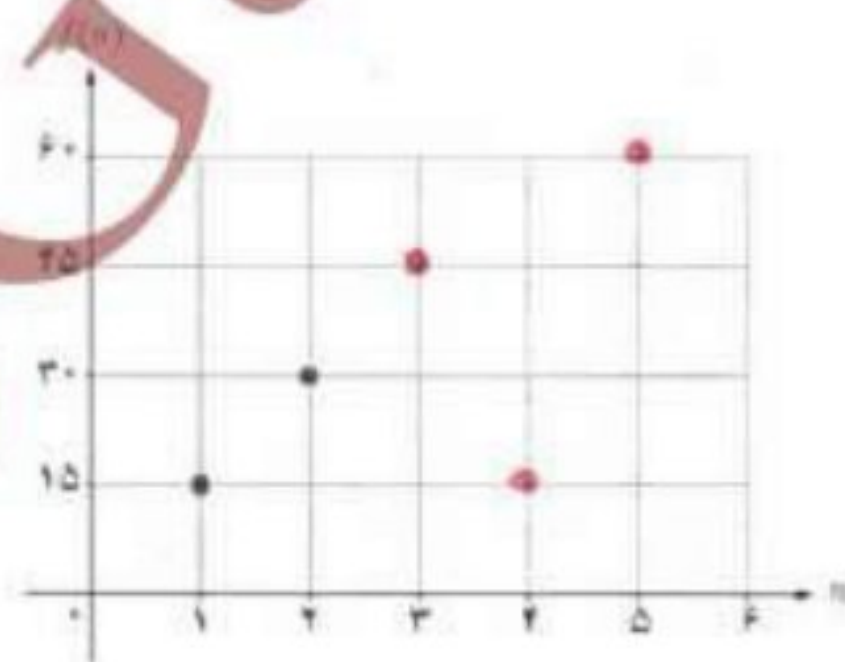
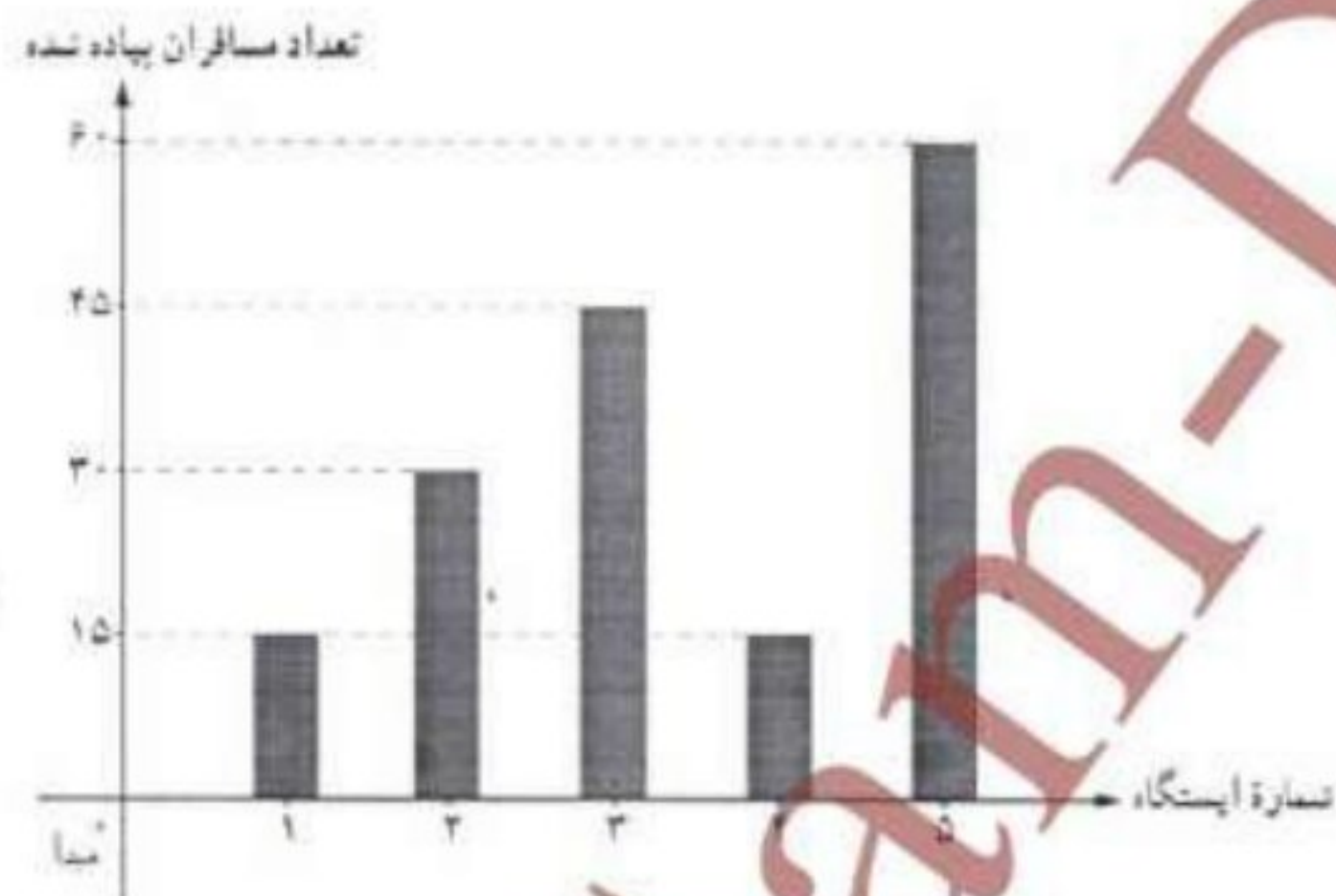


۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۲۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ام، با توجه به فرض:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases} \quad D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, \quad R_f = \{1, 2, 3\}$$



۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر $f(n)$ ، شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	$۴۵ + ۱۵$		۶۰

$$f(n) = \begin{cases} \dots, ۱۵, ۳۰, \dots & ۱ \leq n \leq ۳ \\ ۱۵ + ۴۵(n-۴) & ۴ \leq n \leq ۵ \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid ۱ \leq n \leq ۵\} \quad R_f = \{۱۵, ۳۰, ۴۵, ۱۵, ۶۰\}$$

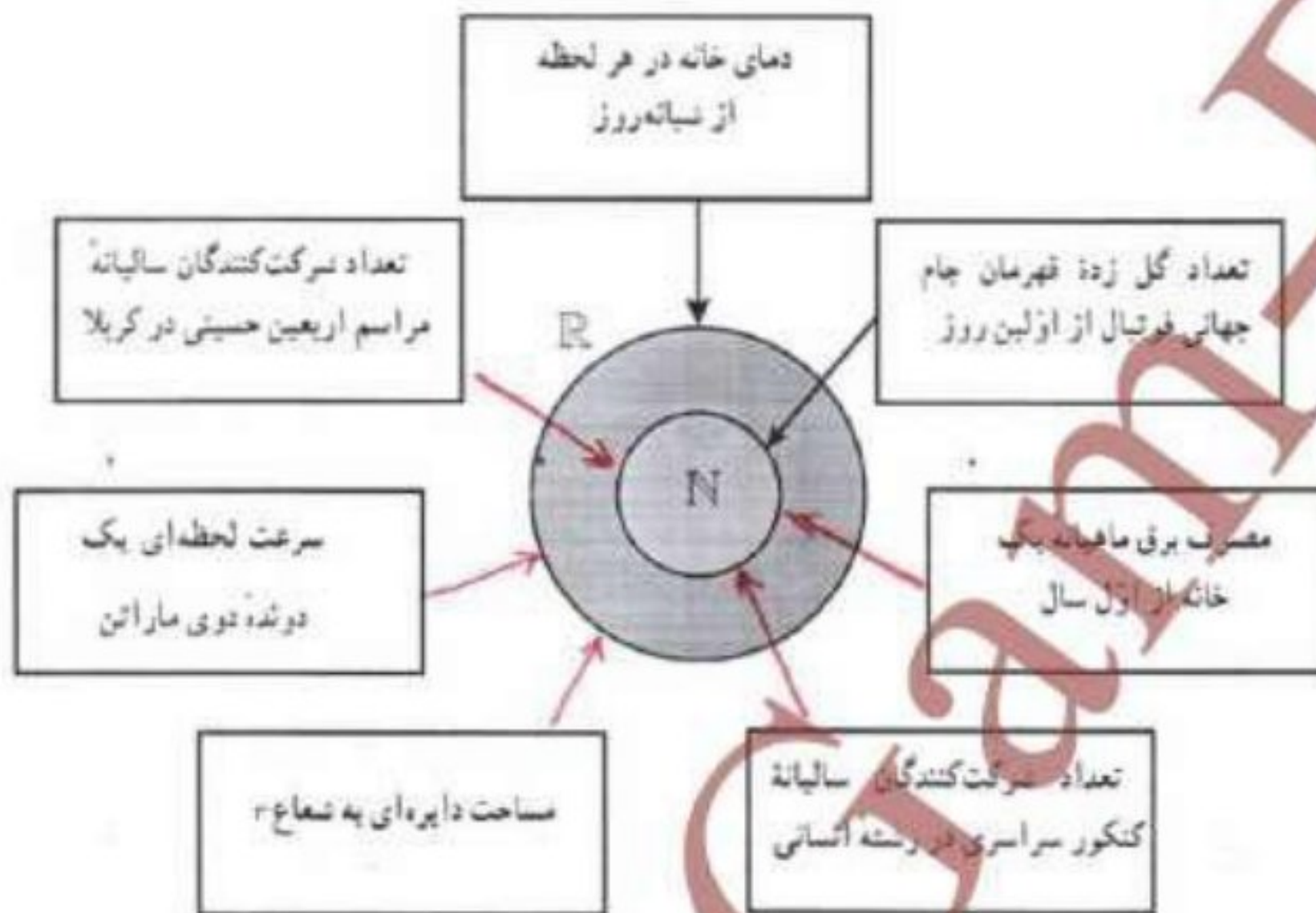
یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵م است و تابع در تمامی این زمان قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

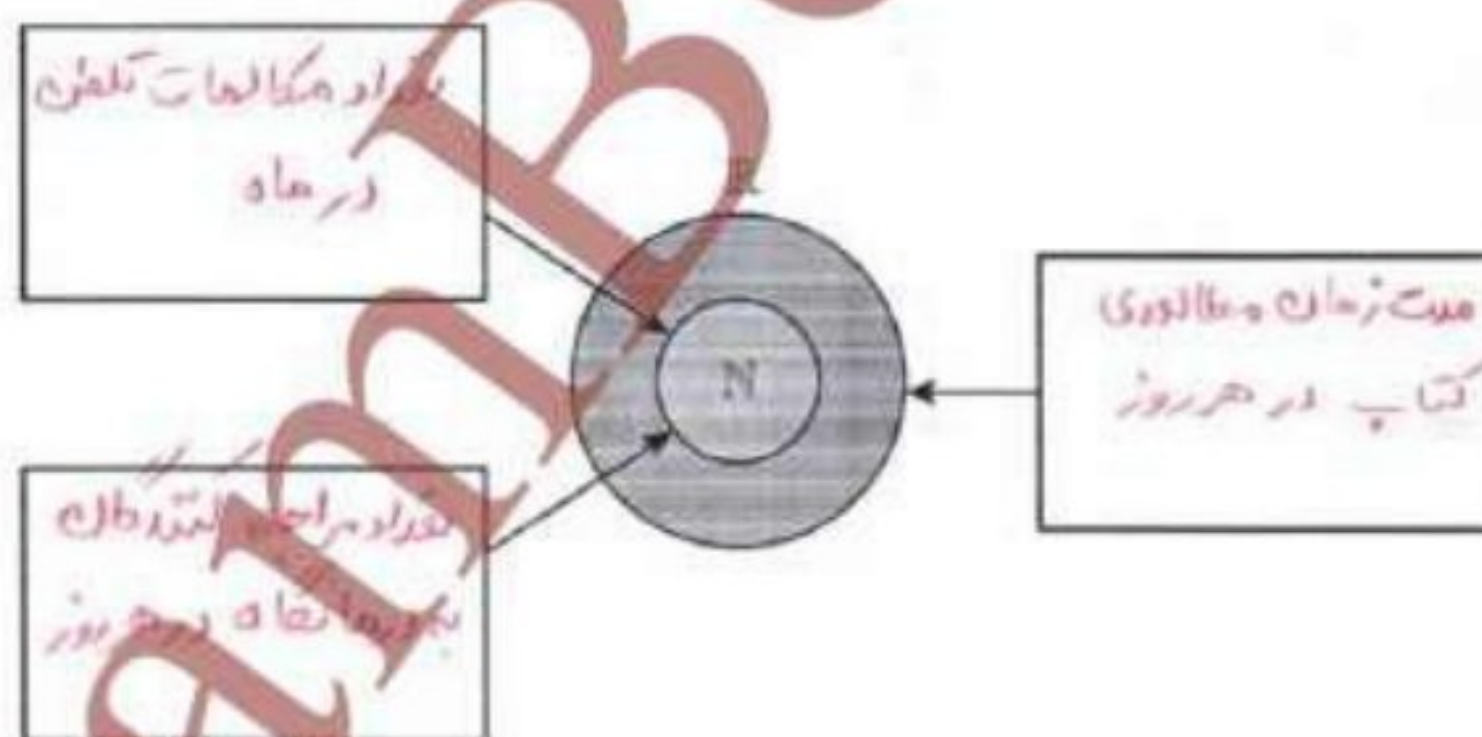


کار در کلاس

۱. اگر تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:

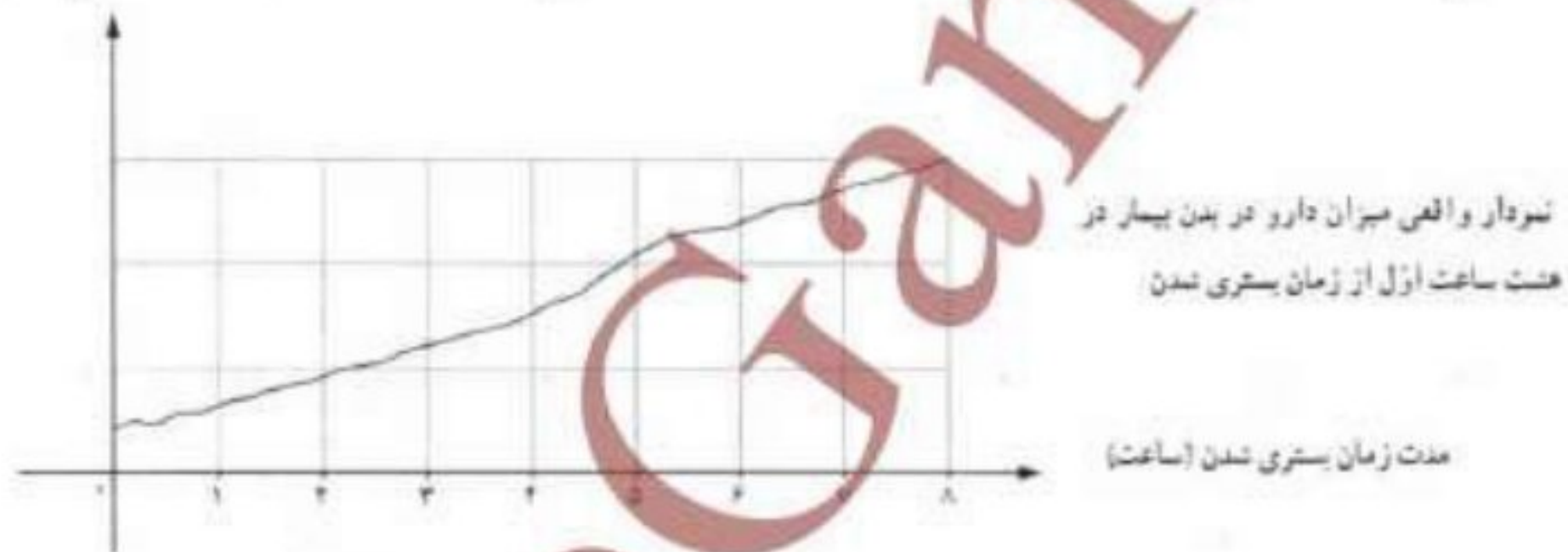


در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

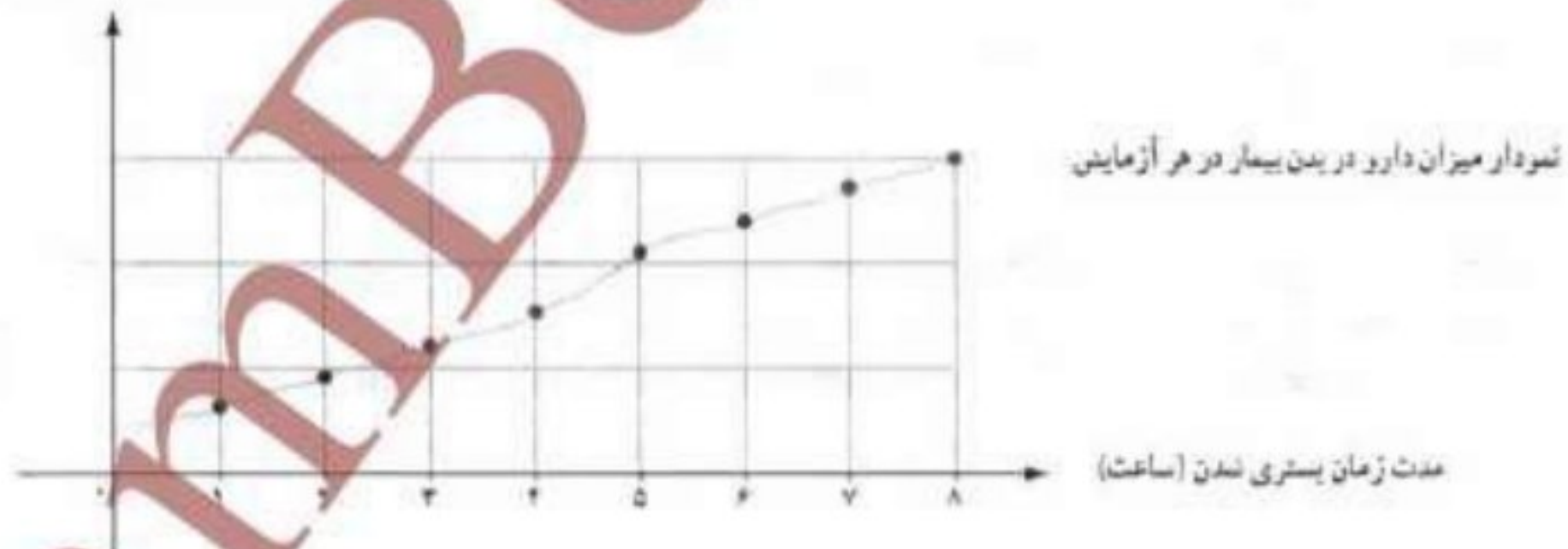
کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می کنیم. برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می تواند میزان یک دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه روز اندازه گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می کند. به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

میزان دارو در بدن بیمار (میلی گرم)



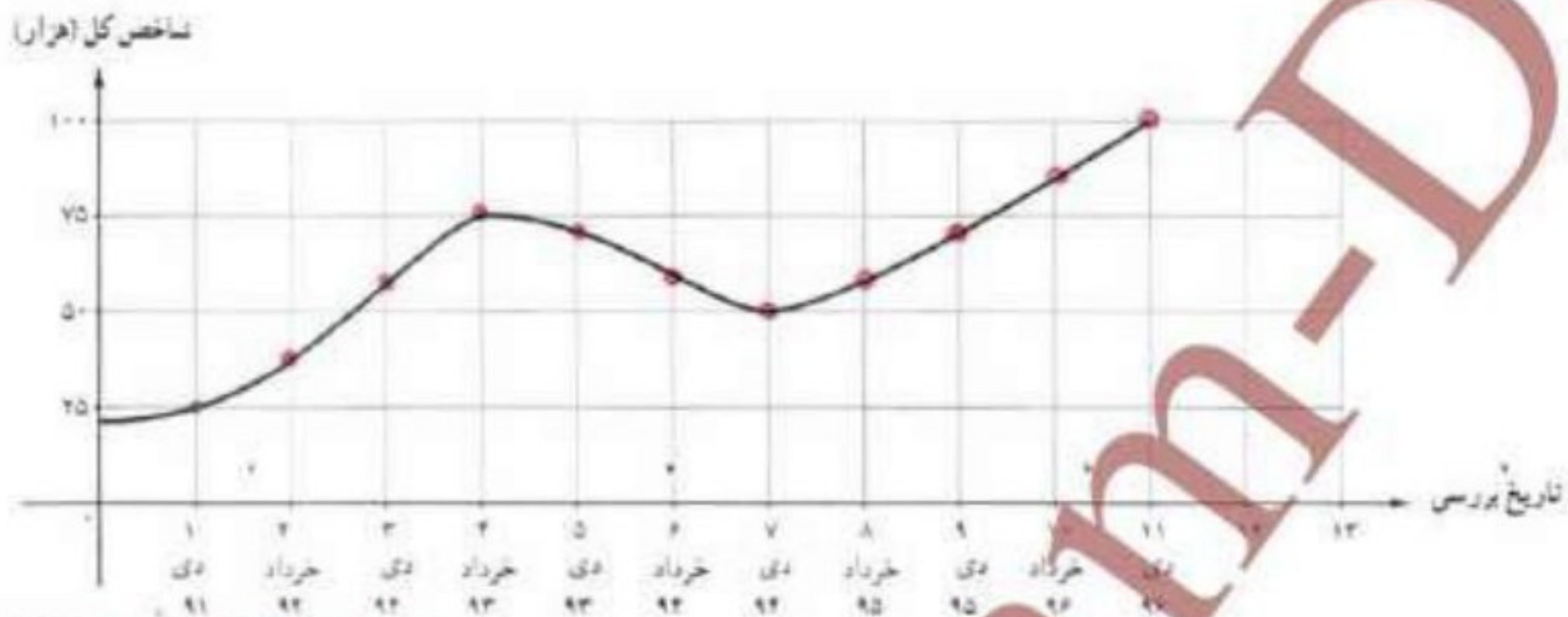
میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی گرم)



در فعالیت صفحه بعد، نمونه ای دیگر از همین کاربرد را می بینیم.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می‌دهد:



رصدی

از دی ماه ۹۱ تا خرداد ۹۳ افزایشی و از خرداد ۹۳ تا دی ۹۴ نزولی و از دی ۹۴ تا خرداد ۹۶ افزایشی

الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا، شاخص کل در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟
 ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و دی ۱۳۹۶ را پانزدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم. جدول زیر را کامل کنید.

n امین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$	۲۵	۳۵	۵۵	۷۵	۷۰	۶۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۵	۱۰۰
مقدار شاخص کل (هزار)											

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

۱) ۸۵,۰۰۰ (۲) ۱۰۵,۰۰۰ (۳) ۱۱۲,۵۰۰ (۴) ۱۰۰,۰۰۰ (۵) ۱۲۵,۰۰۰ ✓

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰۰ واحد رسید». «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت». اینها نمونه جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟ بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها - که در اختیار مطرح می‌شود - «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت بیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}} \times ۱۰۰$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است.

منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز \times تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه \times تعداد سهام در روز بررسی» است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

- فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فروردین ۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
A	۱۰۰۰	۱۵	۱۲۰۰	۶۰
B	۵۰۰	۳	۱۵۰۰	۸۰

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{۱۲۰۰ \times ۶۰ + ۱۵۰۰ \times ۸۰}{۱۰۰۰ \times ۱۵ + ۵۰۰ \times ۳} \times ۱۰۰ = \frac{۱۹۲۰۰۰}{۹۹۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۹۳ \times ۱۰۰ = ۱۹۳$$

عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ است.

توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنهایی سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تفسیرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰ واحد به ۳۰۰ واحد برسد، یعنی ۵۰٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵۰٪ بوده است.

۱. فرمول بالا به روش محاسبه «لاسپیرز» (Laspeyres) معروف است.

در سال های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم. عموماً این الگوها را نیز می توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

$a_p = 32$

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید. $a_v = 64$

ب) بر اساس رابطه میان a_1, a_2 و رابطه میان a_2, a_3 و نیز a_3, a_4 می توان مقادیر a_5 و a_6 را مشخص کرد؟ چگونه؟

$a_{n+1} = 2a_n + a_p = 1$

ج) آیا به کمک قسمت ب، می توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات

الگوی بالا به دست می آید؟ چرا؟ $a_{n+1} = 2a_n + a_p = 1$

د) رابطه ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی^۳ می نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه ای معلوم کنید.

بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

$a_{n+1} = 2a_n + a_p = 1$

ه) رابطه ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. $(n \in \mathbb{N})$

و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

در قسمت «د» هر جمله به علاوه یک قبل آمده است. در قسمت «ج» هر جمله به علاوه یک است.

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم
۲. خواندنی کتاب ریاضی دهم



الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

- (الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)
- (ب) رابطه ای بر حسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

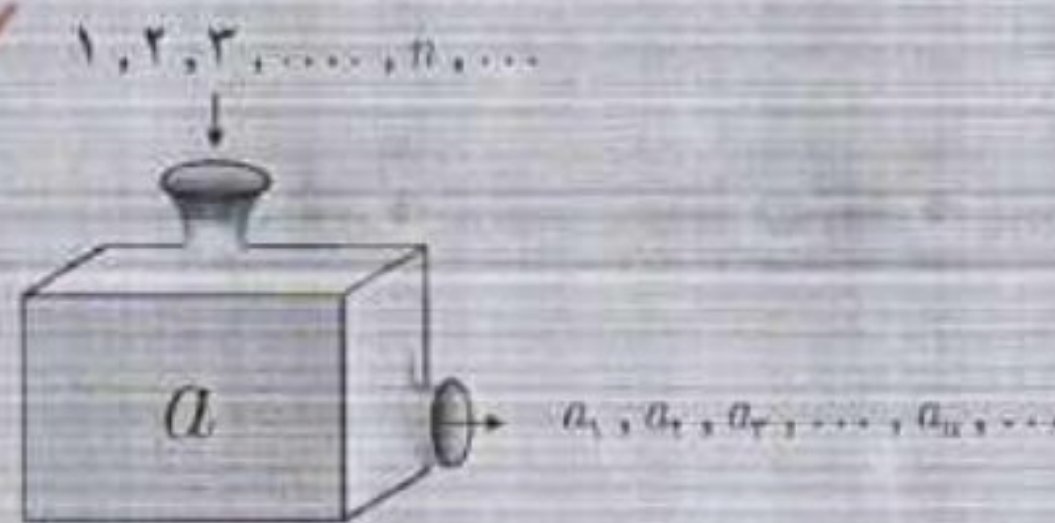
$$\begin{array}{ccccccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots \end{array}$$

با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت 3 به جمله پیشین به دست می آیند؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشتی دنباله})$$

و یا می توان الگوی جملات دنباله را با ضابطه $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جای گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم به دست می آید.

تعریف دنباله: همان طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای \mathbb{N} تابع می تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم. معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.



با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	1, 4, 7, 10, 13
$b_n = n^2 - 1$	0, 3, 8, 15, 24
$c_n = \frac{1}{n}$	$\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \dots$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

مثال) برای جملات دنباله زیر:

3, 9, 27, 81, 243, ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

الف) برای نوشتن رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بررسی می کنیم:

$$a_1 = 3 \quad \text{و} \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad \text{و} \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 27 \quad \text{و} \quad a_4 = 81 = 3 \times 27$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

یعنی، هر جمله دنباله 3 برابر جمله پیشین است. بدیهی است که تنها رابطه $a_{n+1} = 3a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_1 = 3$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان a_n و n را مشخص کنیم:

اولین جمله $n=1 \rightarrow a_1 = 3^1$

دومین جمله $n=2 \rightarrow a_2 = 9 = 3^2$

سومین جمله $n=3 \rightarrow a_3 = 27 = 3^3$

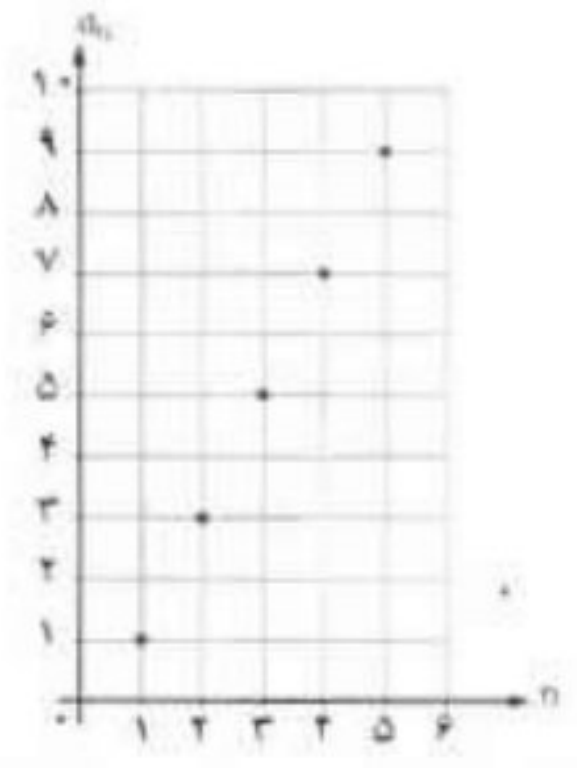
پس، ضابطه تابعی به صورت $a_n = 3^n$ به دست می آید.



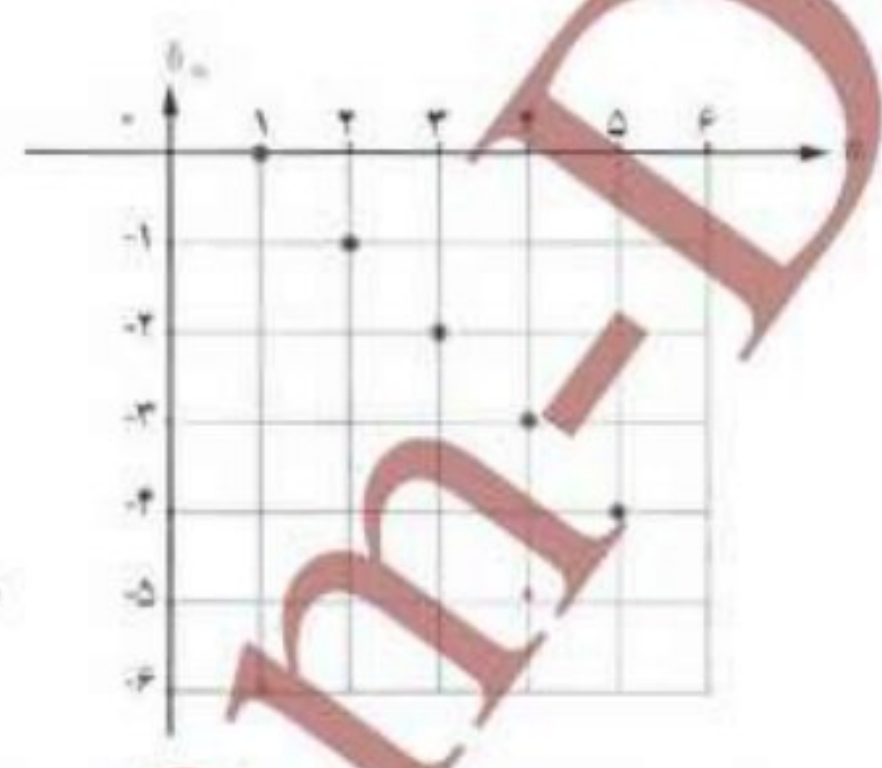
رسم دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می توان رسم کرد:

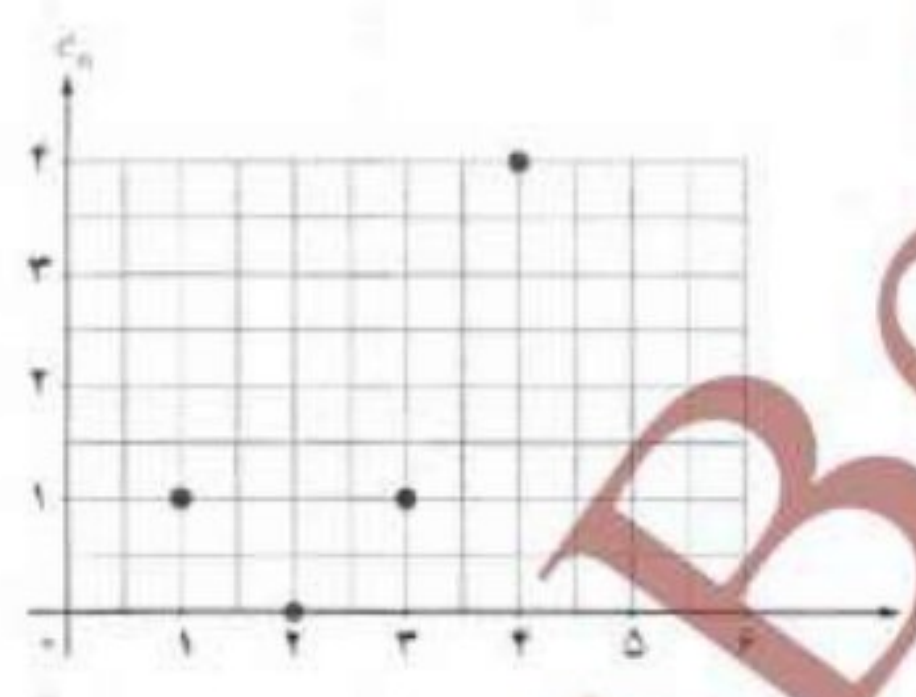
$a_n = 2n - 1$ 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...



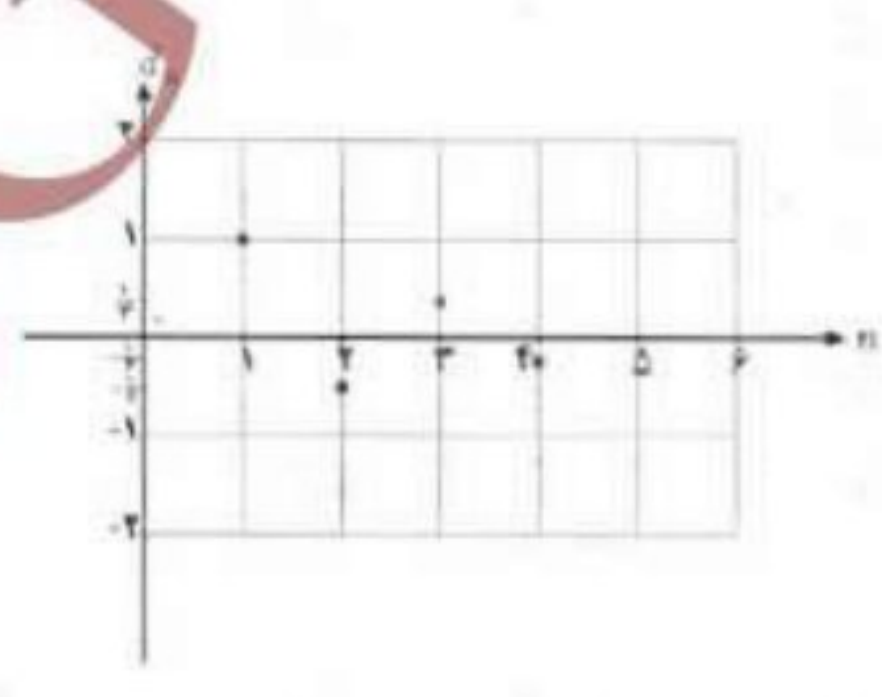
$b_n = 1 - n$ 0, -1, -2, -3, -4, ...



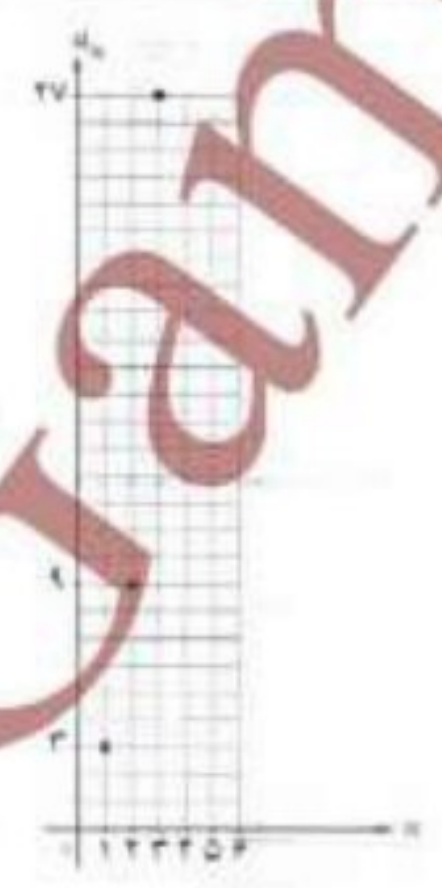
$c_n = (n-2)^2$ 1, 0, 1, 4, ...



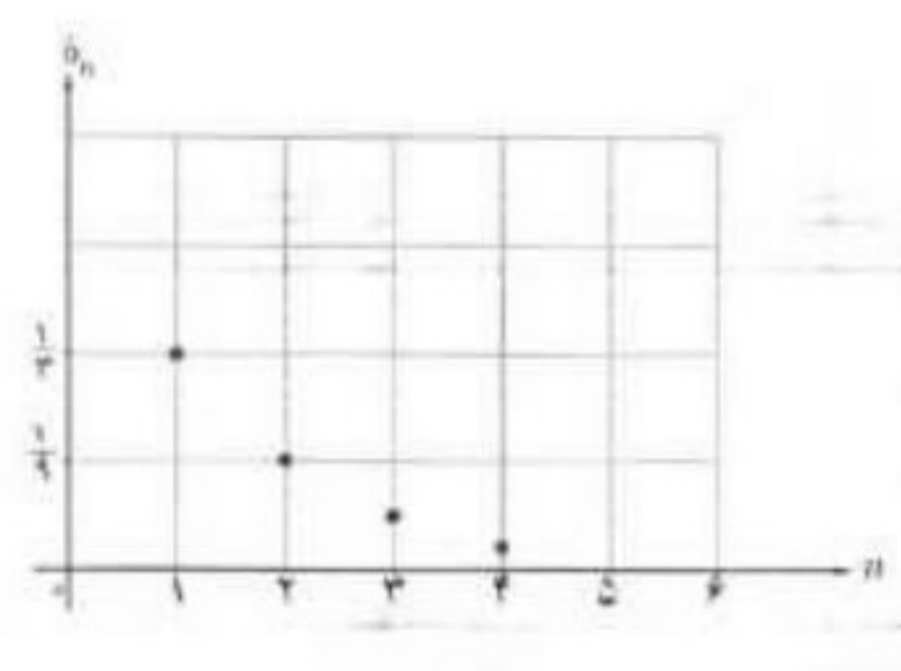
$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 1, -1/2, 1/3, -1/4, ...



$e_n = 3^n$



$f_n = (\frac{1}{3})^n$



جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	شایطه دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n = 3^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	1, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ...
	$a_n = (\frac{1}{4})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 1$	1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, ...
	$a_n = 2n + 1$	$a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 3$	3, 5, 7, 9, ...
		$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$	1, 3, 6, 10, ...
			1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...
	$a_n = -n^2$		-1, -4, -9, -16, ...
		$a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$ $(a_1 = a_2 = 1)^*$	1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

* دنباله فوق را دنباله فیبوناچی می نامند.

تمرین

۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب بها محاسبه می‌شود:
 هزینه هر متر مکعب یا توجه به طبقه مصرف \times میانگین مصرف = آب بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$0 \leq x < 5$	۱/۲۱۹	$25 \leq x < 30$	۸/۲۹۶
$5 \leq x < 10$	۲/۱۲۲	$30 \leq x < 35$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < 15$	۲/۸۲۷	$35 \leq x < 40$	۱۵/۴۴۴
$15 \leq x < 20$	۳/۷۰۳	$40 \leq x < 50$	۲۳/۴۶۲
$20 \leq x < 25$	۵/۴۰۰	$x \geq 50$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب بها را منحصر می‌کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

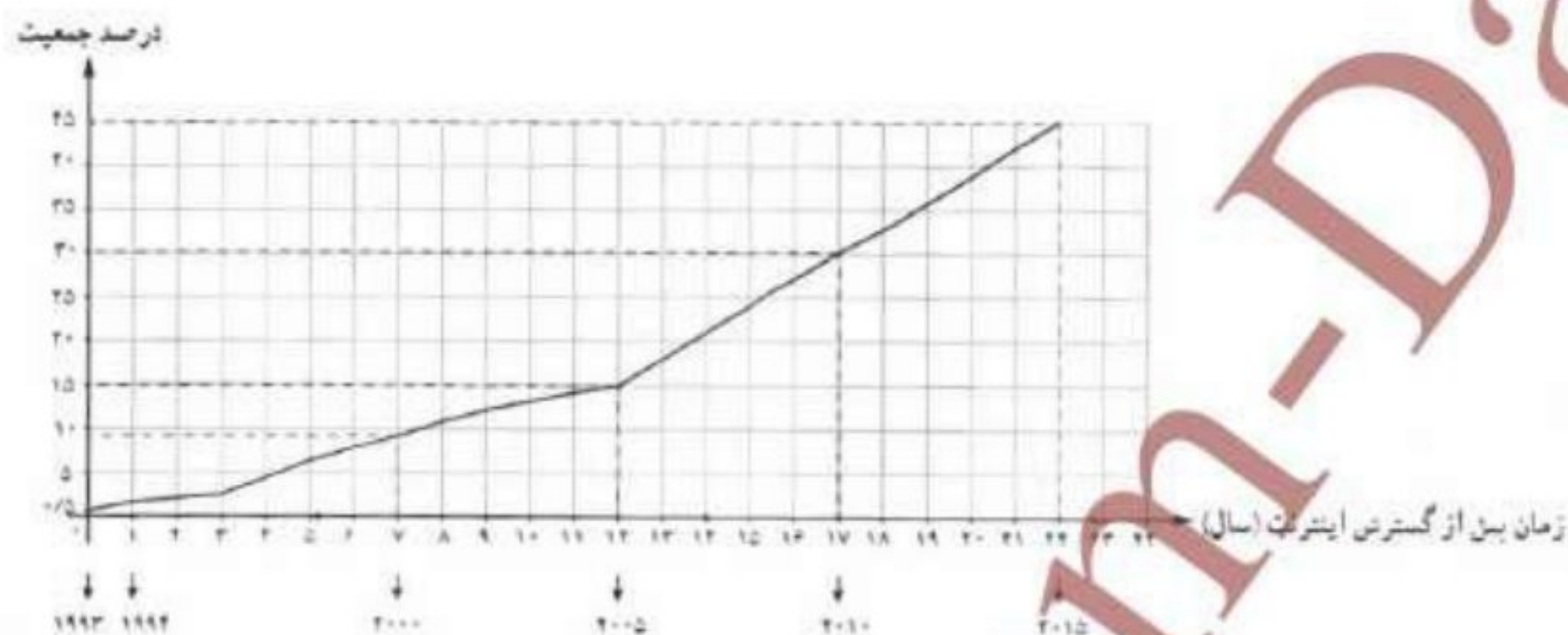
- الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر N R
- ب) میزان استفاده دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت N R
- ج) حجم مکعبی به ضلع x N R
- د) تغییرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر N R
- ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی N R

۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.epww.ir استخراج شده است. در جدول واقعی، پس از محاسبه حاصل ضرب گفته شده بر اساس طبقه مصرف، عددی ثابت از عدد دست آمده، کم می‌شود.

۲. توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{1}{4}$ هزینه واقعی تولید آب را می‌پردازند. هزینه آب در مقایسه با کشورهای منطقه بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۳. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران 18 است.

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیا است، از اینترنت استفاده کرده‌اند^۱ :



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان n سال پس از گسترش اینترنت باشند، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله :

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_7 + b_7$

ب) $c_7 - d_7$

ج) $b_7 + d_7$

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+2} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

^۱ data.worldbank.org

۷ جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه ای
۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ...			
۴، ۱، ۴، ۱، ۴، ۱، ...			
۱، $\frac{1}{2}$ ، ۳، $\frac{1}{4}$ ، ۵، $\frac{1}{6}$ ، ...			
$\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، ...			

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

ب) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

د) $a_n = \begin{cases} n & \text{زوج } n \\ \frac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می توانیم به طرز شگفت انگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} نزدیک شویم.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right)$ $a_1 = k$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین النهرین) است.

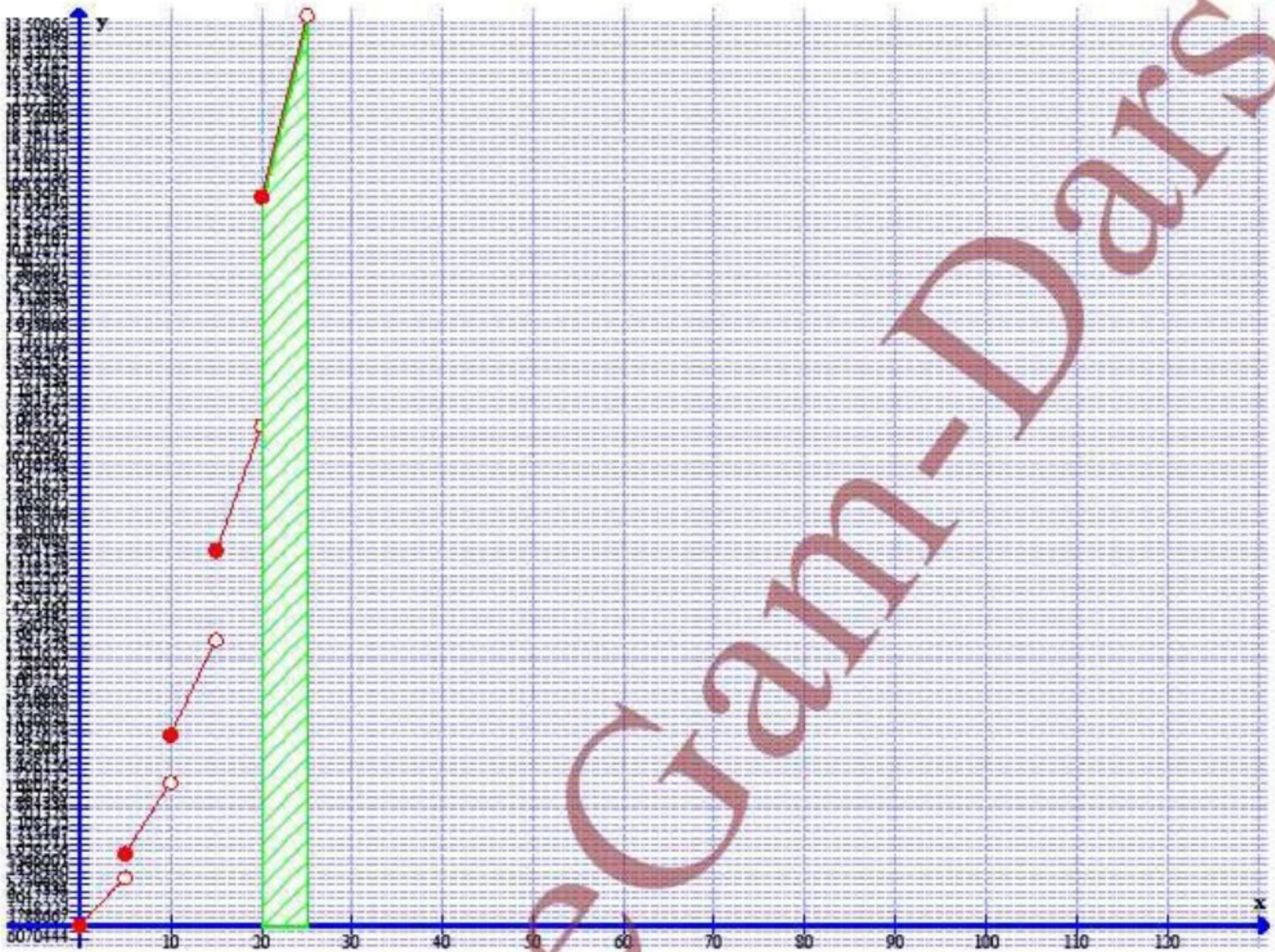
به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_n را تقریبی برای \sqrt{k} در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟



