درس اوّل: مجموعه های متناهی و نامتناهی


جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی دربارهٔ مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

مجموعه های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند :

$P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,...\}$: مجموعه اعداد اول

$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$:مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$:مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$:مجموعه اعداد صحیح

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in \mathbb{Z}, n\neq ۰\}$: مجموعه اعداد گویا

$\mathbb{Q}'=$ مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. : مجموعه اعداد گنگ

$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$: مجموعه اعداد حقیقی

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ برقرار است. به‌عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که درنظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقیِ مشخص است.

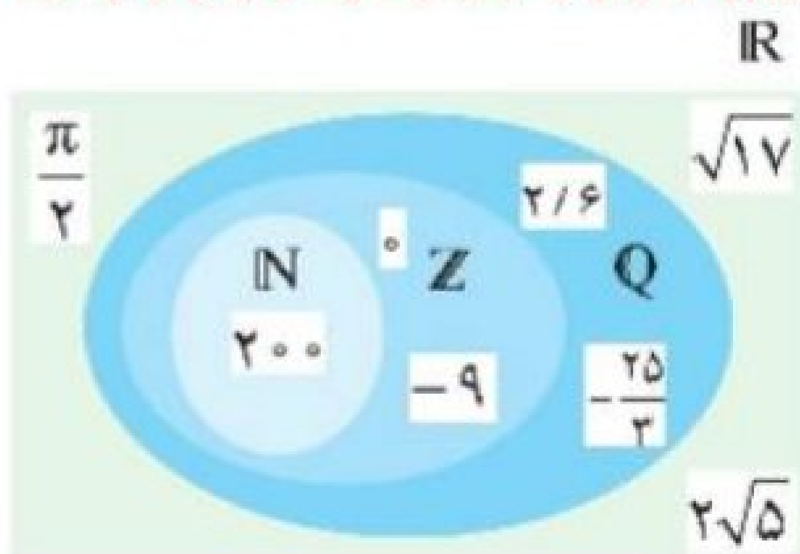
کار در کلاس

۱ الف) مجموعه $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.
آن مجموعه ی اعداد گنگ است که با نماد Q' نمایش می دهیم
در شکل هاشور قرمز زده شده است . دو عضو آن عبارتند از : π , $\sqrt{۲}$

ب) دو عددگویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید. $-۱/۳$, $\frac{۱}{۲}$

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$\sqrt{۱۷},۰,۲۰۰,\frac{\pi}{۲},۲/۶,۲\sqrt{۵},-\frac{۲۵}{۳},-۹$