$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$f(x) \quad / \quad x \quad x$$

$$[, /) \cup [/ , /) \cup \dots \cup [/ ,) \quad [,)$$

$$f(/) \quad / \quad / \quad /$$

N	R	
	✓	
✓		
	✓	
✓		
✓		

$f() / f()$

t		
$f(t)$		

m _____

$h y_0 mt_0 ()$

$y mt h y t$

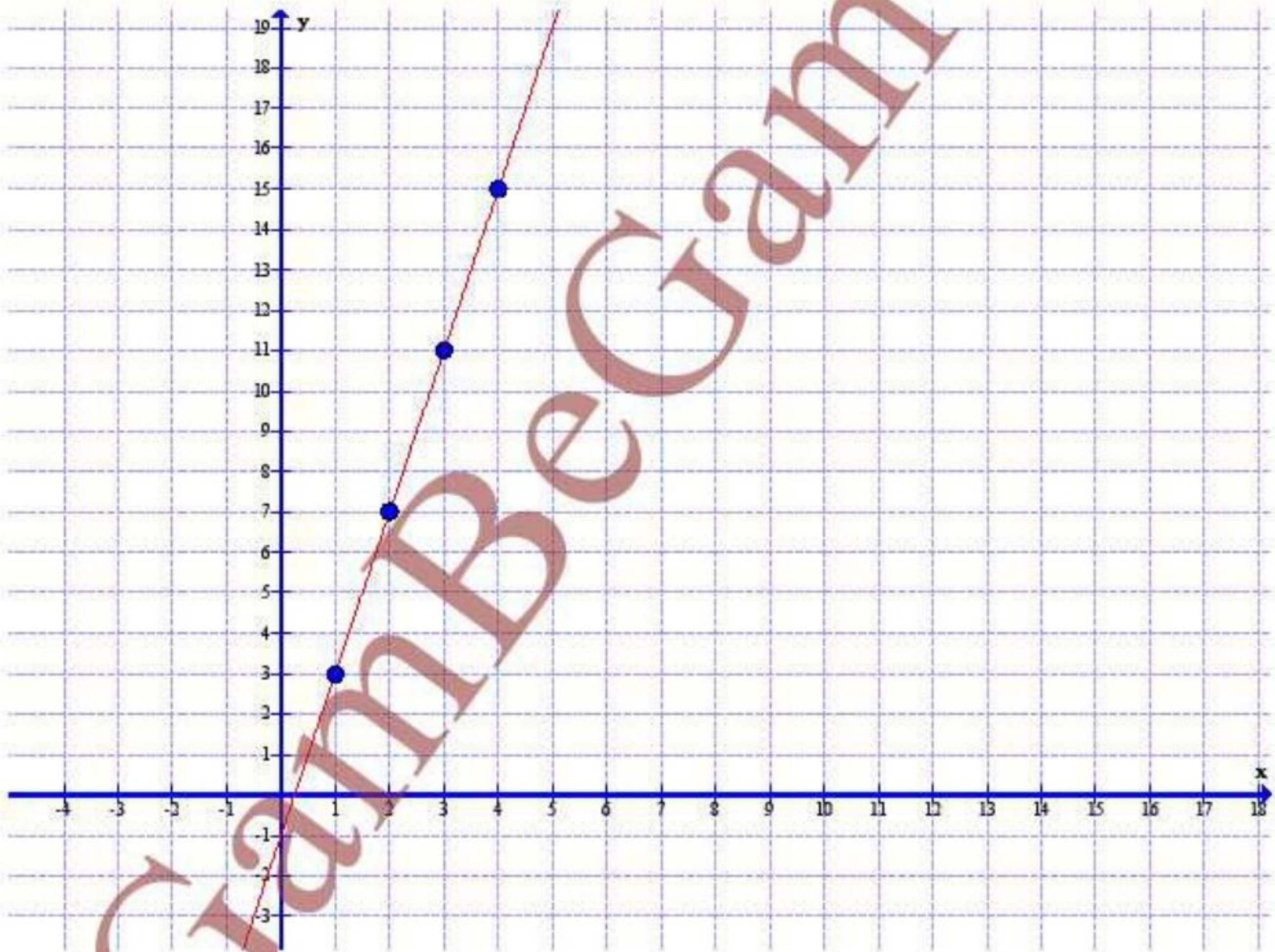
$f(t) t$

$f() ()$



	y	x
x		
y		

	a_n	n		
n				
a_n				



a_n n

a_n a_n

m

a_n a_n m



$$a \ b \ (-) \ - \ -$$

$$c \ d \ \left(\frac{\quad}{\quad}\right) \ (\) \ - \ -$$

$$b \ d \ (-) \ (\) \ - \ -$$

$$a_n \ -a_n \ ; \ a$$

$$a \ \quad \quad \quad a \ -a \ -(\) \ -$$

$$a \ -a \ -(\) \ - \quad \quad \quad a \ -a \ -(\) \ -$$

$$a \ -a \ -(\) \ -$$

$$a_n \ \frac{\quad}{a_n} \ ; \ a$$

$$a \ \quad \quad \quad a \ \frac{\quad}{a} \ - \ -$$

$$a \ \frac{\quad}{a} \ - \ - \ - \quad \quad \quad a \ \frac{\quad}{a} \ - \ - \ -$$

$$a \ \frac{\quad}{a} \ - \ -$$

$$a_n \ a_n \ a_n \ a_n \ ; \ a \ a \ a$$

$$a \ a \ a$$

$$n \ a \ a \ a \ a$$

$$n \ a \ a \ a \ a$$

$$a_n = a_n ()^n ; a$$

a

$$n = a = a () ()$$

$$n = a = a ()$$

$$n = a = a () ()$$

$$n = a = a ()$$

$$a_n = a_n ; a$$

$$a_n = n$$

$$a_n = a ; a \quad a_n = a ; a$$

$$a_n = \frac{n}{n}$$

$$\frac{a_n}{n} = \frac{n}{n}$$

$$a_n = \frac{n}{n}$$

a

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

a

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -()$

$n \quad a \quad a \quad ()$

$n \quad a \quad -a \quad -() \quad \text{—}$

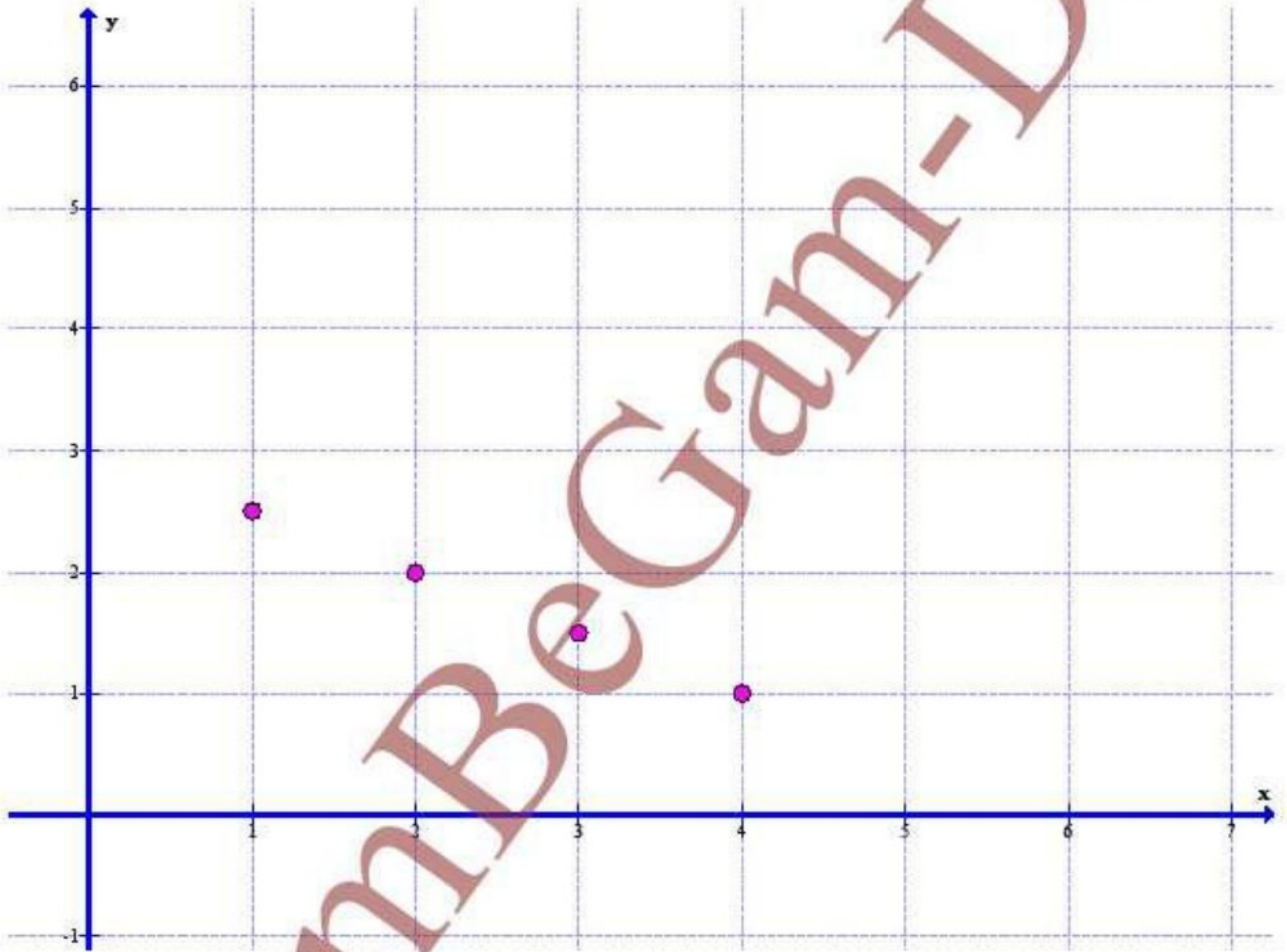
$n \quad a \quad a \quad (\text{—}) \quad \text{—}$

— —



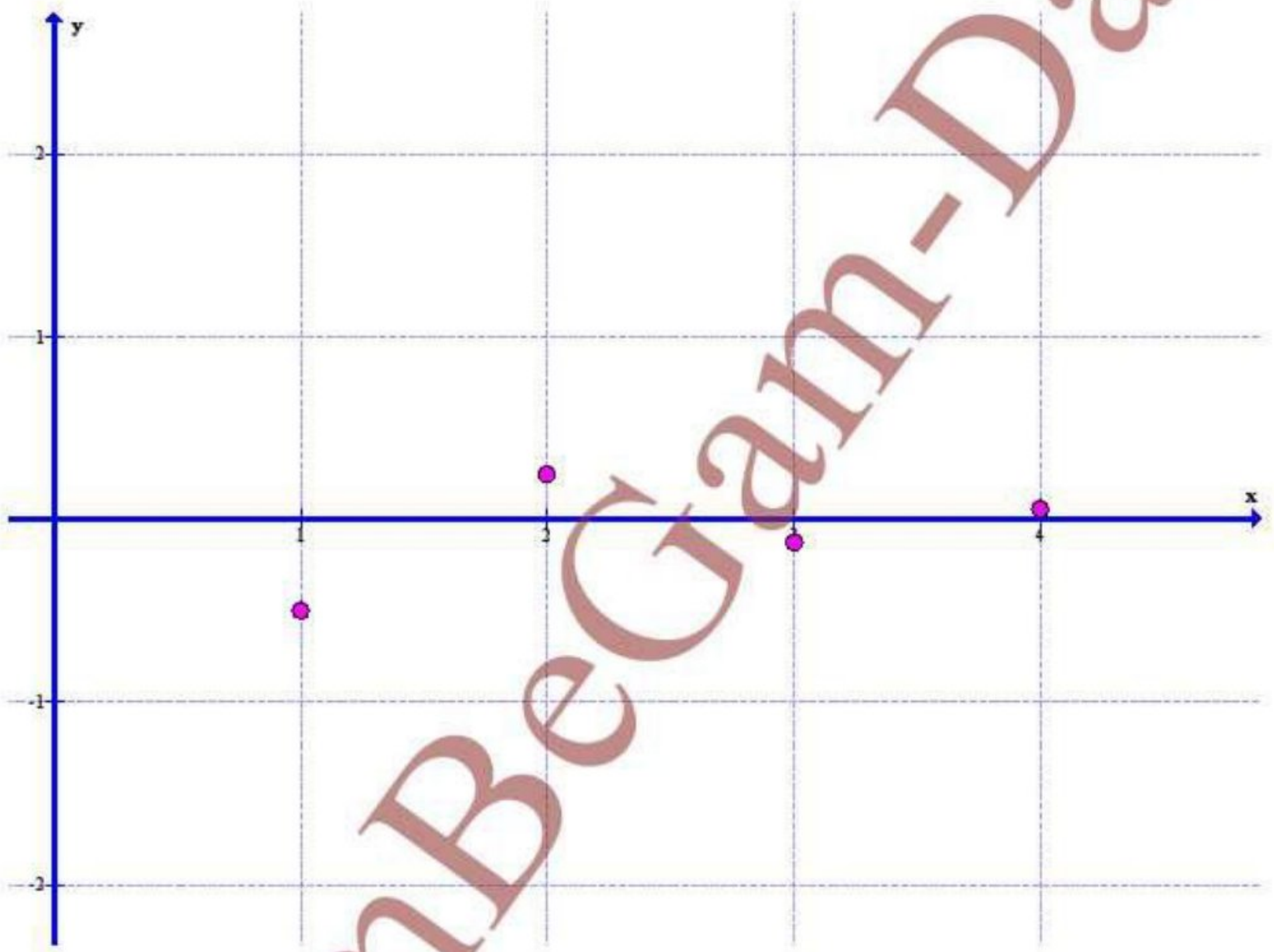
GamBeGam-Darsi

	a_n		$-n$	
n				
a_n	-		-	



@GambBeGam-Darsi

$a_n (-)^n$				
n				
a_n	-	-	-	-



@GambBe

$$a \quad a \quad \frac{a}{a} \quad - \quad a \quad \frac{a}{a} \quad a \quad \frac{a}{a} \quad -$$

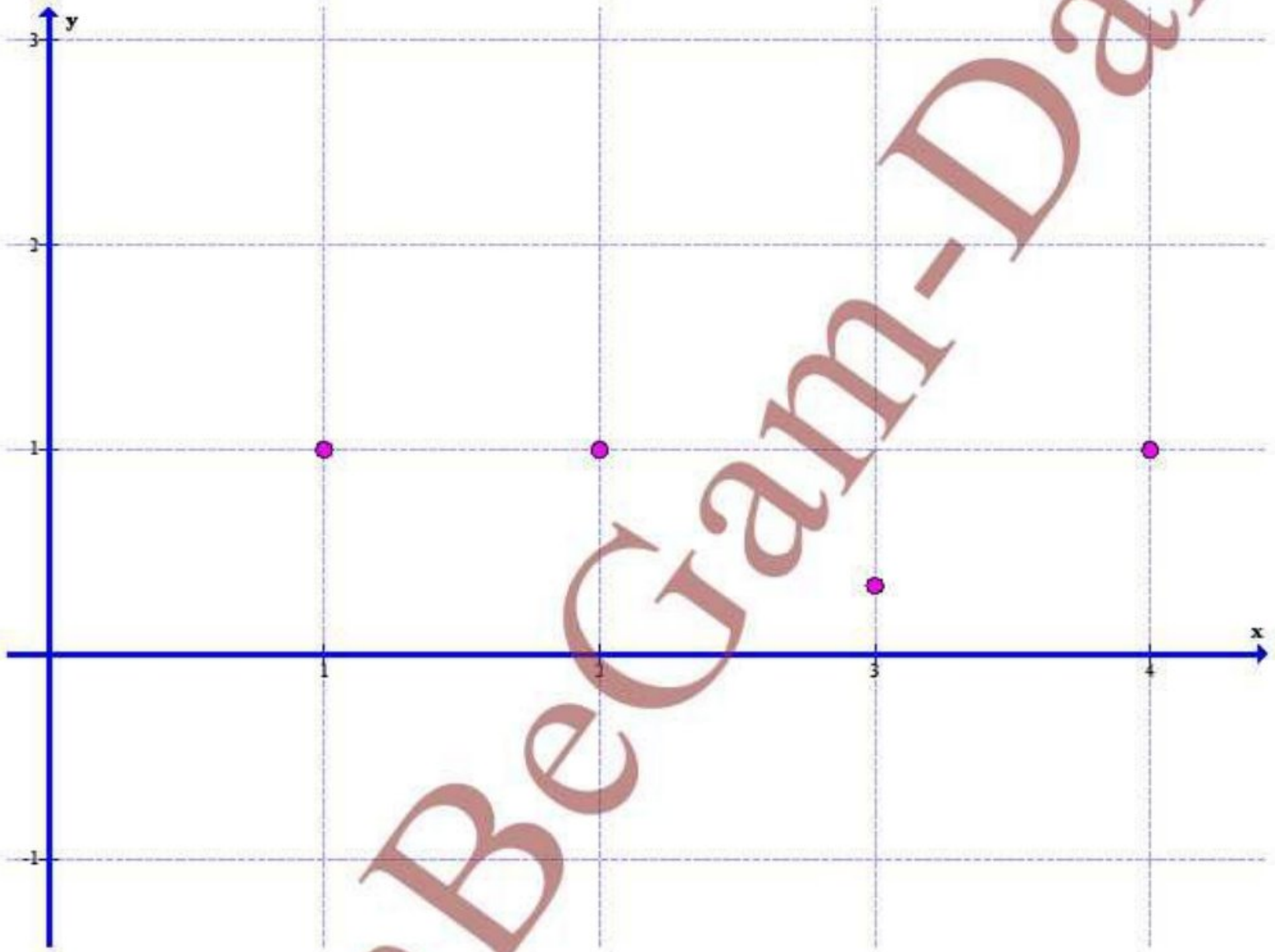
n				
a_n		-		-



@GambBeGam-Darsi

$a \quad a \quad a \quad - \quad a$

n				
a_n			-	



k

$a_n \quad -(a_n \frac{1}{a_n}) ; a$

$a \quad -(a \frac{1}{a}) \quad -(\quad -) \quad -$

$a \quad -(a \frac{1}{a}) \quad -(\quad -) \quad -(\quad -) \quad - \quad - \quad - \quad /$



GamBeGam-Darsi

$$a_n = -(a_n \frac{1}{a_n}) ; a$$

$$a = -(a \frac{1}{a}) = -(1) = -1$$

$$a = -(a \frac{1}{a}) = -(1) = -1$$

$$a_n = -(a_n \frac{1}{a_n}) ; a$$

$$a = -(a \frac{1}{a}) = -(1) = -1$$

$$a = -(a \frac{1}{a}) = -(1) = -1$$

$$a_n = a_n (n) ; a$$

$$a$$

$$n = a \cdot a ()$$

$$n = a \cdot a ()$$



گام به گام داری
GamBeGam Darsi

$p_n \quad p_n \quad \neg p_n \quad ; \quad p$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg()$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg()$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad \neg() \quad / \quad /$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad / \quad \neg(/)$
 $/ \quad / \quad / \quad /$

$n \quad p \quad p \quad \neg p \quad / \quad \neg(/)$
 $/ \quad / \quad / \quad /$



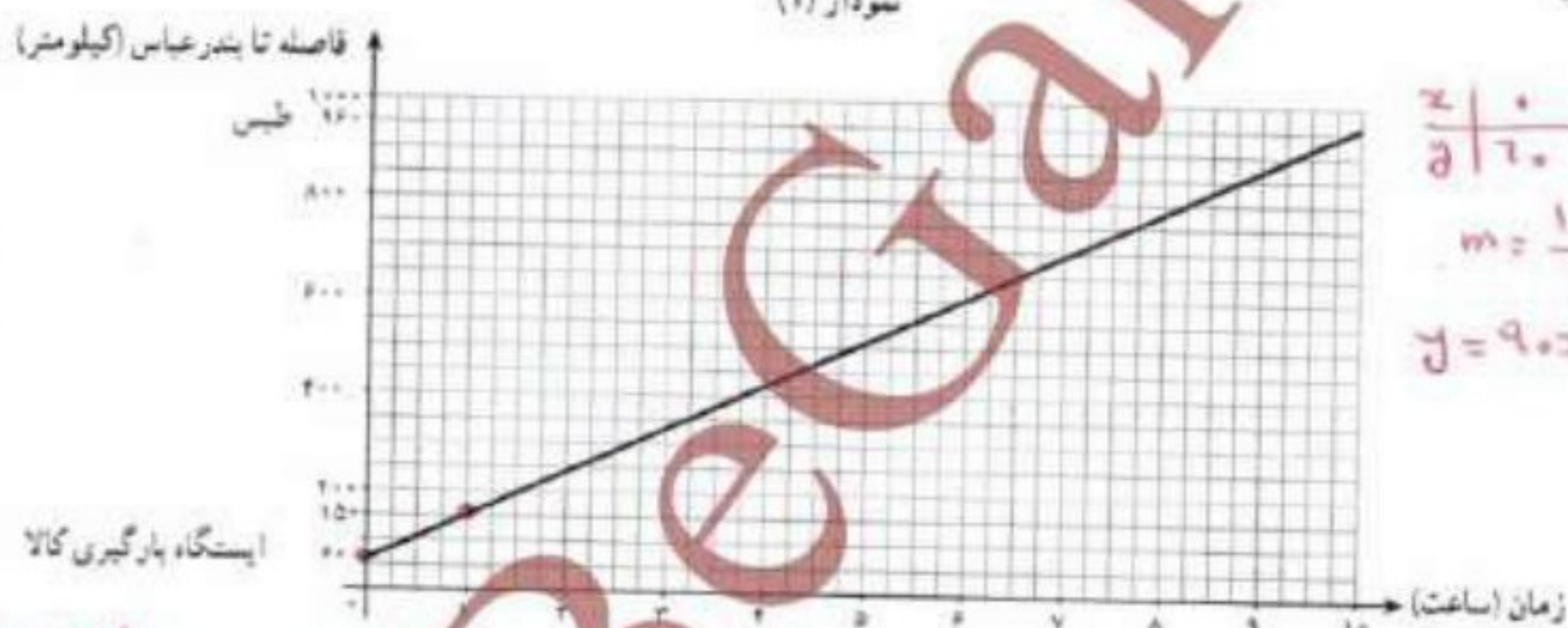
درس ۲

دنباله‌های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طیس حرکت می‌کند.

نمودار (۱)



$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 0 & 60 \\ 1 & 150 \end{array}$$

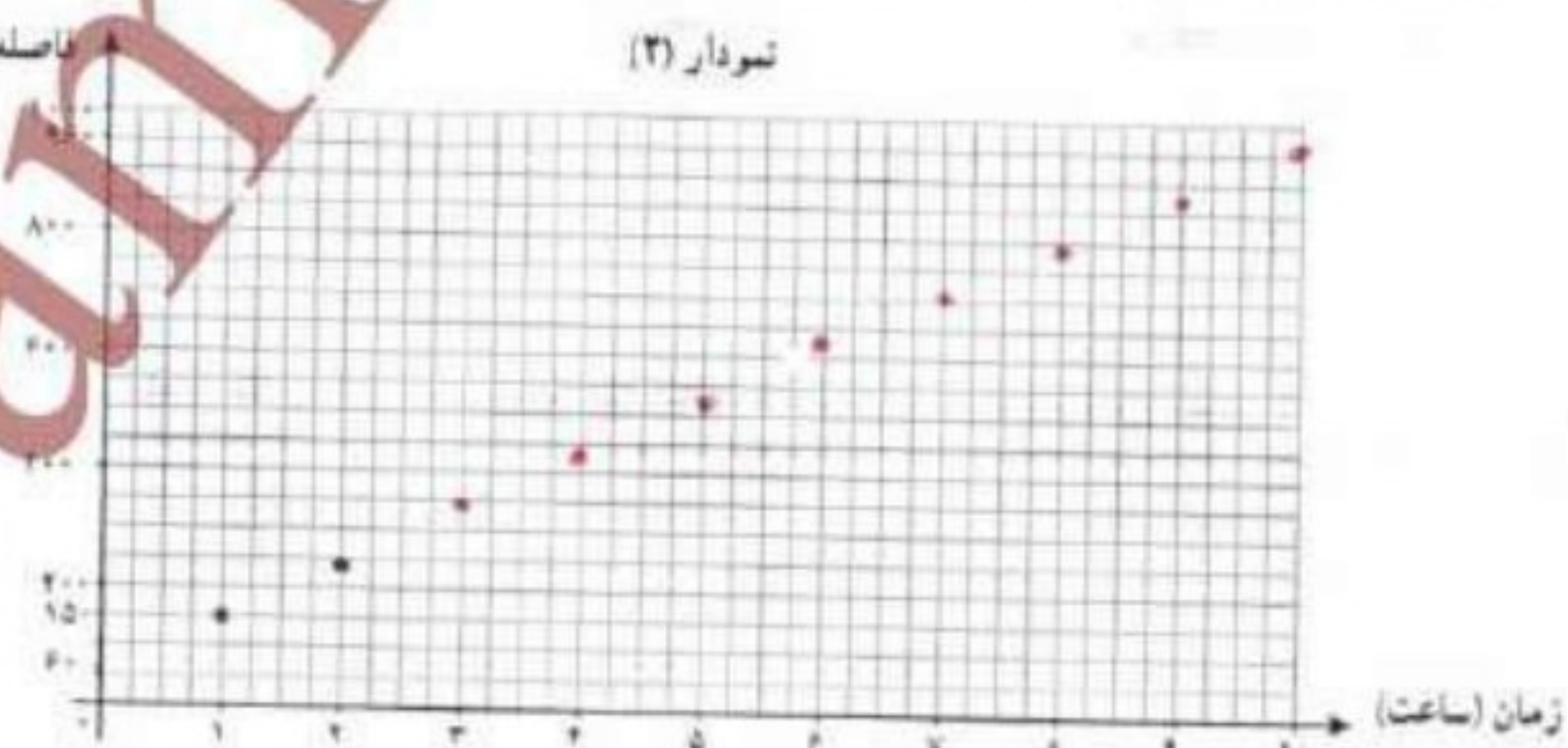
$$m = \frac{150 - 60}{1 - 0} = 90$$

$$y = 90x + 60$$

$$y = 90x + 60$$

الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید.
 ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر ساعت را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

نمودار (۲)



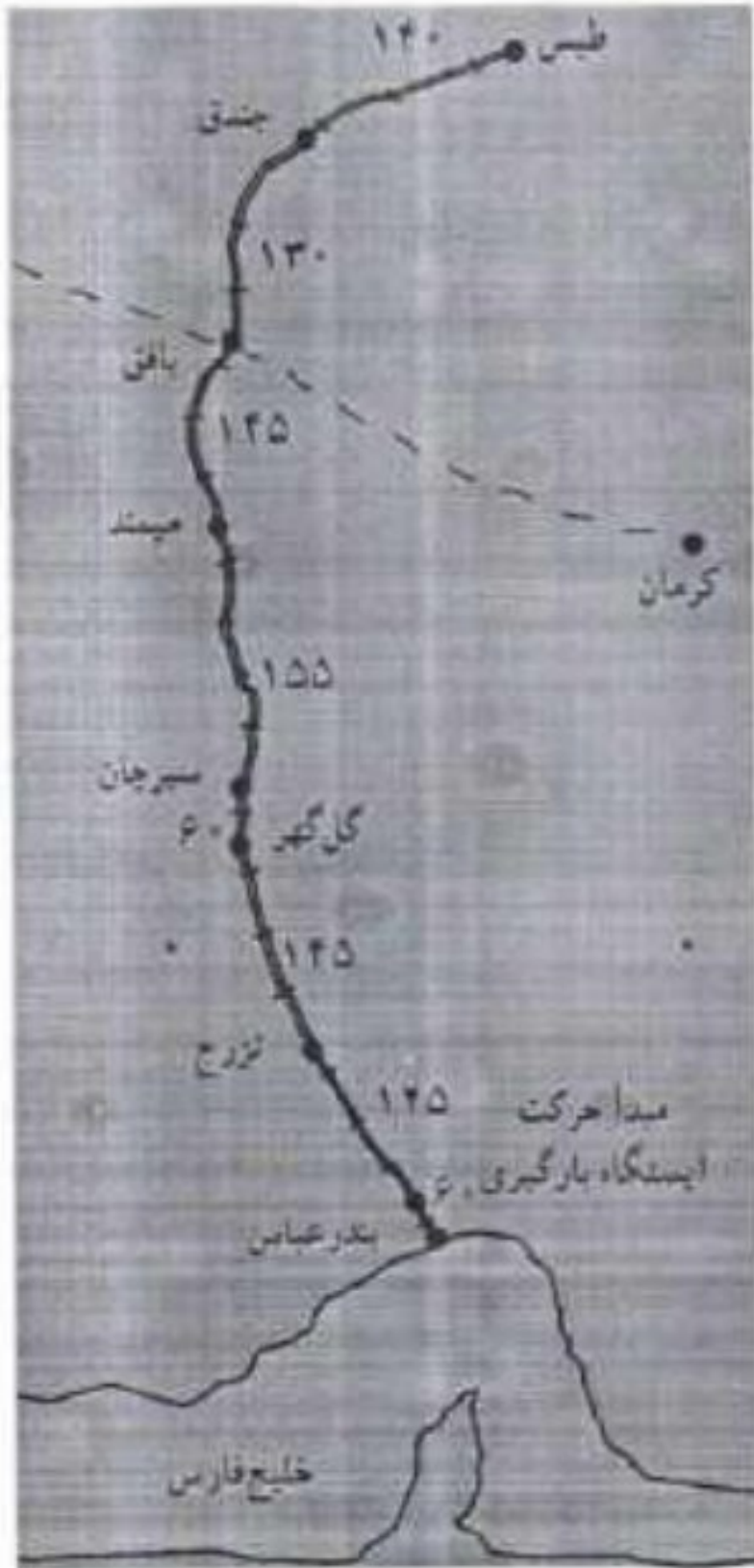
ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

۶۹

دامنه و برد نمودار (۱) زیر مجموعاً از اعداد حقیقی است.
 ولی دامنه و برد نمودار (۲) زیر مجموعاً از اعداد طبیعی است.



د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.



جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	$۱۸۵ + ۱۴۵ = ۳۳۰$
گل گهر - سرجان	۶۰	$۳۳۰ + ۶۰ = ۳۹۰$
سرجان - میمند	۱۵۵	$۳۹۰ + ۱۵۵ = ۵۴۵$
میمند - بافتی	۱۴۵	$۵۴۵ + ۱۴۵ = ۶۹۰$
بافتی - جندق	۱۳۰	$۶۹۰ + ۱۳۰ = ۸۲۰$
جندق - طبس	۱۴۰	$۸۲۰ + ۱۴۰ = ۹۶۰$

ه) با فرض اینکه n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰$	$a_2 = a_1 + ۹۰ = ۱۵۰ + ۹۰ = ۲۴۰$	$a_3 = a_2 + ۹۰ = ۲۴۰ + ۹۰ = ۳۳۰$	$a_4 = a_3 + ۹۰ = ۳۳۰ + ۹۰ = ۴۲۰$	$a_5 = a_4 + ۹۰ = ۴۲۰ + ۹۰ = ۵۱۰$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = a_5 + ۹۰ = ۵۱۰ + ۹۰ = ۶۰۰$	$a_7 = a_6 + ۹۰ = ۶۰۰ + ۹۰ = ۶۹۰$	$a_8 = a_7 + ۹۰ = ۶۹۰ + ۹۰ = ۷۸۰$	$a_9 = a_8 + ۹۰ = ۷۸۰ + ۹۰ = ۸۷۰$	$a_{10} = a_9 + ۹۰ = ۸۷۰ + ۹۰ = ۹۶۰$

و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاهها محل تماس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

ایستگاه بافتی - مقایسه مسافت و فاصله

از دو جدول ۶۲

فاصله ۶۹۰ کیلومتری $a_7 = ۶۹۰$

۵

ز با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + \dots + 9 \cdot 6 \\ a_7 = a_1 + \dots + 2 \dots \times 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + \dots + 9 \cdot 4 \\ a_5 = a_1 + \dots + 4 \dots \times 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_1 + \dots + 9 \cdot 10 \\ a_{11} = a_1 + \dots + 10 \dots \times 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 = a_1 + \dots + 9 \cdot 7 \\ a_8 = a_1 + \dots + 7 \dots \times 9 \end{cases}$$

$$(n-1) \cdot 9$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 9 \quad (1)$$

$$a_n - a_{n-1} = \dots + 9 \cdot 1 \quad (\text{رابطه بازگشتی})$$

$$a_n - a_m = (n-m) \cdot 9$$

ح) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟ اما چه شدن ۹۰ به هر جمله برای تعیین a_n بوی (ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با رابطه جمع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 9$$

$$\rightarrow a_n = a_1 + 9n - 9$$

$$a_1 = 15 \rightarrow a_n = 9n + 6$$

$$y = 9x + 6$$

دنباله حسابی

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه‌ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله n ام این دنباله با رابطه $a_n = a + (n-1)d$ معرفی می‌شود.

« d » را اختلاف مشترک دنباله حسابی می‌نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن این است که اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

۱. Arithmetic Sequence
Common Difference



کار در کلاس

$$a_{n+1} - a_n = d$$

۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک» d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟
 ۳. جدول زیر را کامل کنید.
 اگر d مثبت باشد، a_n افزایشی و اگر d منفی باشد، a_n کاهشی هستند.
 در آن d صفر باشد، a_n مساوی است.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
۱	۲	۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...	$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	-۳	۴, ۱, -۲, -۵, -۸, ...	$a_n = 4 + (n-1)(-3)$
۴	$-\frac{1}{2}$	$4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2, \dots$	$a_n = 4 + (n-1)(-\frac{1}{2})$
-۳	۵	-۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ...	$a_n = -3 + 5(n-1)$

کار در کلاس

قنات با کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیر زمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادر چاه» به دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مفتی در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.



در یک منطقه، مفتی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول ۲۹/۵ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مفتی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

۱. مفتی: به کس می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

مفتی میله اول: ۳۰
 مفتی میله آخر: ۱/۵
 ۳۰, ۲۹, ۲۸, ۲۷, ۲۶, ۲۵, ۲۴, ۲۳, ۲۲, ۲۱, ۲۰, ۱۹, ۱۸, ۱۷, ۱۶, ۱۵, ۱۴, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲, -۳, -۴, -۵, -۶, -۷, -۸, -۹, -۱۰, -۱۱, -۱۲, -۱۳, -۱۴, -۱۵, -۱۶, -۱۷, -۱۸, -۱۹, -۲۰, -۲۱, -۲۲, -۲۳, -۲۴, -۲۵, -۲۶, -۲۷, -۲۸, -۲۹, -۳۰

$$a_n = a_1 + (n-1)(-1/5)$$

تعداد چاه‌ها = n

$$\rightarrow -29 = -1/5n \rightarrow n = 58$$

$$\rightarrow 1,5 = 30 + (n-1)(-1/5) \rightarrow 1,5 - 30 = -1/5n + 1/5 \rightarrow -28,5 - 1/5 = -1/5n$$

خواندنی سوی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نو، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سرزمینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان که در سفرنامه ناصرخسرو به قنات گناباد اشاره شده است: قناتی با عمق مادر جاه بیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزارساله.

حفر صدها جاه و ایجاد هزاران متر کانال قنات برای انتقال آب حتی با وسایل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همناست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید بیش از هر چیز بیانگر عشق نیاکان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عظیم بی‌آبی را نه تنها علتی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با دانش و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر مکعب خاک را از اعماق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی‌شان فراهم سازند. تنها با نگاه به یکی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارج یزد که برای ایجاد آن بیش از هشتاد هزار متر کانال و جاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز بیش از دو یا سه متر حفاری انجام نمی‌داده است، متحس می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز در هر لحظه آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روزه خود را با لباس سفید و اشهدگویان شروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شیبی ملایم هنگام حفر کانال و به کمک گرانش زمین نیازی به وجود پست برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسایل مهندسی



امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادن این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون جاه‌ها را ممکن می‌ساخته است. زیرا آن رو که در سدهای آبی مفادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با بستن آب در انتهای یکی از میله جاه‌ها، آب را توسط جاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نیل به توسعه پایدار، نوشته شده است: قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست کم به ۸۰۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و نزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد.

بیش از ۴۰ هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها شاید بخشی از راه‌حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشند؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکانمان با شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

۱. طبق گزارش‌های رسمی، مانگین بارش جوی کشور ۴۱۳ میلیارد متر مکعب است که نزدیک به ۲۹۶ میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر بخواهیم منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین نزدیک به ۳۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

فعالیت

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3 + 2(1-1) = 3 + 0 = 3$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = 6$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 3 + 2(2-1) = 3 + 2 = 5$$

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

$$n=3 \rightarrow a_3 = 3 + 2(3-1) = 3 + 4 = 7$$

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می‌کنند؟

$$m = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

برای

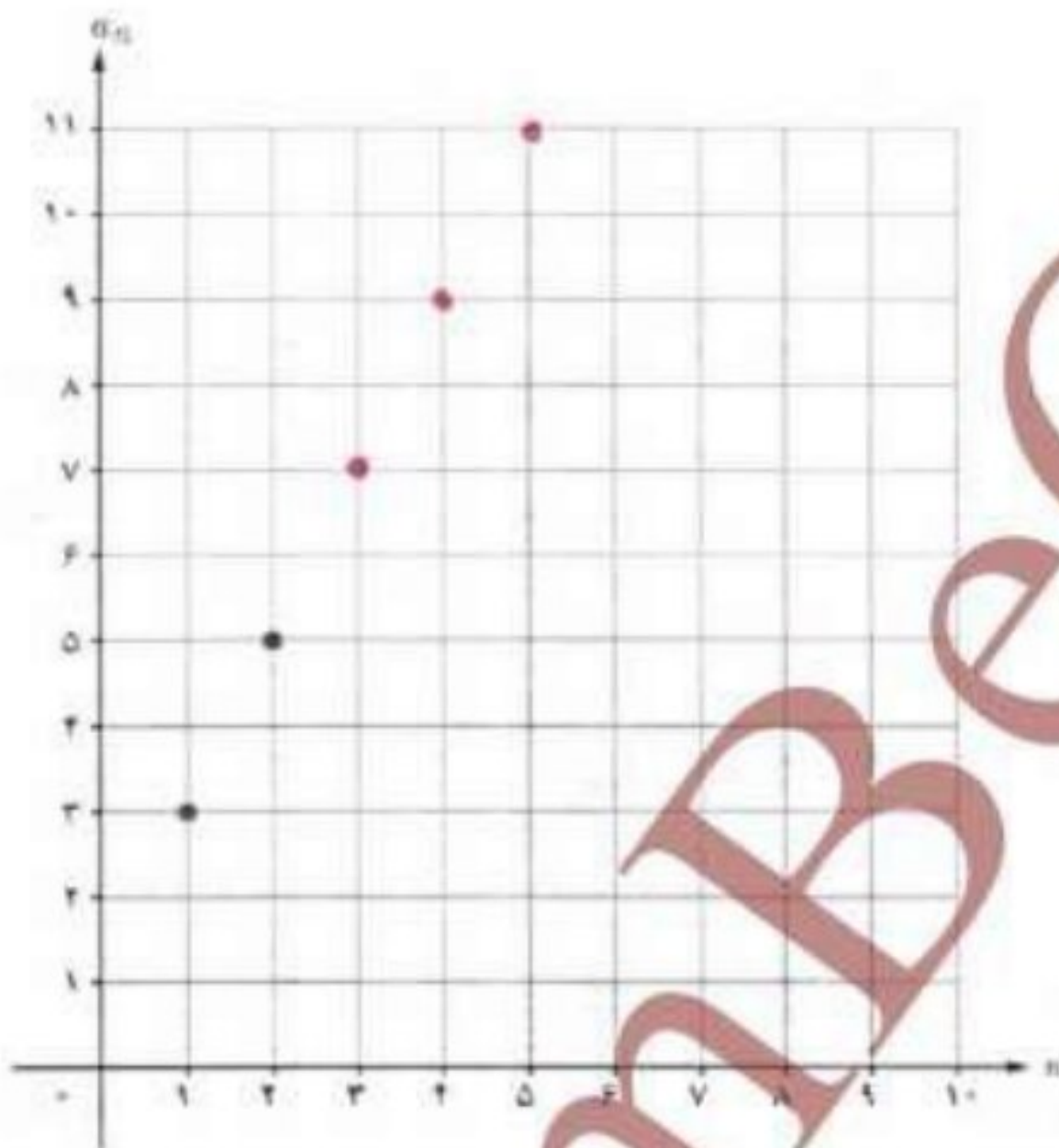
$$y = 2x + 1$$

معادله خط

ج) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

$$d = m = 2$$

مساویند.



اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	1, 3, 5, 7	
$y = -x + 2$	$a_n = -n + 2$	3, 2, 1, 0, ...	
$y = x - 2$	$a_n = n - 2$	-1, 0, 1, 2, ...	
$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	$a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}$	-2, -3/2, -1, -1/2	

خط مشابیه

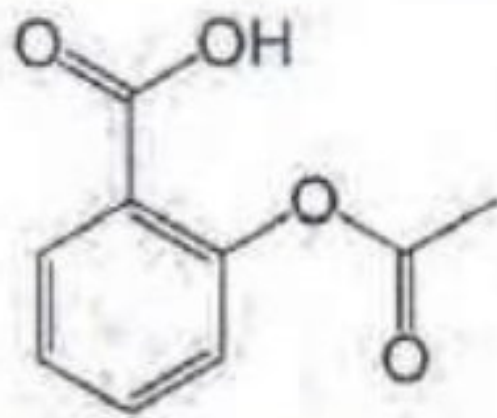
$$y = mx + h$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عرض از مبدأ

$$h = y_1 - mx_1$$

فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود. اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵ میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونس کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳ میلی‌گرم می‌شود؟

ب) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳ میلی‌گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲۶۰۰,۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانه او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)
با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنبالهٔ عددی بی‌روی می‌کند. زیرا:



بنابراین، اگر a_n میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر با مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطه

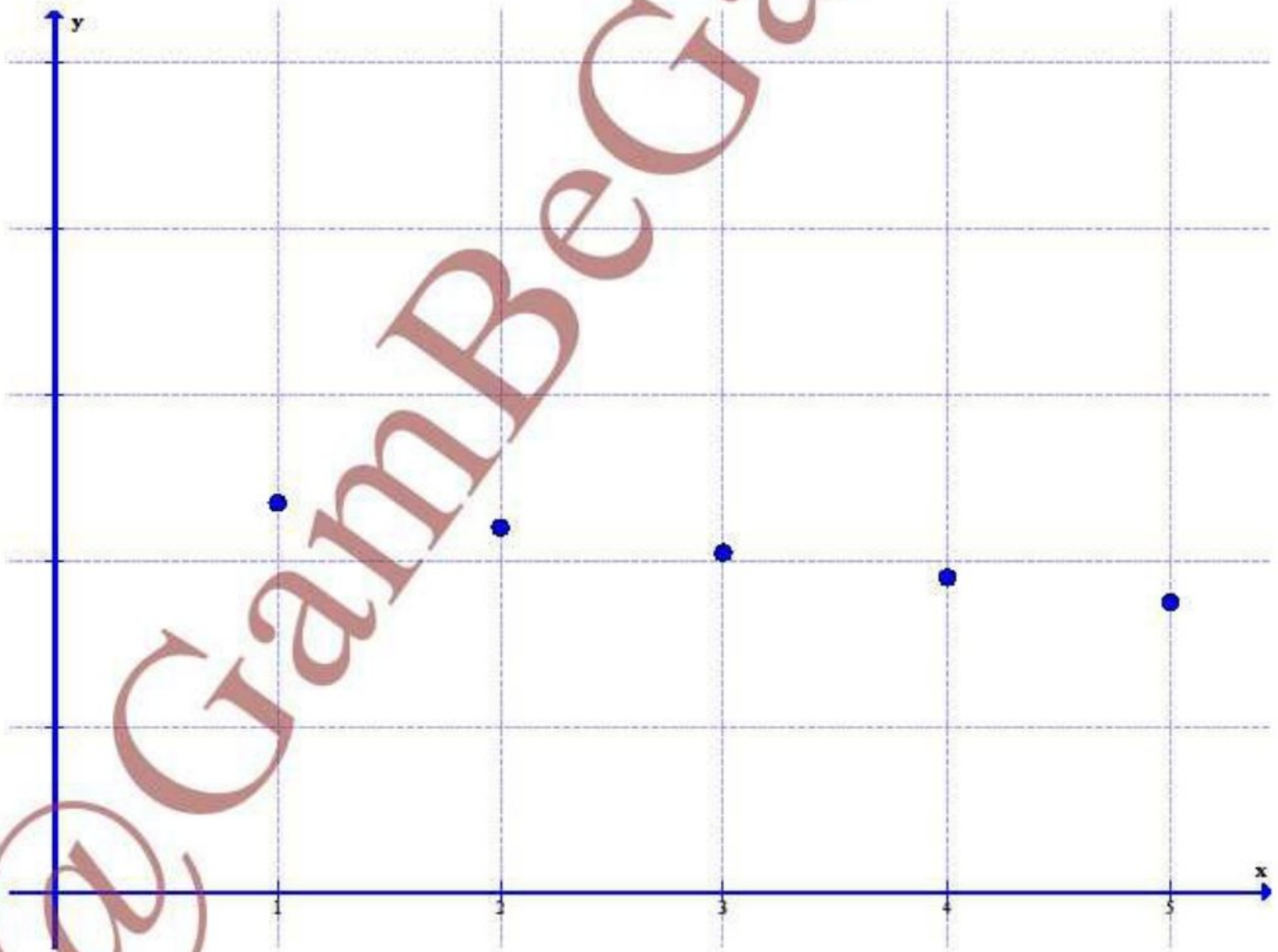
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

باید باشد

۱. این داروها را در فاروناسی Zero Order Kinetics می‌نامند.

a a a ...

a_n n a_n n a_n n a_n n



مجموع n جمله اول یک دنباله عددی

در فعالیت «محاسبه تعداد جاه‌های قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ جاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, 2/5, 29/5, 29, \dots, 30$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مفتی در هر روز بتواند ۲ متر جاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مفتی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع جاه‌های گفته شده را حفر کند.

الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ جاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق جاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمیق‌ترین جاه و بار دیگر از کم عمیق‌ترین تا عمیق‌ترین جاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\text{مجموع ۵۸ جاه از مادر جاه تا آخرین میله} : S_{58} = 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5$$

$$\text{مجموع ۵۸ جاه از آخرین میله تا مادر جاه} : S_{58} = 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30$$

$$2S_{58} = 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مفتی روزانه ۲ متر جاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/75 = \text{تعداد روز برای پایان کار}$$

بنابراین، مفتی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع جاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

$d=5$
 a_1, a_2, \dots, a_n
 ۱۹۹ و ۹ و ۴ و ۱- (الف)

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.
 $a_n = a_1 + (n-1)d$
 $199 = -1 + (n-1)(5) \rightarrow 200 = 5n - 5 \rightarrow 5n = 205 \rightarrow n = \frac{205}{5} = 41$
 $S_{41} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 8405$

ب) $a_{n+1} = 5 + a_n, a_1 = -2$

$S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)
 $-2, 3, 8, 13, 18, \dots, n=10$
 $d=5$
 $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$
 $S_{10} = \frac{10}{2}(2(-2) + (10-1)(5)) = 5(-4 + 45) = 205$

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$a_1 = 1, a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(2) = 2n-1$
 $a_{30} = 2(30) - 1 = 59$

$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15(1 + 59) = 900$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای دانستن سالتی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

۱۵, ۱۸, ۲۱, ...

$S_n = 870, d=3, a_1=15$
 $n = ?$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow 870 = \frac{n}{2}(30 + 3n - 3)$
 $870 = \frac{n}{2}(27 + 3n)$
 $\rightarrow 1740 = n(27 + 3n)$
 $\rightarrow 3n^2 + 27n - 1740 = 0$

با توجه به معلوم بودن $S_n = 870$ برای به دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

با جای گذاری $d=3, a_1=15$ در رابطه بالا $n = ?$ به دست می‌آید.

$\rightarrow n^2 + 9n - 580 = 0 \rightarrow (n-20)(n+29) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=20 \\ n=-29 \end{cases}$

۷.

چون نباید عدد طبیعی باشد



تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

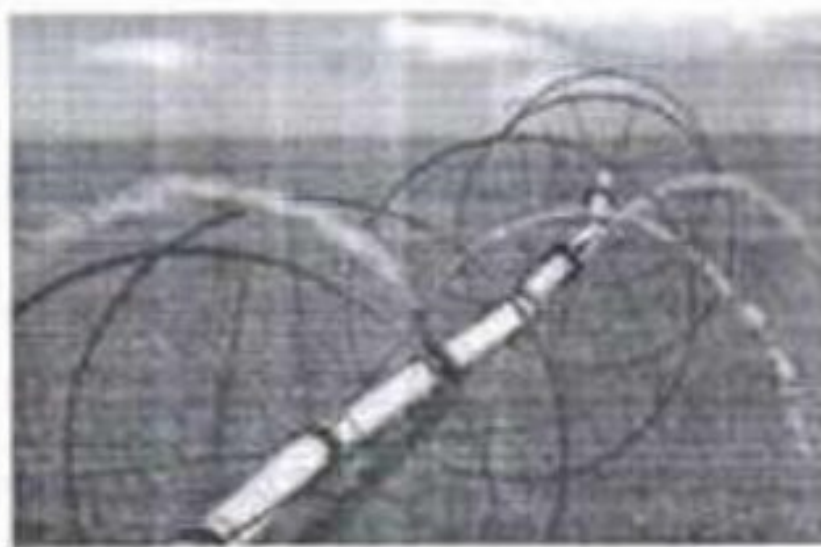
ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$

د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

۵. در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن 12500 گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین 1875 گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b عدد m را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید

اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{m+1}$ به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(m+2)$ جمله است.)

۷. براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد 1 و 18 قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

الف) 1 و 5 و 9 و 13 و 17 و 21

ب) 13 و 17 و 21 و 25 و 29 و 33



۹. باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

۱۰. ارزش امروزی قنات زارج طولانی‌ترین قنات ایران - عمق مادرچاه قنات زارج $84/6$ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد پله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو پله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفرشده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفرشده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارج در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵۰ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارج چقدر است؟ راهنمایی: «۱» را عمق چاه «۱» تا کانال قنات و «۱» را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.



پاسخ:

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر $29858/4$ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات 894.6 متر

ج) ۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

د) ۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

n	a a
n	a a
n	a a
n	a a
n	a a

a k

k k k k k k

k

a_n a $(n) d$ $(n) ()$ n

n n n n

a_n a $(n) d$ a a a a d a d
 a a d a d

$(a$ $d)$ $(a$ $d)$ d d
 a d a a

a_n a $(n) d$ a $() ()$

a	a	a		a

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$S = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)d)$$

a

a

a

a

d a

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$a = \frac{S}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$$

b

a

m a b

n m

$$a = \frac{S}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$$

a_n b

$$(n - 1)d = b - a \implies d = \frac{b - a}{n - 1}$$

$$d = \frac{b - a}{m - 1}$$

$$b - a + (n - 1)d$$

a

b

$$n \frac{b + a}{d}$$

$$n \frac{b + a}{d} \text{ ———}$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) \text{ — ()}$$

$$n \frac{b + a}{d} \text{ ———}$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) \text{ — ()}$$

$$n \frac{b + a}{d} \text{ ———}$$

$$S = \frac{n}{2}(a + b) \text{ — ()}$$

/

@GambBe

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

دنباله هندسی

درس ۱

توان های گویا

درس ۲

تابع نمایی

درس ۳

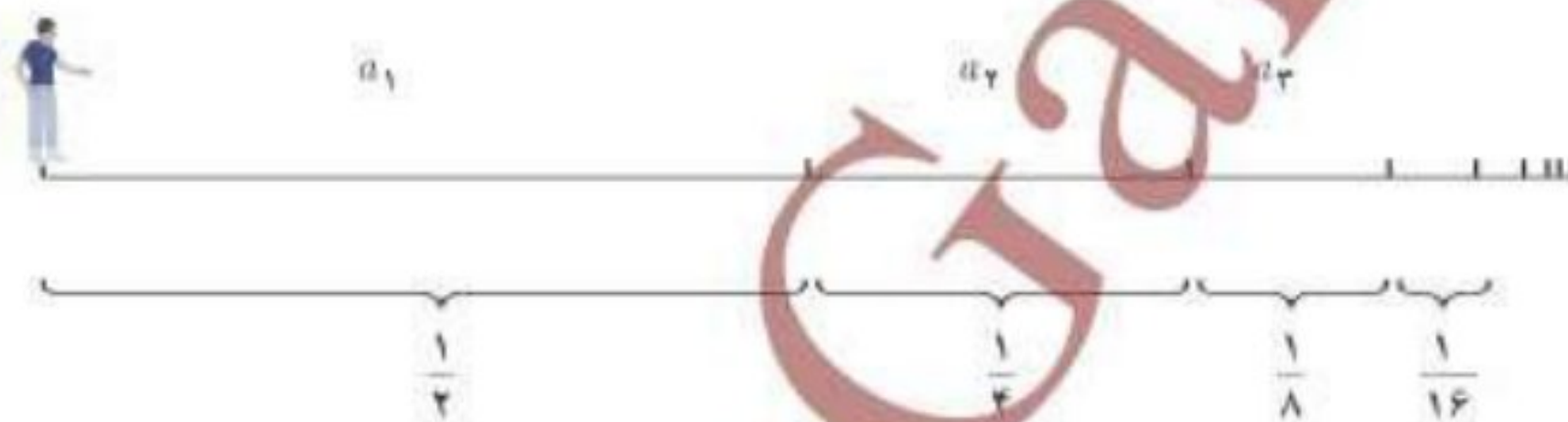
توابع نمایی در مدل سازی بسیاری از پدیده های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل ها، بیماری های واگیردار، شدت اصوات و زلزله ها کاربرد دارند.

درس ۱

دنباله هندسی^۱

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟ این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنون^۲، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنون معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسافت باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله‌ها نصف فاصله پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود. به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{4}$ و نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{16} + \dots$$

و چون جملات دنباله \dots و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{16}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است! از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود^۳. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد ساختاری به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

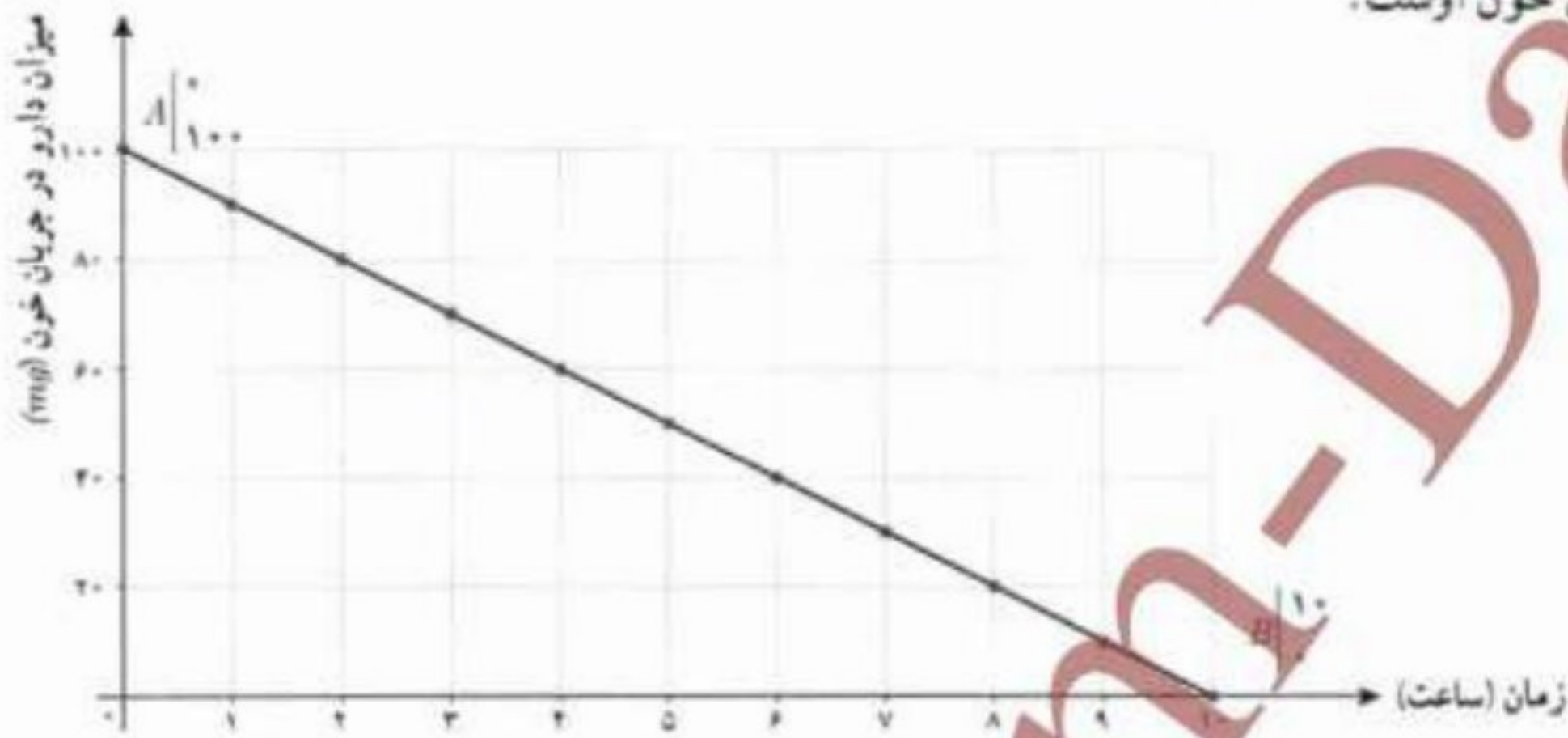
۱. Geometric Sequence

۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برنکور، نیوتن و اولر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایج دقیق برای حل این مسائل یافتند.

فعالیت

همان طور که در فعالیت صفحه ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی گرم از داروی A، در هر ساعت ۱۰ میلی گرم آن را حذف کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون اوست.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشند، با توجه به کاهش ۱۰ میلی گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت:

$$a_1 = 100 \quad a_{n+1} = a_n - 10$$

پس، برای تعیین ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده:

$$m_{AB} = \frac{0 - 100}{10 - 0} = -10$$

نهیة کننده:

$$h = 100 = \text{عرض از مبدأ} \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ضابطه تابعی دنباله را به کمک رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می توان مشخص کرد؛ زیرا:

$$a_1 = 100 \quad \Rightarrow a_n = 100 + (n-1)(-10) \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

کاهش ثابت ۱۰ میلی گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو: $d = -10$

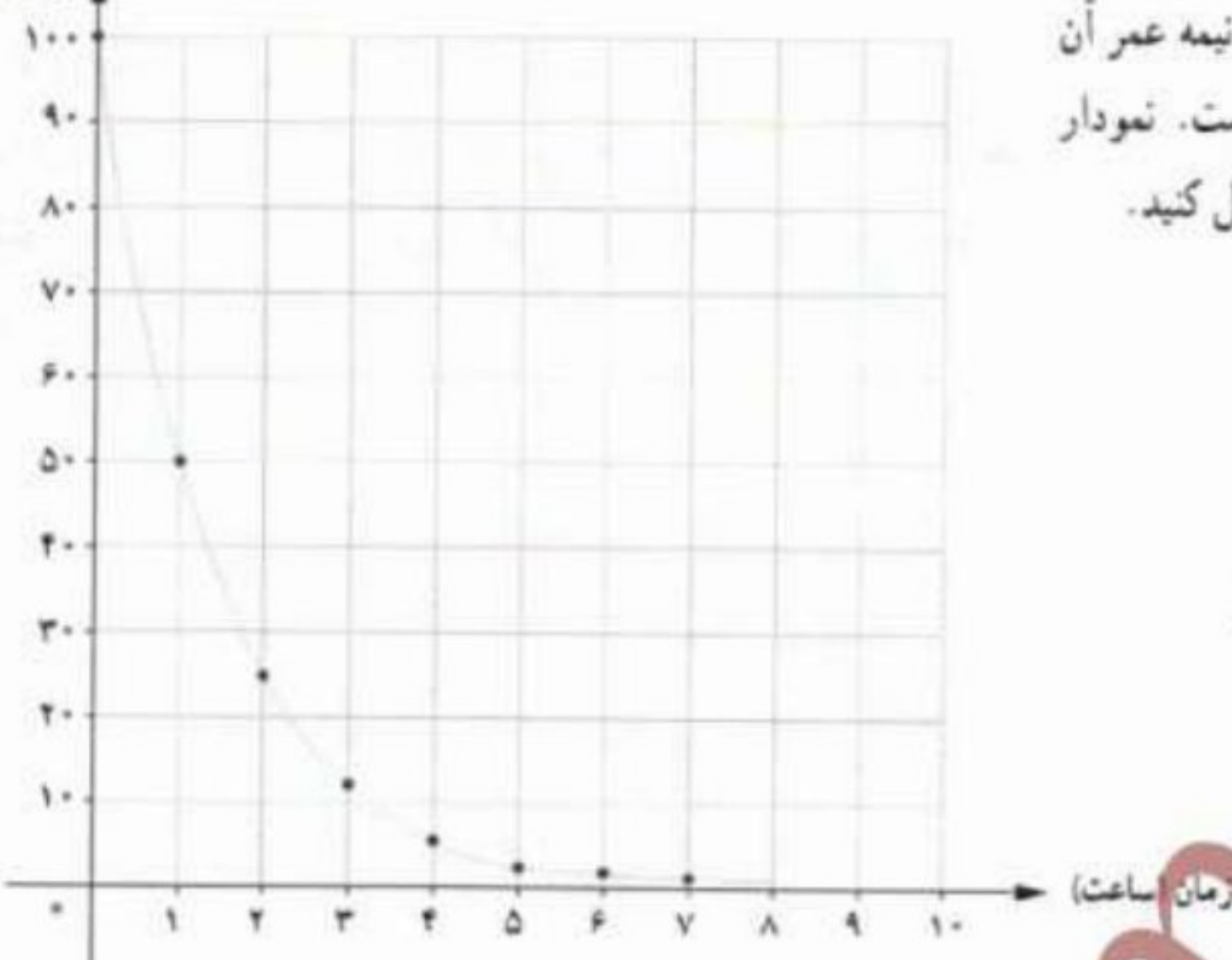
میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی شود و در تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می یابد. فعالیت صفحه بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطه تابعی دنباله مشخص می کند.

۱- اثر این دارو را First Zero Kinetics می نامند.

۲- نیمه عمر یک دارو (Half-life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{1/2}$ نشان می دهند.

فعالیت

میزان دارو در خون (mg)



شخصی ۱۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» را کامل کنید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟ پس از ۳ نیمه عمر - صید - با افزایش زمان میزان دارو در بدن کم و کمتر می شود و هرگز به صفر نمی رسد. اما صفر نمی شود.

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت \dots در جمله پیشین به دست می آید؛ یعنی:

$$a_1 = 50 \quad a_{n+1} = \dots \cdot a_n$$

ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 50 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 50 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 50 \quad a_4 = \dots$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times 50$$

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

- در درمان بیماری های عفونی، آنتی بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.
- در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.
- کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص های آرام بخش استفاده می کنند باید در طول روز شاداب و سر حال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

به دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می آید، دنباله هندسی گفته می شود. عدد ثابت را نسبت مشترک می نامند و عموماً با r نشان می دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	رابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1$	$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = (\frac{3}{2})^{n-1} (\frac{1}{81})$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{2}$	$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = (-\frac{1}{2}) a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 (-\frac{1}{2})^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{5})^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 (\frac{1}{4})^{n-1}$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:

- | | | | |
|---------------------------------------|---|---|---|
| الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ، | <input type="checkbox"/> افزایشی | <input checked="" type="checkbox"/> کاهشی | <input type="checkbox"/> ثابت است. |
| ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، | <input checked="" type="checkbox"/> افزایشی | <input type="checkbox"/> کاهشی | <input type="checkbox"/> ثابت است. |
| ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، | <input type="checkbox"/> افزایشی | <input type="checkbox"/> کاهشی | <input checked="" type="checkbox"/> ثابت است. |

n	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow$	n	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.15 \Rightarrow$
1	1×0.15	5	0.6761×0.15
2	0.9×0.15	6	0.59049×0.15
3	0.81×0.15	7	0.521441×0.15
4	0.729×0.15	8	0.46415841×0.15

ادامه قسمت د

هشت سال پس از خرید $n > 7 \Rightarrow$

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی a, ar, ar^2, ar^3, \dots را مشخص کنید.

$a_{n+1} = r a_n$ $a_1 = a$

کار در کلاس

هزینه استهلاک^۱ - شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$v_1 = 960,000$ $v_2 = 960,000 \times \frac{90}{100} = 864,000$ $v_3 = 777,600$ $v_n = 940,000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟
 با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین در ۲۰ سالگی کاهش ارزش یخچال کمتر می‌شود.

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه v_n را به گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود.

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

راه‌نمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < 480,000$ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.

$940,000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 480,000 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$

ه) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

$a_{n+1} = a_n - k$ $a_{n+1} = k a_n$

۱. Depreciation Cost

بیانگر دنباله حسابی است. بیانگر دنباله هندسی است.

زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله کمتر شود اما بیانگر آن که k درصد کسر شود، مقدار جملات کم و کمتر می‌شود اما هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

$$r = \frac{1}{2} \quad a_n = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

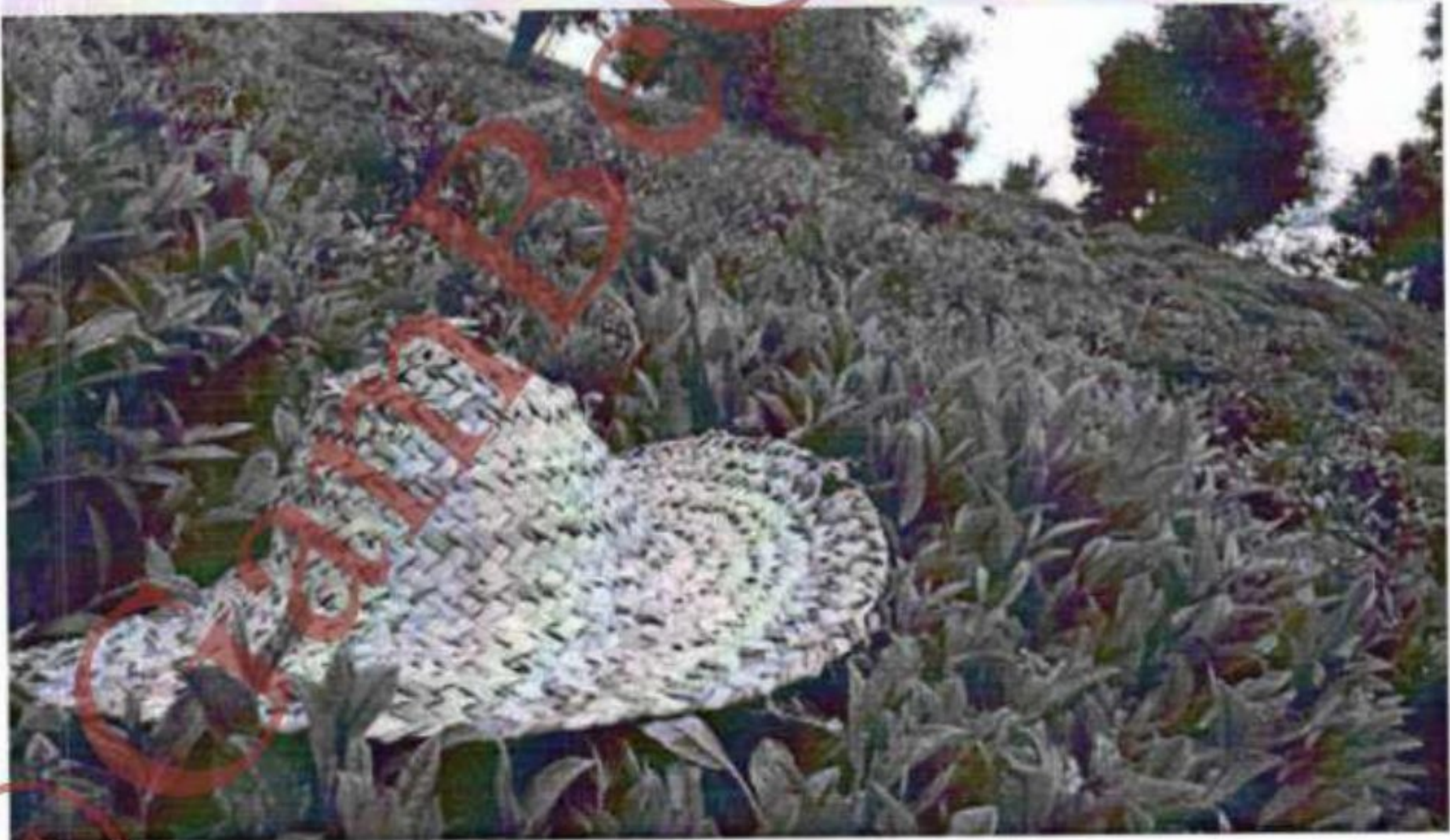
$$80 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{0.5}{80} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{160}$$

خواندنی برای بدست آوردن چند نیمه عمر می‌توان مانند کار در کلاس قبلی جدول تشکیل داد

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به سبب وجود ماده کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازه کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و ... می‌گردد. مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل توصیه پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازه آنهاست.

توجه به نیمه عمر ماده کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



$$\frac{0.5}{80} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} > 160 \Rightarrow 2^{n-1} > 5 \times 2^5 \Rightarrow 2^{n-4} > 5 > 2^2$$

$$n-4 > 2 \Rightarrow n > 6 \Rightarrow \text{۹ نیمه عمر یا بیشتر}$$

$$9 \times 2 = 18 \text{ ساعت یا بیشتر}$$

فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل 80 میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.
 ب) با یک رابطه بازگشتی میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.
 ج) آیا می توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)
 د) با جای گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر S_n میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشند، با توجه به فرض های مسئله :

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی گرم)
1	15 بهمن	00:00 بامداد	$S_1 = 80 \text{ mg}$
2	15 بهمن	08:00 صبح	$S_2 = \frac{1}{4} S_1 + 80 = 20 + 80 = 100$
3	15 بهمن	16:00 بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{4} S_2 + 80 = 25 + 80 = 105$
4	16 بهمن	00:00 بامداد	$S_4 = \frac{1}{4} S_3 + 80 = 26.25 + 80 = 106.25$
5	16 بهمن	08:00 صبح	$S_5 = \frac{1}{4} S_4 + 80 = 26.56 + 80 = 106.56$
6	16 بهمن	16:00 بعد از ظهر	$S_6 = \frac{1}{4} S_5 + 80 = 26.64 + 80 = 106.64$

ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می شود:

$$S_{n+1} = \dots + \frac{1}{4} S_n \quad S_1 = \dots$$

ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی بیوتیک هر قرص را A میلی گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A=80$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{4} S_1 = \dots$$

$$S_3 = A + \frac{1}{4} S_2 = A + \frac{1}{4} (A + \frac{1}{4} A) = A + \frac{1}{4} A + (\frac{1}{4})^2 A$$

۸۰

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به همین صورت برای محاسبه S_n :

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضرب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n A \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = A - \left(\frac{1}{4}\right)^n A \Rightarrow \frac{3}{4}S_n = A(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{4}{3}A(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A = 160$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف:

$$S_n = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

(د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 160 \times \frac{3}{4} = 120$$

$$S_2 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 160 \cdot \frac{15}{16} = 150$$

$$S_3 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right) = 160 \cdot \frac{63}{64} = 157.5$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم مشخص کنیم:

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه:

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{a - ra_n}{1-r}$$

به دست می آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحه پیش:

(الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

$$a = 160 \quad r = \frac{1}{4}$$

(ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_n و S_n چیست؟

$$a_n = 160 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

۸۱

$$S_n = 160 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$

a_n : میزان یا مقدار مانده از هر قرص پس از ۲۴ ساعت مصرف است

S_n : میزان باقی مانده از قرص پس از ۲۴ ساعت از مصرف اولین قرص

$$S_3 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (\frac{1}{5})^3}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{1} \left(\frac{121}{125} \right) = \frac{484}{125}$$

$$S_9 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (\frac{1}{5})^9}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{1} \times \frac{1121 - 1}{125} = \frac{2240}{125}$$

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} \right) =$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_6 = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^6)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \left(\frac{4096 - 1}{1024} \right) = \frac{4095}{1024}$ $S_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \left(\frac{4096 - 1}{4096} \right) = \frac{4095}{4096}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_n =$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_n = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - 5^n}{1 - 5} \right) = \frac{2}{5} \times \frac{1 - 5^n}{-4} = \frac{1024 - 1}{1024} = \frac{1023}{1024}$

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:
 الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.
 ب) حاصل S_5 را به دست آورید.

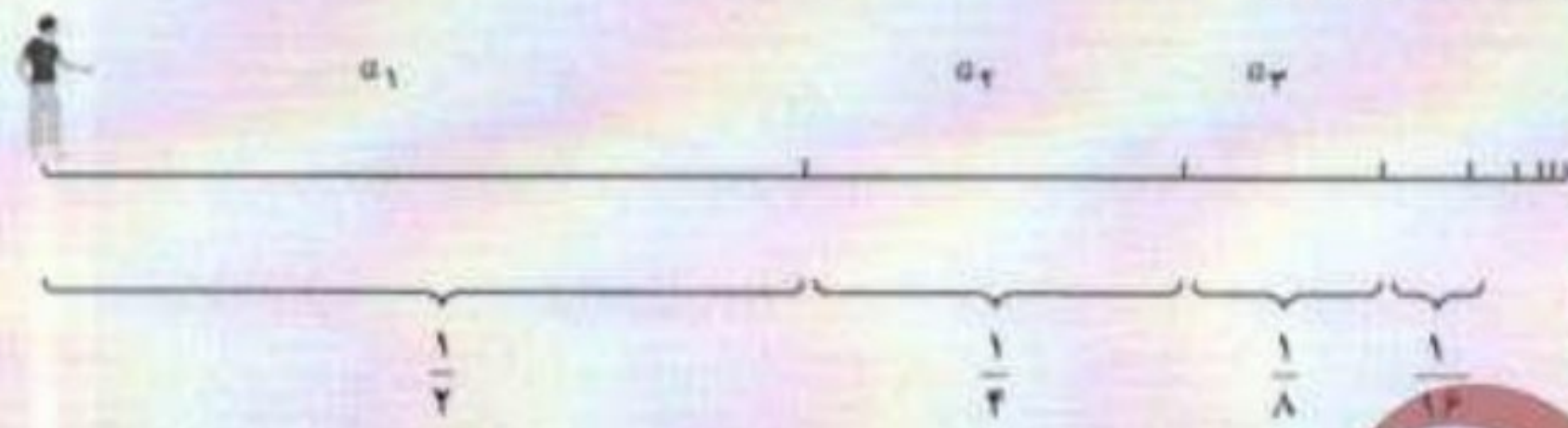


$$r = \frac{1}{2} \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$S_5 = 2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \times 2 \left(\frac{1024 - 1}{1024} \right) = \frac{1023}{512}$$

جواب تناقض (پارا دوکس) زنو



همان طور که خوانده شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنباله r^n بسیار بسیار کوچک می شود و می توانیم در حالتی که مجموع بی شمار جملات دنباله هندسی خواسته می شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از

$$\text{رابطه } T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots \text{ به دست آید که یک دنباله هندسی با نسبت مشترک } \frac{1}{2} \text{ است:}$$

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

$$\frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

چون n تا بی نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بی نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می توان صرف نظر کرد:

$$\frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t(1-\cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می پنداشت اگر بی شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی شمار جمله باید بی نهایت شود!

توجه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

⑤ a, b و نسبت n \Rightarrow $n+2$ $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+2} = ar^{n+1} \\ a_{n+2} = b \end{array} \right. \Rightarrow ar^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1} = (a_n)^2$ $a_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$

۲) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ $a_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

۳) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ $a_1 = 1$

$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

۴) $a_{n+1} = 2a_n$ $a_1 = 1$

$1, 2, 4, 8, \dots$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.)

$a, b, c \Rightarrow r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \times c$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

۲) $x(x+3) = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 3x - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی‌درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی‌درمانی هر بار ۶٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی‌درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

$10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^6 \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6}$

۵. میان دو عدد a و b عدد n را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهتمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۶) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots \Rightarrow r^4 = \frac{243}{27} \Rightarrow r^4 = 9 \Rightarrow a_7 = ar^6 = ar^4 \times r^2 = a_5 \times r^2 = 243 \times 9 = 2187$

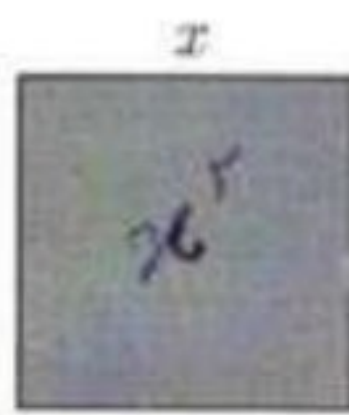
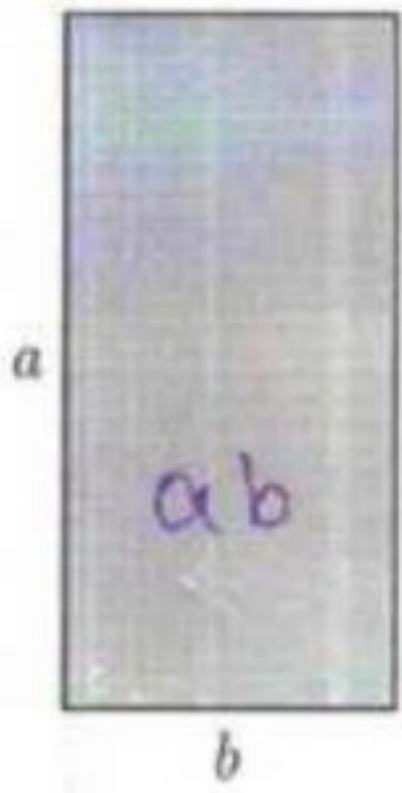
قسمت الف سوال ۴

$a_{22} = 10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{21} \Rightarrow a_7 = 10^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^{21} = 16 \times 10^{12}$

n	$\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$	n	$\left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow$
۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{0} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 1 < 7 \times 10^{-6}$	۸	$\left(\frac{4}{10}\right)^{7} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0000016777 \dots < 7 \times 10^{-6}$
۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.4 < 7 \times 10^{-6}$	۹	$\left(\frac{4}{10}\right)^{8} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0000006710 \dots < 7 \times 10^{-6}$
۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{2} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.16 < 7 \times 10^{-6}$	۱۰	$\left(\frac{4}{10}\right)^{9} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0000002684 \dots < 7 \times 10^{-6}$
۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{3} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.064 < 7 \times 10^{-6}$	۱۱	$\left(\frac{4}{10}\right)^{10} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0000001074 \dots < 7 \times 10^{-6}$
۵	$\left(\frac{4}{10}\right)^{4} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0256 < 7 \times 10^{-6}$	۱۲	$\left(\frac{4}{10}\right)^{11} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0000000429 \dots < 7 \times 10^{-6}$
۶	$\left(\frac{4}{10}\right)^{5} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.001024 < 7 \times 10^{-6}$	۱۳	$\left(\frac{4}{10}\right)^{12} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0000000171 \dots < 7 \times 10^{-6}$
۷	$\left(\frac{4}{10}\right)^{6} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000262144 < 7 \times 10^{-6}$	۱۴	$\left(\frac{4}{10}\right)^{13} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.00000000686 \dots < 7 \times 10^{-6}$

بعد از ۱۴ بار

$$8) a_{27} = 15000 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^{27-1} \Rightarrow a_5 = 15000 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^{5-1} = 15000 \cdot 0.52200625 = 7830.09375$$



۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

مربعی تر از $x^2 = ab$

x واسطه هندسی بین a و b است پس دنباله هندسی آن a, x, b باشد

- الف) x و b و a
 ب) a و x و b ✓
 پ) x و a و b

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد. الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.) ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

۲, ۴, ۸, ...

$a_1 = 2, r = 2$

ب) $S_n = 2 \times \frac{1-2^n}{1-2}$

$= -2 + 2^n = -2 + 2^4 = 2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$

الف) $a_n = 2^n$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$



$S_n = \frac{a_1 \cdot r a_n}{1-r}$

$S_n = \frac{1 - 4 \times 4^9}{1-4} = \frac{-14 \times 4^9}{-3} = 1544$

$a_1 = 1, r = 4$

۱۰. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4 \cdot 16$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$a_1 = \frac{1}{5}, r = \frac{1}{2}$

$S_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{2^8 - 1}{2^8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^8 - 1}{4 \cdot 5} = \frac{255}{20} = \frac{51}{4}$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

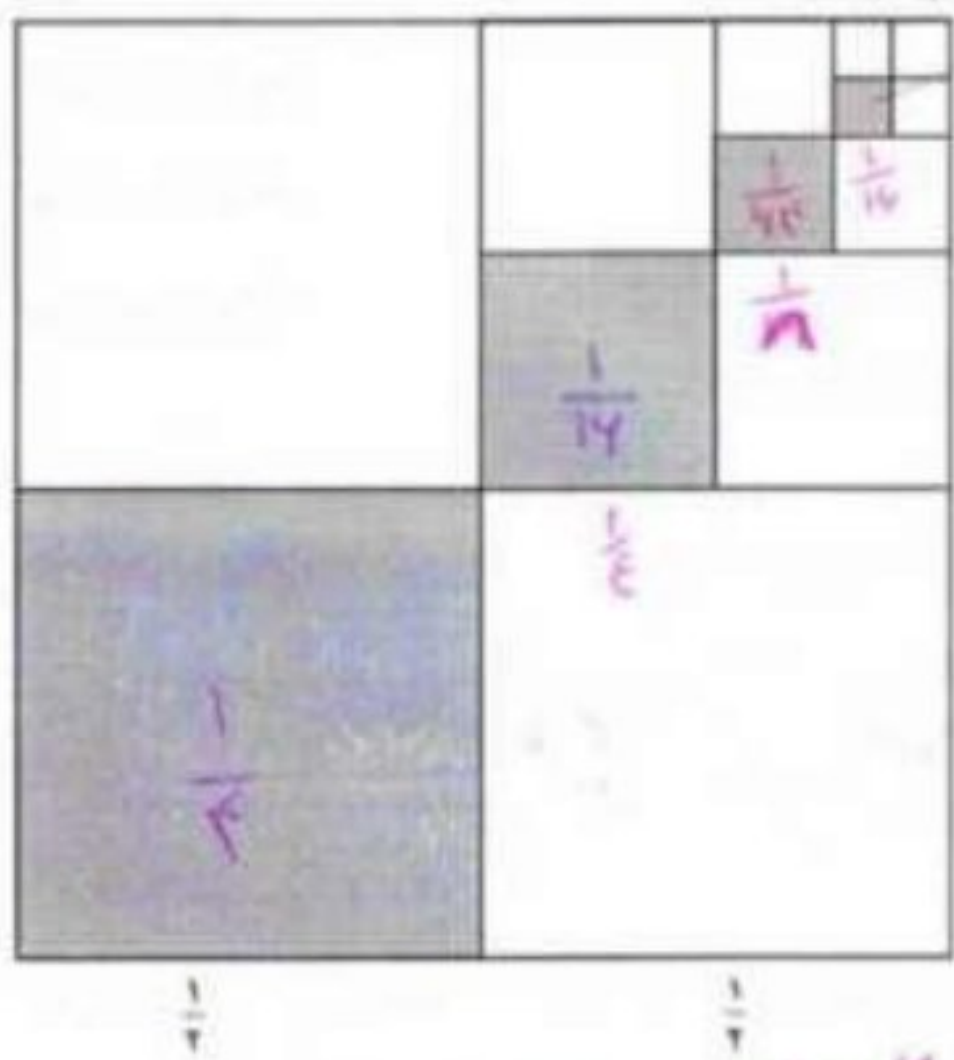
$a_1 = 1536, r = \frac{1}{4}, a_n = 6, n = ?$

الف) $a_n = 1536 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{6}{1536} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256} = \frac{1}{4^{n-1}} \Rightarrow 4^{n-1} = 256$

$4^{n-1} = 4^4 \Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$

ب) $S_n = \frac{1536 - \frac{1}{4} \times 6}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1536 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1536 - 1.5}{0.75} = 2052$

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



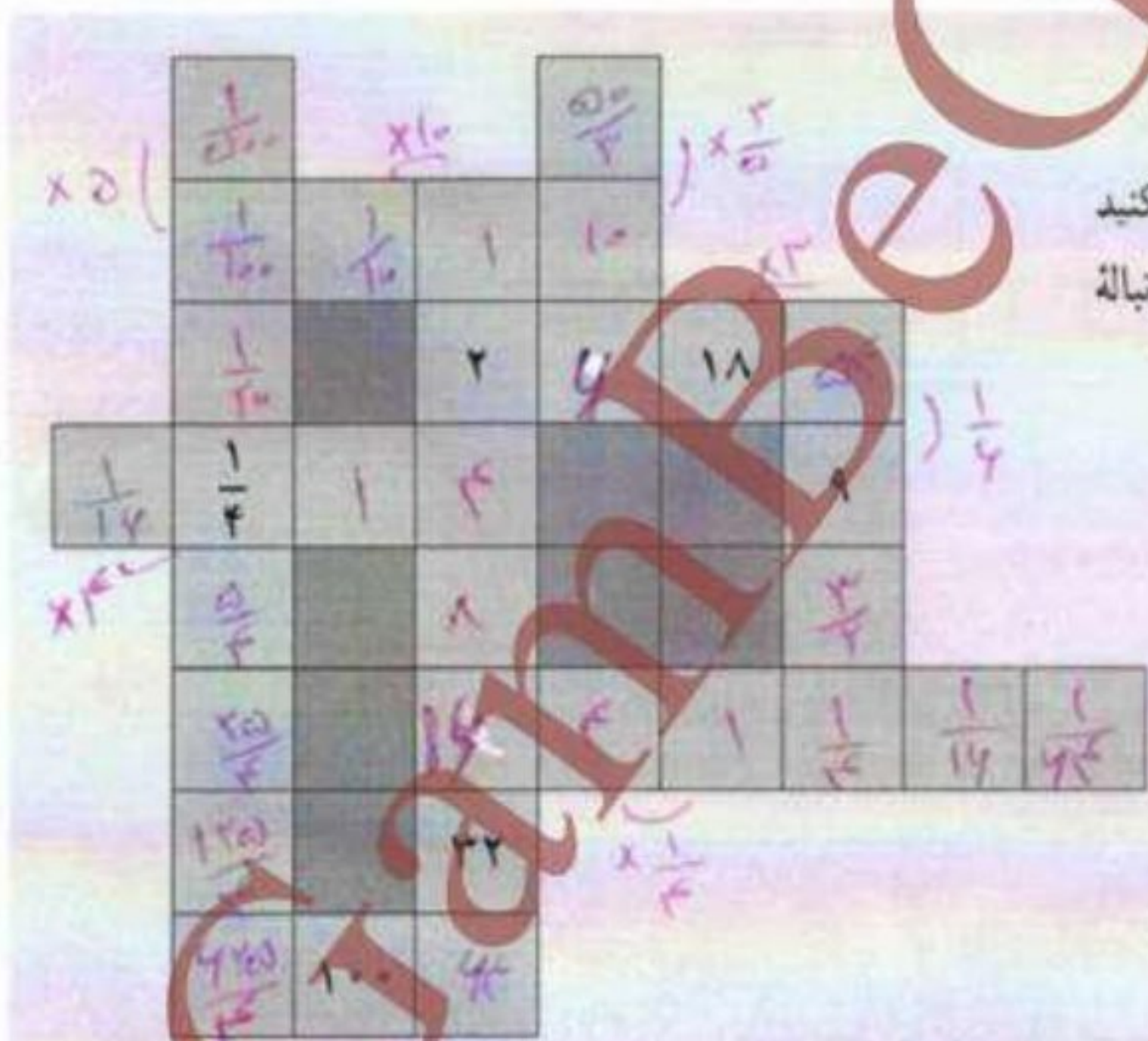
الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟
 هر ضلع هر ششم از ضرب مساحت مثبت قبلی در ۱/۴ به دست می‌آید.

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}$$

ب) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \left(\frac{1 - \frac{1}{4096}}{\frac{3}{4}} \right) = \frac{1345}{4094}$$



بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنباله هندسی تشکیل بدهد.



تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و نحوه ریشه‌گیری دوم و سوم آنها آشنا شده‌اید. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4^2 = 16$$

$$(2)^{-7} = \frac{1}{128}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

$$7^3 = 343$$

$$(-3)^6 = 729$$

$$-3^6 = -729$$

$$(0.01)^5 = (10^{-2})^5 = 10^{-10} \quad \left(1\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$$(-36)^7 + 9^7 = \left(\frac{-36}{9}\right)^7 = (-4)^7 \quad (2/1)^6 \times \left(\frac{2}{1}\right) \times \left(\frac{2}{1}\right)^2 = (2/1)^{11}$$

$$(-2)^3 \times (-5)^2 =$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{4}{5}\right)^8 = \left(\frac{4}{5}\right)^{5+8} = \left(\frac{4}{5}\right)^{13} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times (10^2)^5 = 10^{10}$$

$$(-4)^3 \times (-5)^3 = (-4 \times -5)^3 = 20^3$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2/1)^6 \times (2/1)^7 \times (2/1)^8 = (2/1)^{21}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{5}{2})^8 \div (\frac{5}{2})^3 = (\frac{5}{2})^{8-3} = (\frac{5}{2})^5 = (\frac{5^5}{2^5})$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-4)^7 \times (-2)^7 = (-4 \times -2)^7 = (-8)^7$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-36)^7 \div 2^7 = (\frac{-36}{2})^7 = (-18)^7$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(10^4)^3 = 10^{4 \times 3} = 10^{12}$

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$9^{10} \div 9^2 = 9^{10-2} = 9^8$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$7^4 \times 2^4 = (7 \times 2)^4 = 14^4$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$12^4 \div 3^4 = (\frac{12}{3})^4 = 4^4$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ ریشه‌های معادله $x^2 = 16$ می‌باشند و چون $4^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$ ، پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه سوم عدد ۲۷، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر ۳ می‌باشد. با همین استدلال، ریشه پنجم عدد -۳۲، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر -۲ و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر ۲ و -۲ می‌باشند.

جدول صفحه بعد را مانند نمونه کامل کنید.

نویسه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

-64	64	عدد (a)
وجود ندارد	$\sqrt[4]{64}, -\sqrt[4]{64}$	ریشه های چهارم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[5]{-64}$	$\sqrt[5]{64}$	ریشه پنجم
$\sqrt[5]{-44}$	$\sqrt[5]{44}$	$\sqrt[n]{a}$
وجود ندارد	$\sqrt[4]{44} = 2, -\sqrt[4]{44} = -2$	ریشه های ششم
وجود ندارد	$\sqrt[4]{44} = 2$	$\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[4]{-44}$	$\sqrt[4]{44}$	ریشه های هفتم
$\sqrt[4]{-44}$	$\sqrt[4]{44}$	$\sqrt[n]{a}, \dots$

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم، هرگاه: $b^n = a$.
 همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشه n ام مثبت عدد a است.

در حالت کلی تر، درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می توان گفت:

$a \geq 0$	n زوج باشد	ریشه n ام $a = \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	ریشه n ام $a = \sqrt[n]{a}$
$a < 0$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	ریشه n ام $a = \sqrt[n]{a}$

کار در کلاس

۱- با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال ها را می توانید به کمک ماشین حساب به دست آورید.

ریشه های چهارم عدد ۸۱ $\Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3, -\sqrt[4]{81} = -3$



$a \geq 0$ و زوج است و $n: a=25, n=8 \Rightarrow$ ریشه های ۸ام عدد ۲۵ $= -\sqrt[8]{25} = -1/295$ و $\sqrt[8]{25} = 1/295$

$a \geq 0$ و فرد است و $n: a=4^3, n=3 \Rightarrow$ ریشه سوم عدد ۶۴ $= 4$

$a < 0$ و زوج است و $n: a=-4^4, n=4 \Rightarrow$ ریشه چهارم عدد -4^4

$a < 0$ و فرد است و $n: a=-27, n=3 \Rightarrow$ ریشه سوم عدد $-27 = -3$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است: یعنی:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

برای مثل، $\sqrt[5]{(-15)^5} = -15$ و $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$ همچنین $\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5} = -\frac{8}{3}$ و $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

توان های گویا

سهام داران یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال های قبل را ارائه کنند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال های قبل، سود سالانه شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش بینی کرده که این سود در سال های آینده نیز محقق شود. اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام داران شرکت می توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد کنند:

$$\text{میزان سرمایه} \rightarrow 100 \times (1/2)^n = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)}$$



تهیه کننده:

گروه ریاضی اطلاع دوم متوسطه، استان خوزستان

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$100 \times (1/2)^1 = 120 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت یک سال}$$

$$100 \times (1/2)^2 = 144 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت ۲ سال}$$

حال اگر سهام داران این شرکت می خواستند سرمایه شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا $2=0$ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می توانستند این کار را انجام دهند؟
 $a_n = 100 \times (1/2)^{n/6}$ $a_n = 100 \times (1/2)^{n/6}$

تا اینجا شما با توان های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان های غیر صحیح همانند توان های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می شوید.

فعالیت



۱. پدر محمد زیست شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری ها کار می کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	—	۸
جرم (گرم)	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	$2^6=64$	$2^7=128$	—	2^8

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود؟
 پدر محمد: نظر خودت درباره جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چیست؟
 محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می زنم که 2^2 گرم شود، اما مقدار 2^2 را نمی دانم چقدر می شود؛ چون تمام توان هایی که ما تاکنون یاد گرفته ایم، توان های صحیح بوده اند.
 پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود و او را با توان های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می شود.
 با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^2 = 2$ یعنی $a = \sqrt{2}$. (زیرا a مثبت است). بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می خواهیم بدانیم آیا می توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم.
 معادله $\sqrt{2} = 2^b$ را در نظر می گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$\sqrt{2} = 2^b$ $\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}}$ $(\sqrt{2})^2 = (2^b)^2 \Rightarrow 2 = 2^{2b} \Rightarrow 2^1 = 2^{2b} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$
 بنابراین داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود. حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به دست آورید.

پس از $20 = 2^{\frac{1}{3}}$ دقیقه ($\frac{1}{3}$ ساعت) $= \sqrt[3]{2}$ $= 2^{\frac{1}{3}}$ پس از $10 = 2^{\frac{1}{6}}$ دقیقه ($\frac{1}{6}$ ساعت)

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین، هر جا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که:

در باره توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$7^{\frac{5}{4}} = 7^{5 \times \frac{1}{4}} = (7^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

و به طور کلی، داریم:

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$$

$$12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{3}{1}\right)^4}$$

$$(0.001)^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{(0.001)^{12}}$$

روابطی که در ابتدای درس درباره توان های صحیح اعداد یادآوری شد، در خصوص توان های گویا و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(m و n اعداد حقیقی و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارات های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارات های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$$

$$\sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{2/7} = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{31}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{31}}$$

$$\sqrt{1} = 1^{\frac{1}{2}}$$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

۶ ماه $\left(\frac{1}{2}\right)$ سال بعد : $100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 \times \sqrt{1/2}$

۲۰۰ روز بعد : $100 \times \left(\frac{200}{365}\right)^{\frac{365}{200}} = 100 \times \left(\frac{200}{365}\right)^{1.825}$

۳ سال و ۶ ماه بعد : $100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} = 100 \times \sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}$

۱ سال و ۲ ماه بعد : $100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = 100 \times \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$

۱. در این کتاب، تمامی توان های اعداد، گویا هستند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{3 \times -\frac{1}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$1000^{\frac{1}{3}} = (10^3)^{\frac{1}{3}} = 10^{3 \times \frac{1}{3}} = 10^1 = 10$$

$$32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2^1 = 2$$

۴. هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{3}} = 14^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 = 2 \quad -4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4(10^3)^{\frac{1}{3}} = -4 \times 10 = -40$$

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3 \quad 7^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 7^1 = 7$$

$$125^{\frac{1}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}} + (125)^{\frac{1}{3}} = 5 + 5 = 10 \quad 8^{\frac{2}{3}} \times (1/5)^{\frac{1}{3}} = (8 \times 1/5)^{\frac{1}{3}} = (8/5)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8/5} = \sqrt[3]{16/10} = \sqrt[3]{8/5}$$

$$= (125)^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^{3 \times \frac{2}{3}} = 5^2 = 25 \quad \sqrt[3]{5 \times 5} = \sqrt[3]{25}$$

۵. دانش آموزی $\sqrt{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{2}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{2}}$ نادرست است.

$$\sqrt{-8} = \sqrt{(4 \times 2)} = 2\sqrt{2}$$

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{4}} = (-8)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(-8)^2} = \sqrt[4]{64} = 2$$

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[3]{5}$ یا هر دو برابرند.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

۲. حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (m, n و a اعداد حقیقی مثبت اند.)

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$$

$$5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 14^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14} \quad (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^{6 \times \frac{1}{2}} = 2^3 = 8$$

$$\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$3^{-2/3} \times 3^{-1/3} = 3^{-2/3 - 1/3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

نهیة کنند:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\left[\frac{a^{-1/2}}{a^{-1/4}}\right]^{-2} (a^{-1/2 + 1/4})^{-2} = (a^{-1/4})^{-2} = a^{1/2}$$

$$(m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{4}{3}} \cdot n^{\frac{2}{3}} \cdot m^1 \cdot n^{\frac{3}{2}} = m^{\frac{4}{3} + 1} \cdot n^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = m^{\frac{7}{3}} \cdot n^{\frac{13}{6}} = m^{\frac{14}{6}} \cdot n^{\frac{13}{6}} = (mn)^{\frac{13}{6}}$$

$$(-.36)^4 \times (-.36)^x \times (-.36)^{-4} = (-.36)^7 \Rightarrow (-.36)^{-2+x} = (-.36)^7 \Rightarrow -2+x=7$$

$$\Rightarrow x=9$$

۳. در هر یک از تساوی های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$8^x \times 9^0 = 72^0 \Rightarrow 8^x \times 9^0 = 8^0 \times 9^0 \Rightarrow 8^x = 8^0 \Rightarrow x=0$$

$$(-.36)^0 \times (-.36)^{-6} \times (-.36)^{-6} = (-.36)^7$$

$$\frac{x^0 \times 15^3}{3^1 \times 3^5 \times 3} = 5^x \Rightarrow \frac{1 \times 15^3}{3^6} = 5^x \Rightarrow \frac{3^2 \times 5^3}{3^6} = 5^x \Rightarrow 5^3 \times 3^{-4} = 5^x \Rightarrow x=3$$

$$(2^x)^6 = \frac{1}{3^2} \quad \text{اشتباه چاپی}$$

جواب در پایین صفحه

۴. همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم V را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3 \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi r^3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \times \frac{1}{3}} = r^1 = r$$

ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

$$r = \left(\frac{3 \left(\frac{32\pi}{3}\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{32\pi}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 \times \frac{1}{3} = 2^1 = 2$$



تهیه کننده:

گروه ریاضی، مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

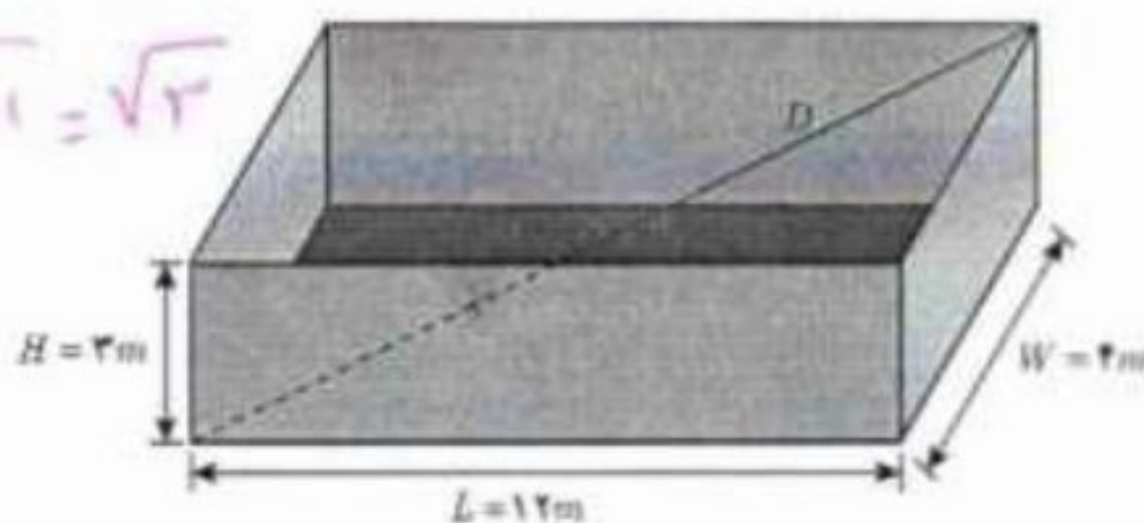
۵. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه) به دست می آید.

$$D = (12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$$

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1m$ باشد، اندازه D را به دست آورید.

$$D = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$



$$۳) (2^x)^6 = \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{6x} = 2^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی - اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است. یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعه بازی‌های سبز» است که قرار است دانش‌آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت‌کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده‌کننده محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۶۷۲۱ = ۴۳ برسد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟
برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی
$3^0 = 1$	۰
$3^1 = 3$	۱
$3^2 = 9$	۲
$3^3 = 27$	۳
$3^4 = ?$	۴
$3^5 = ?$	۵
$3^6 = ?$	۶
$3^7 = ?$	۷
$3^8 = ?$	۸
$3^9 = ?$	۹
$3^{10} = ?$	۱۰



(تعداد مراحل بازی) $\frac{3^n - 1}{2} =$ میزان امتیاز کسب شده

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟ **مرحله هفتم**

۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می کنند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه ای به دست آورید. **بله**

۴. با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله n ام را به دست آورید؟

$$a_{10} = 3^{10} = 59049$$

$$a_n = 3^n$$

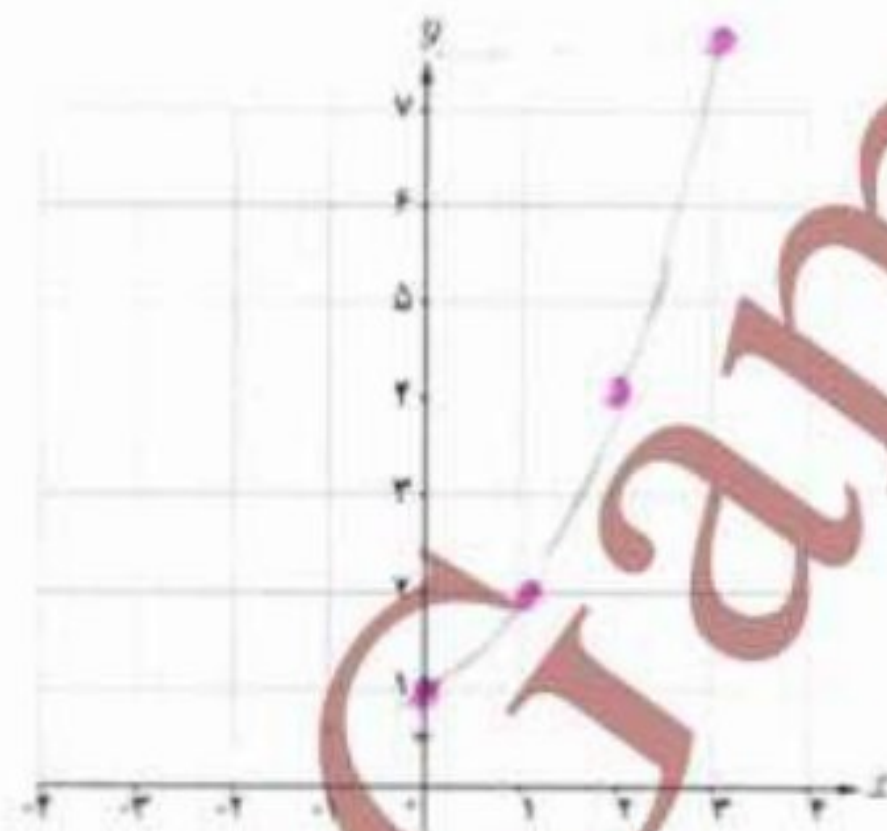
$$a_{20} = 3^{20} = 3486784401$$

فعالیت

در بخش دنباله ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوریم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می کرد. دوباره به این فعالیت بومی گردیم!

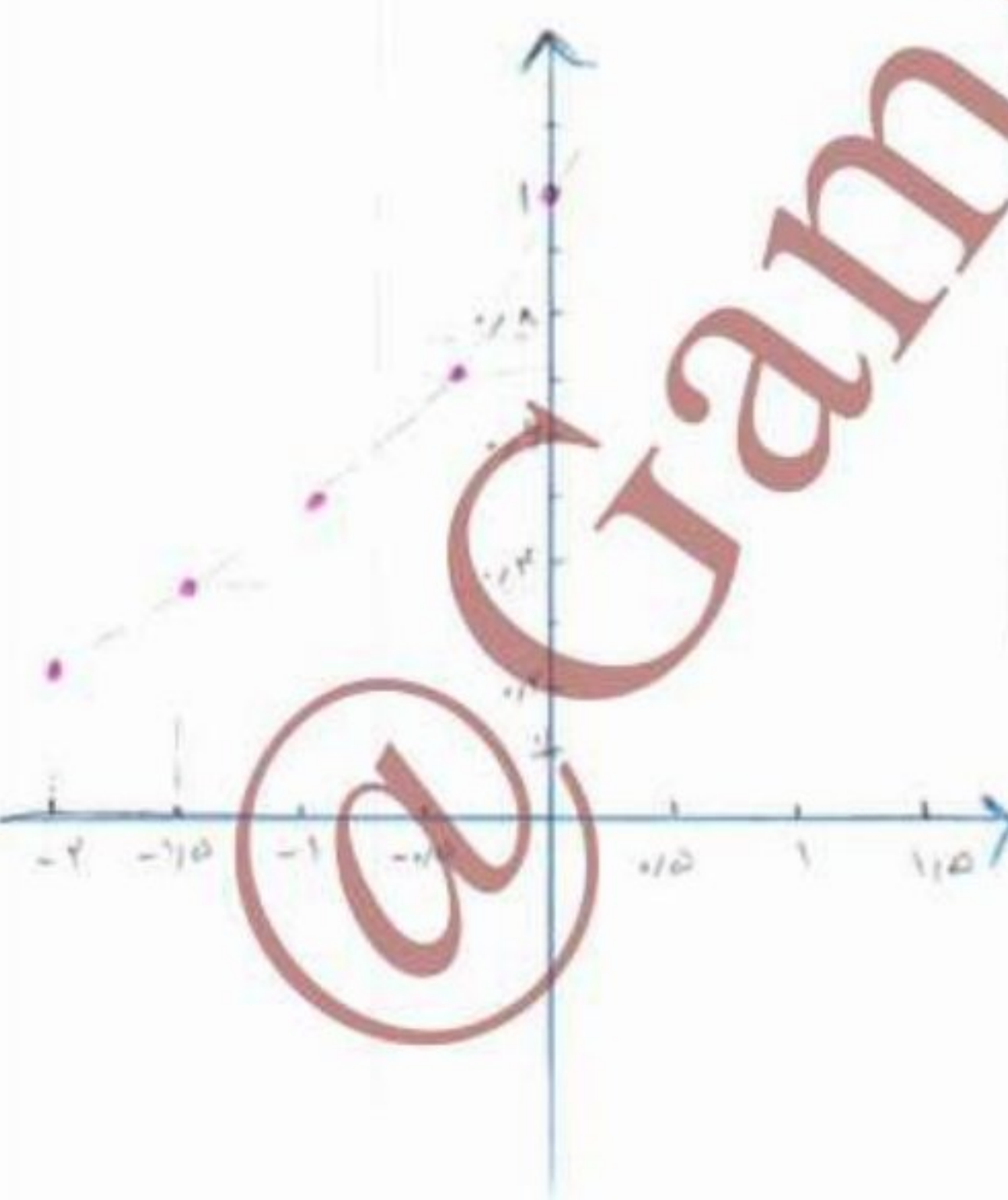
۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
...	...

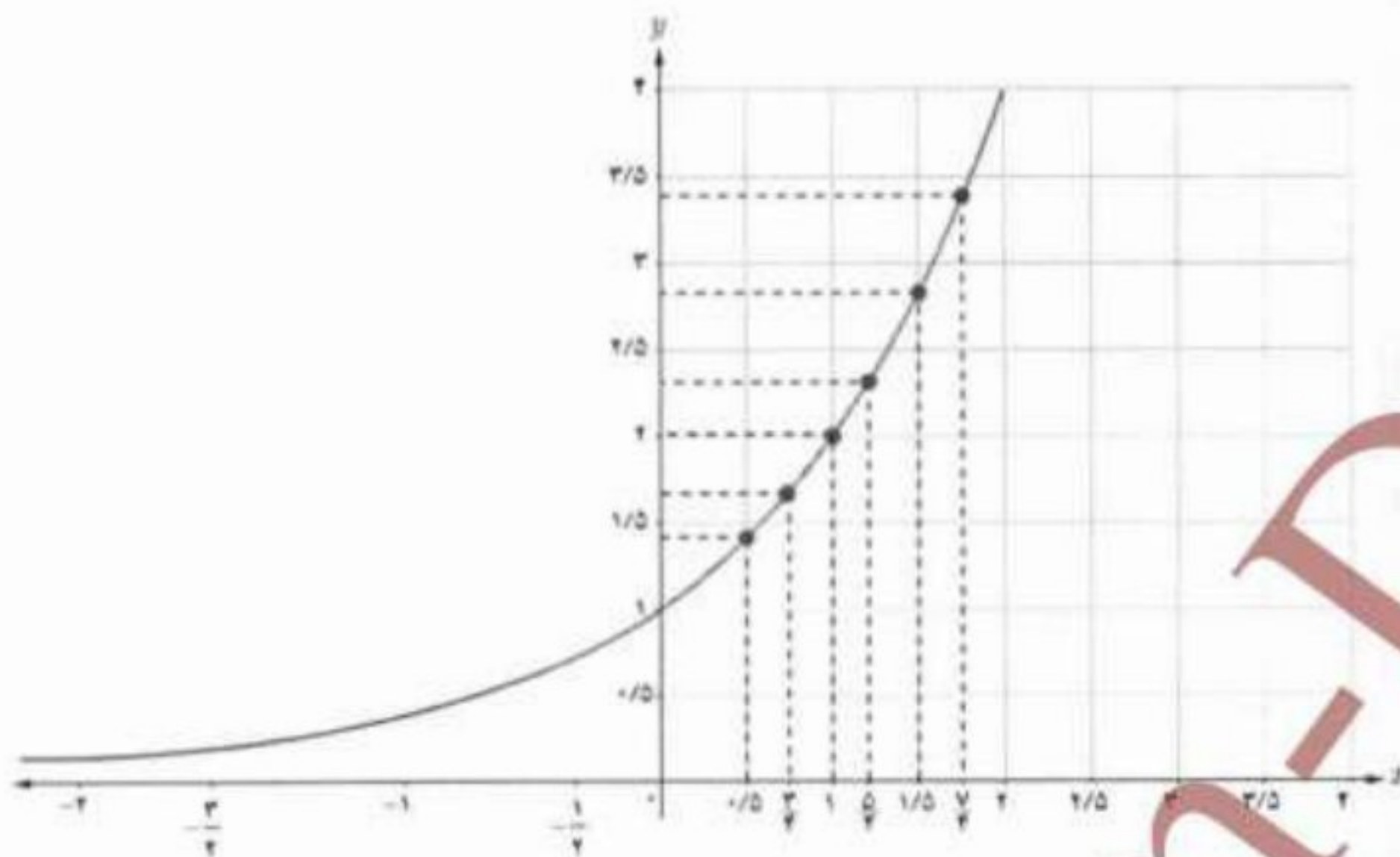


۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	2^x
	1
$-\frac{1}{2}$	0.707
-1	0.500
$-\frac{3}{2}$	0.353
-2	0.250



۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت $y = a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می شود.

تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

منظور از \mathbb{R}^+ ، مجموعه $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

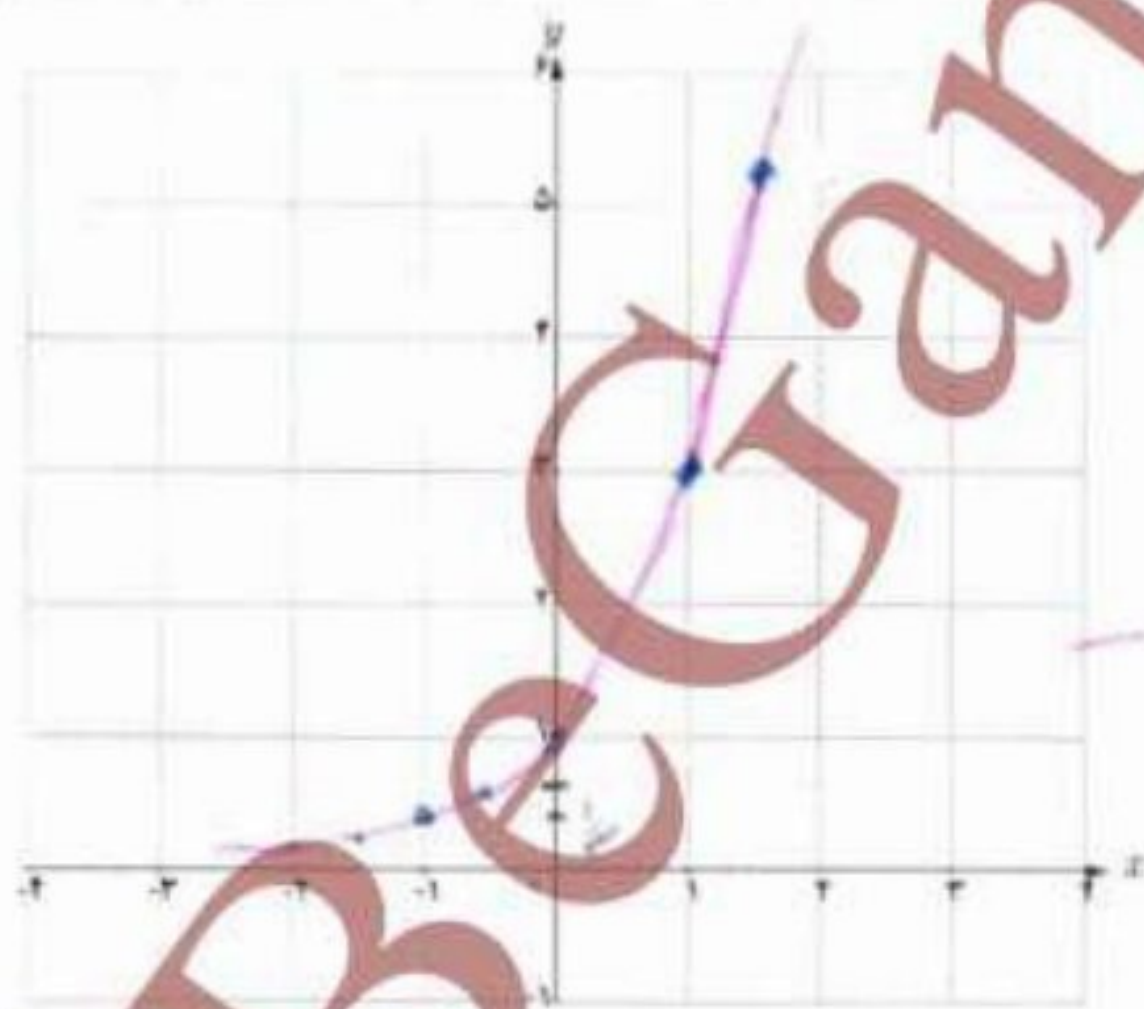
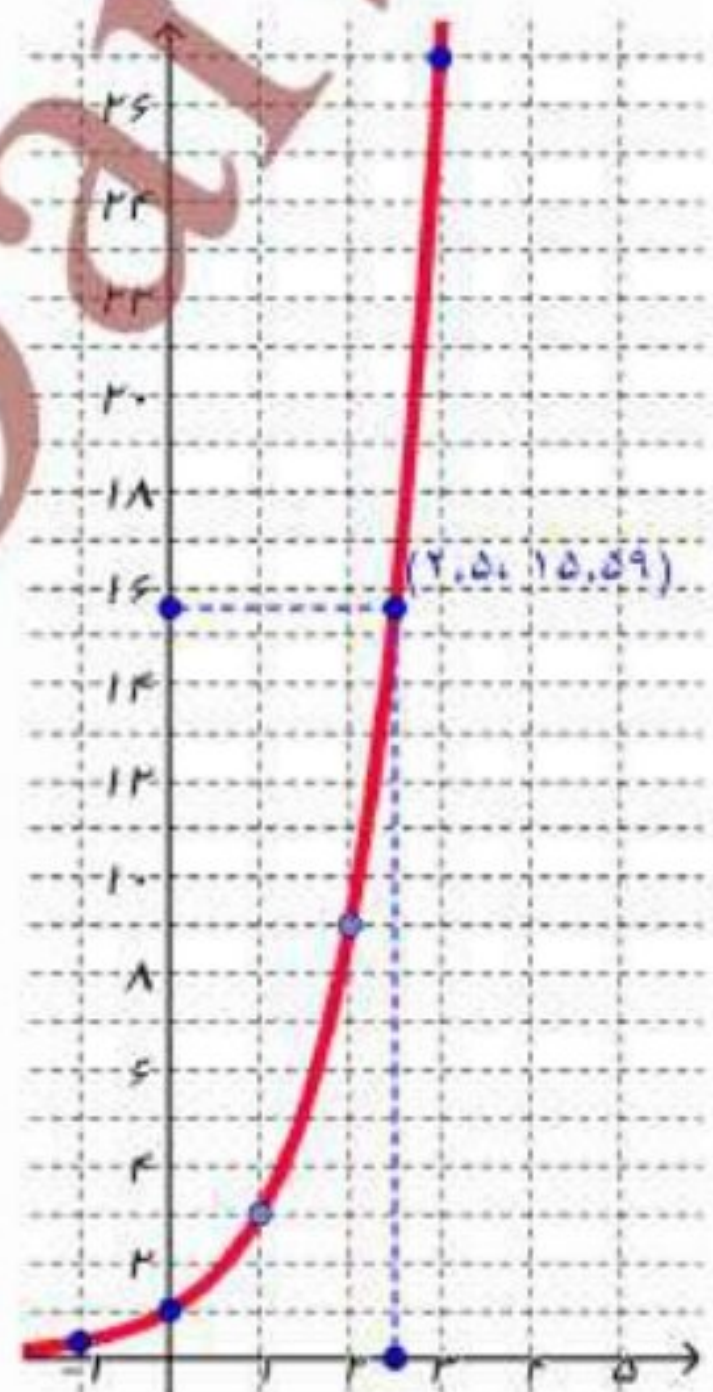
فعالیت

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

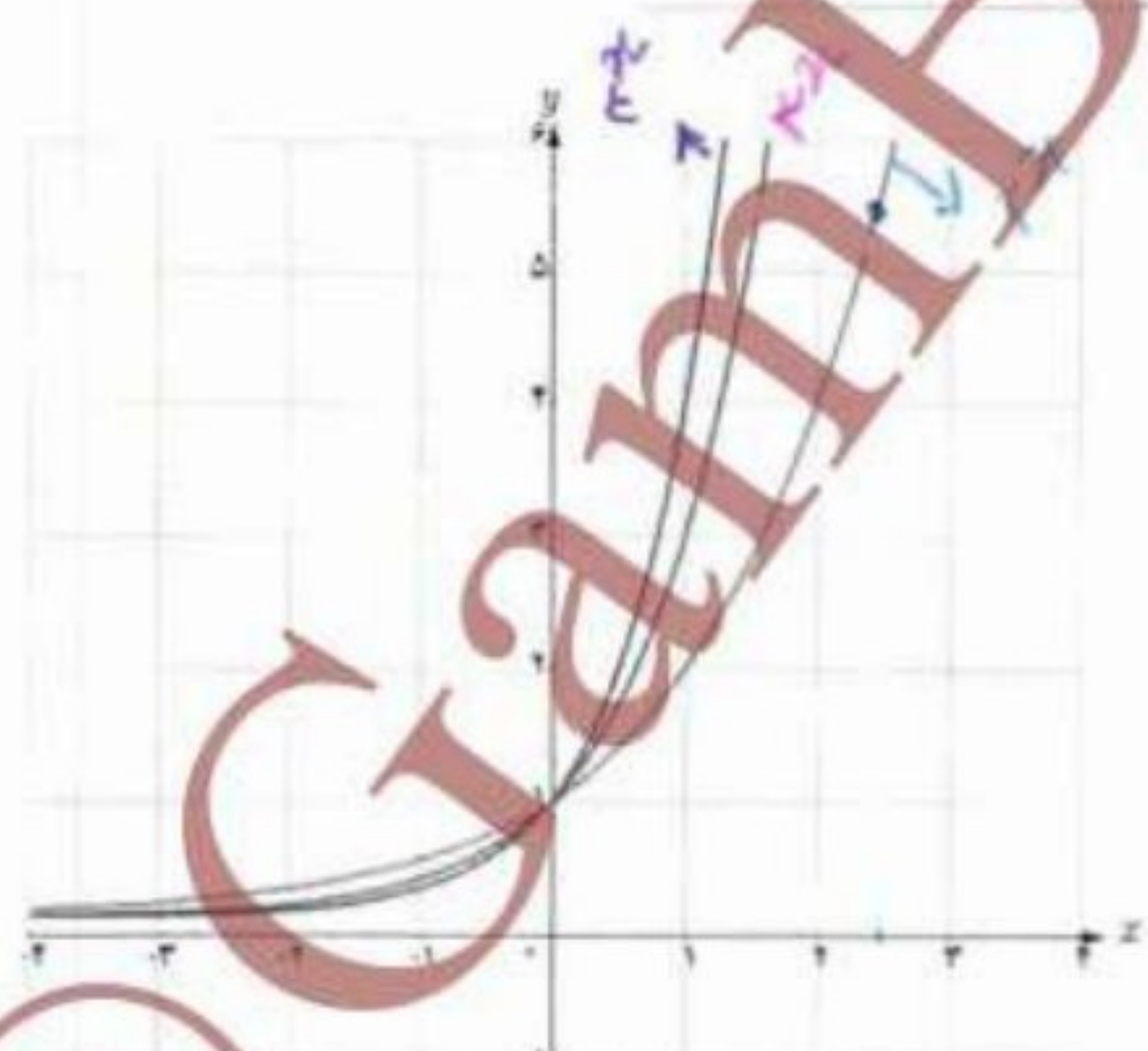
۱- این تابع به این علت نمایی نامیده می شود که متغیر x در نما یا توان قرار دارد.

جدول ۲

x	3^x	y	محاسبه y با استفاده از ماشین حساب تا سه رقم اعشار
-۲	3^{-2}	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{3}{2}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-۱	3^{-1}	$\frac{1}{3}$	۰/۳۳۳
$-\frac{1}{2}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
۰	3^0	۱	۱
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
۱	3^1	۳	۳
$\frac{3}{2}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
۲	3^2	۹	۹



بیشتر بود
جای طر محور
مادان به سمت ب
حد اقل محور را با بیشتر باشد.



همان گونه که دیده می شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطه یک محور y را قطع می کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید.

پ) نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت ها و شباهت های بین این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت

شباهت

- ۱- هر سه نمودار را با رانقطه (اره) قطع می کنند.
- ۲- هر سه تابع صعودی هستند.
- ۳- با محور طول را می خوردند.

در طول $n=1$ و n های دیگر هم فرق دارد.

میزان افزایش مقدار عرضهایشان با هم متفاوت است



CamScanner

فعالیت

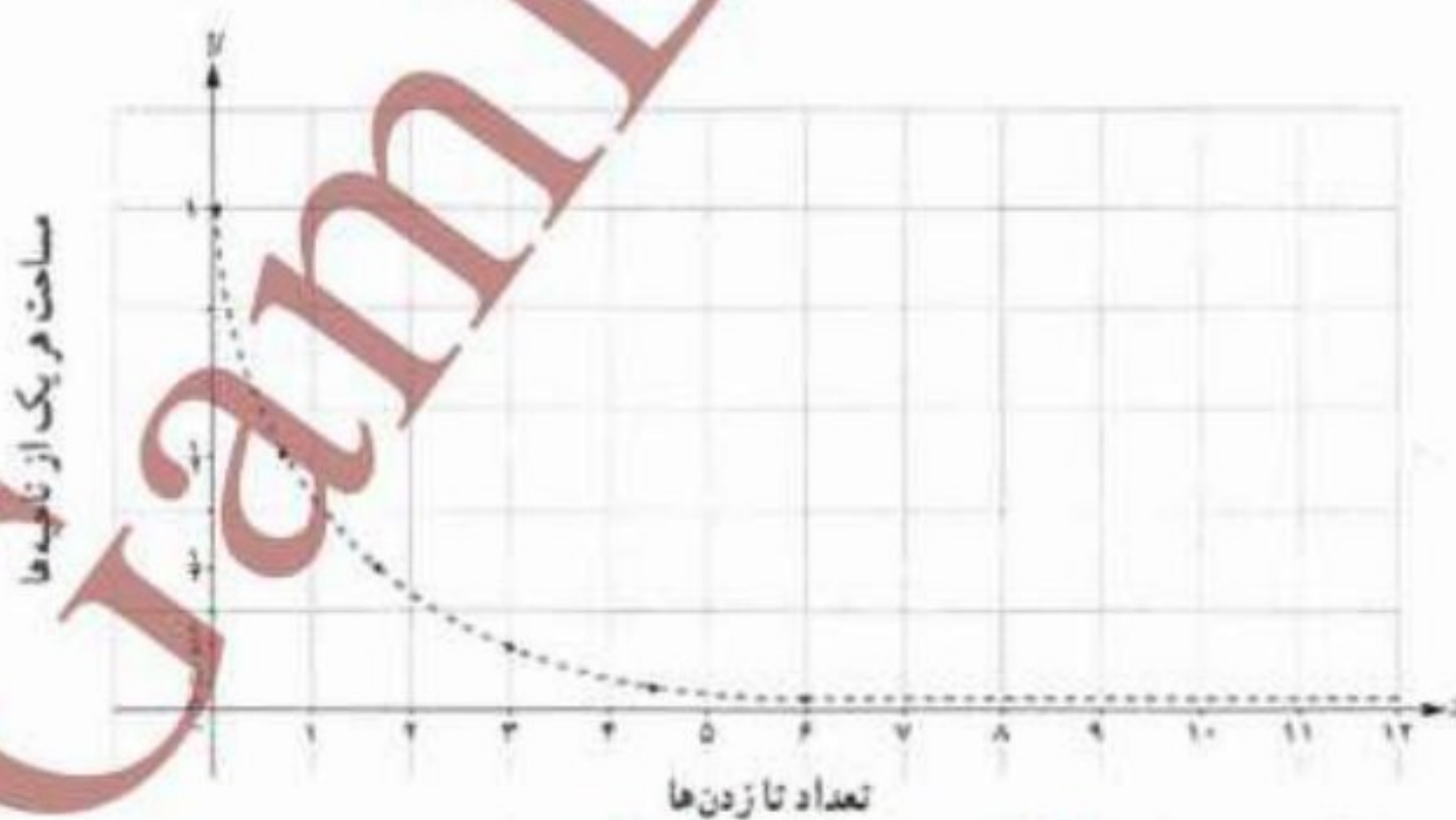
یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه هایی که بر اثر تا زدن های متوالی ایجاد می شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

تعداد تا زدن ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	$\frac{1}{16}$
۵	$\frac{1}{32}$
...	...
۸	$\frac{1}{256}$
?	$\frac{1}{1024}$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می توانید پیشنهاد دهید؟ در نمودار زیر، رابطه تعداد تا زدن ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه ها نمایش داده شده است.



نقطه تقاطع منحنی با محور y ها چیست؟ نام این نقطه چیست؟

۱۰۰



فعالیت

۱. تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۴

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y	محاسبه y با ماشین حساب تا رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	۴	۴
$-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[3]{8}$	۲٫۸۲۸
-۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	۲	
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$	۱٫۴۱۴
۰	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	۱	
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰٫۷۰۷
۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}$	۰٫۵
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$	۰٫۳۵۳
۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	۰٫۲۵

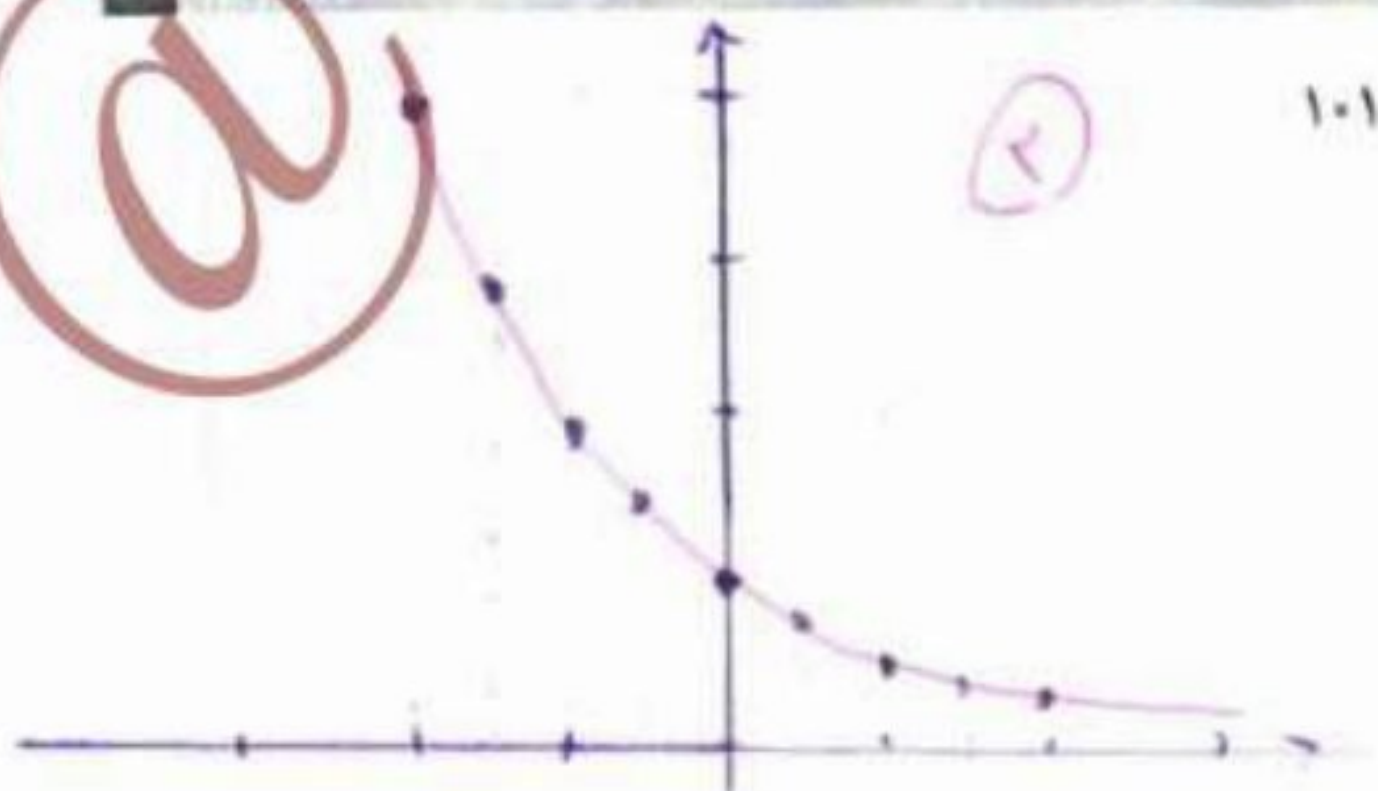
۲. نقاط به دست آمده در جدول بالا را روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار،

مقدار تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟ **بله**

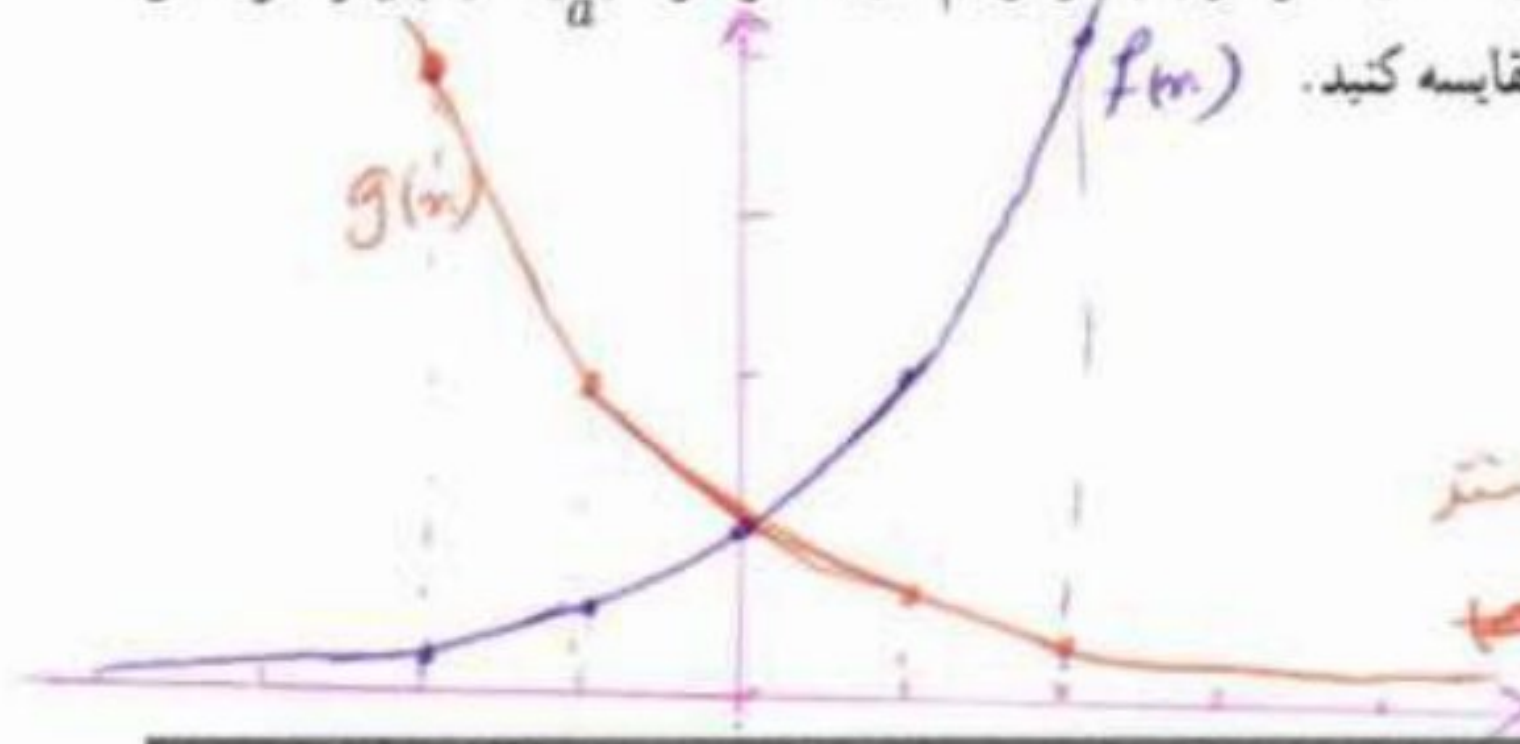
۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین

این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟ **این دو نمودار متقارن حول محور $y = 2^x$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ است.**

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.



تابع نمایی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد $a > 1$ ، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = (\frac{1}{a})^x$ را در همان



$a = 2$

$f(n) = 2^n$

$g(n) = (\frac{1}{2})^n$

هر دو در نقطه (0, 1) محورین با هم قطع می‌کنند
 هر دو با محورین با هم برخورد نمی‌کنند
 دامنه هر دو \mathbb{R} است و پر در \mathbb{R}

تمرین

۱. در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.

نهیة گننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده $2 = 48$ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

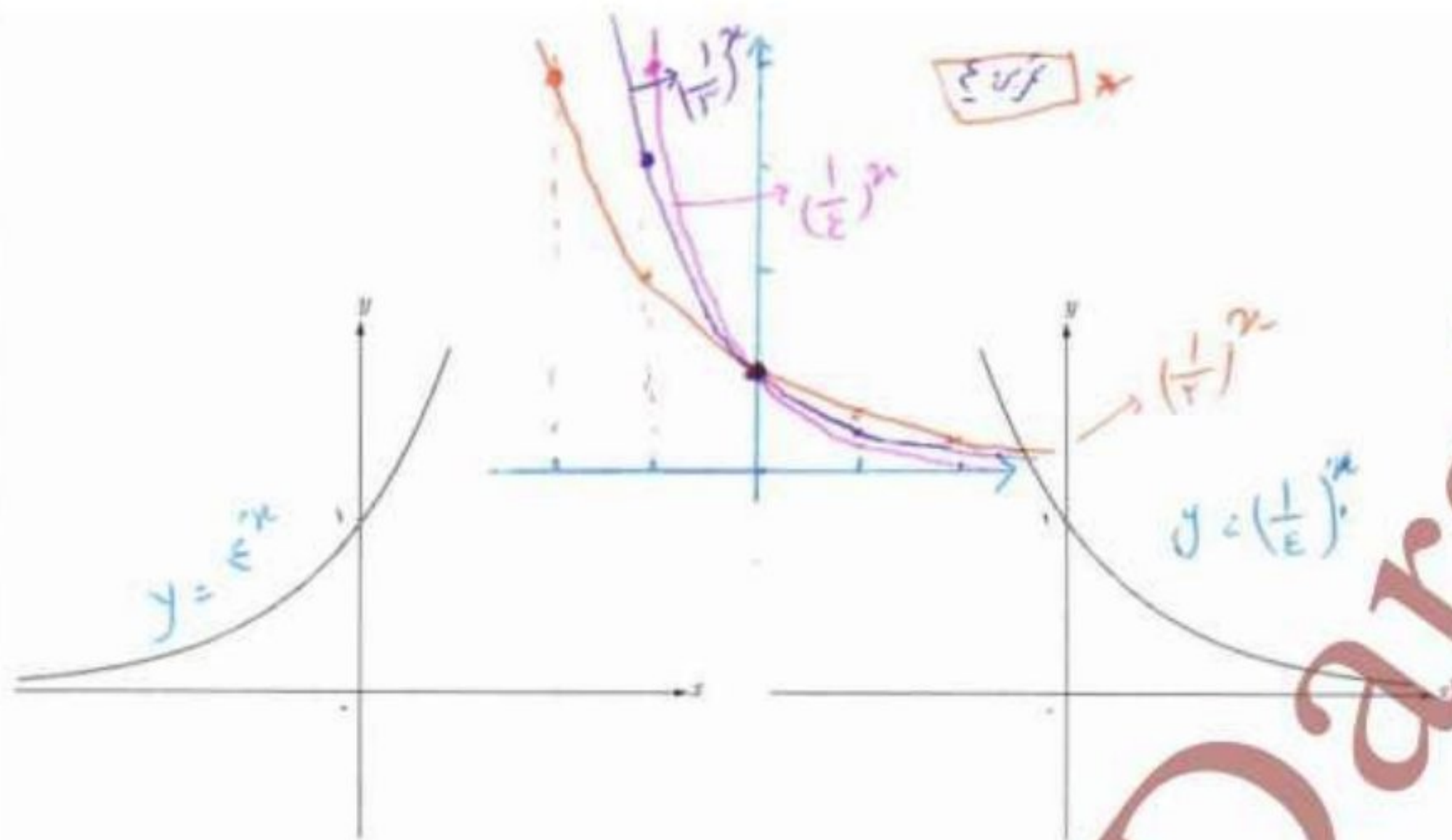
پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

تعداد سلولها = 2^n تعداد سلولها

۲. یک نمونه واقعی (نسبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.





۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.

هر سه نمودار ما در نقطه (۰، ۱) قطع می‌کنند، هر سه نزولی هستند. هر سه محور ما را قطع می‌کنند و به سمت راست و چپ بی‌نهایت دارند.

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

اما میزان کاهش مقدار عرضهایشان با هم فرق دارد

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرموده رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	$10,000,000 + 1400,000 = 11,400,000$
۱۹	$11,400,000 + 1596,000 = 12,996,000$
⋮	
۲۳	$10,000,000 \times (1.14)^4 = 15,949,722.22$

۱۰۳

هر دو نمودار ما در نقطه (۰، ۱) قطع می‌کنند
 هر دو با محور ما برخورد می‌کنند
 در هر دو $R = (0, +\infty)$, $O = IR$
 اما در یکی با افزایش x ما مقدار y را افزایش می‌دهیم و در دیگری $(\frac{1}{x})^x$ با افزایش x مقدار y را کاهش می‌دهیم.



برای تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک سال بعد از سپرده گذاری در شرکت) را به دست آورید.

$$10,000,000 + \left(\dots \times \frac{14}{100} \right) = \dots + 1,400,000 = 11,400,000$$

بنابراین، در جدول شماره ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

در واقع، باید میزان سپرده گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده گذاری شده

را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه گذاری اولیه) به دست آوریم:

$$11,400,000 + \dots = \dots + \dots = \dots 12,992,000$$

همان گونه که ملاحظه می کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می شود:

$$10,000,000 \times (1/14)^2 = 12,996,000$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات بر حسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادله کلی که بیانگر مبلغ سرمایه گذاری پس از t سال است، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$f(t) = 10,000,000 \times (1 + 0/14)^t$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی

۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

$$y = 5.2 \times (1 + 0.02)^{30} = 5.2 \times 1.81 = 9.412$$

$$y = 5.2 \times (1 + 0.02)^{70} = 5.2 \times 2.99 = 15.348$$

تقریباً در هر ۳۵ سال دو برابر می شود
زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می گوئیم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1-r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

$$y = 5.2 \times (1 - 0.02)^{70} = 5.2 \times 3.99 = 20.748$$

$$y = 5.2 \times (1 - 0.02)^{104} = 5.2 \times 7.99 = 41.548$$

مثال: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهار میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با جای گذاری $r = -0.01$ و t در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 4,000,000 (1 - 0.01)^{18} = 3,328,600$$

تمرین

۱. در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهار میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

۳. جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها با موش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۱/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید. در صورتی که در همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

ب) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟ سال دهم یا بعد $g(10) > f(10)$
 ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟ بین ۹ سال و ۱۰ سال
 ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟ هر دو جمعیت رو به افزایش می روند و موش ها بیشتر می شوند.

۱) $y = 4,000,000 \times (1 + 0.06)^{10} = 4,000,000 \times 1.7908 = 7,163,200$

توجه کننده:

۲) $y = 1,000,000 \times (1 + 0.06)^{10} = 1,000,000 \times 1.7908 = 1,790,800$

گروه ریاضی اطلاع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳) $f(t) = 23576 (1 - 0.05)^t = 23576 (0.95)^t$

گربه $g(t) = 15786 (1 + 0.08)^t = 15786 (1.08)^t$



۱۰۵

ب) $f(9) > g(9)$
 $f(10) < g(10)$

بین ۹ سال و ۱۰ سال برابر می شوند.

$$f(1) = 25000 \times (1.05)^1 = 26250,00$$

$$f(2) = 25000 \times (1.05)^2 = 27562,50$$

$$f(3) = 25000 \times (1.05)^3 = 28940,62$$

$$f(4) = 25000 \times (1.05)^4 = 30387,65$$

$$f(5) = 25000 \times (1.05)^5 = 31907,03$$

$$f(6) = 25000 \times (1.05)^6 = 33502,38$$

$$f(7) = 25000 \times (1.05)^7 = 35177,50$$

$$f(8) = 25000 \times (1.05)^8 = 36936,27$$

$$f(9) = 25000 \times (1.05)^9 = 38783,08$$

$$f(10) = 25000 \times (1.05)^{10} = 40722,24$$

$$g(1) = 10000 \times (1.1)^1 = 11000,00$$

$$g(2) = 10000 \times (1.1)^2 = 12100,00$$

$$g(3) = 10000 \times (1.1)^3 = 13310,00$$

$$g(4) = 10000 \times (1.1)^4 = 14641,00$$

$$g(5) = 10000 \times (1.1)^5 = 16105,10$$

$$g(6) = 10000 \times (1.1)^6 = 17715,61$$

$$g(7) = 10000 \times (1.1)^7 = 19509,17$$

$$g(8) = 10000 \times (1.1)^8 = 21494,09$$

$$g(9) = 10000 \times (1.1)^9 = 23683,50$$

$$g(10) = 10000 \times (1.1)^{10} = 26187,67$$

@GambBeGamb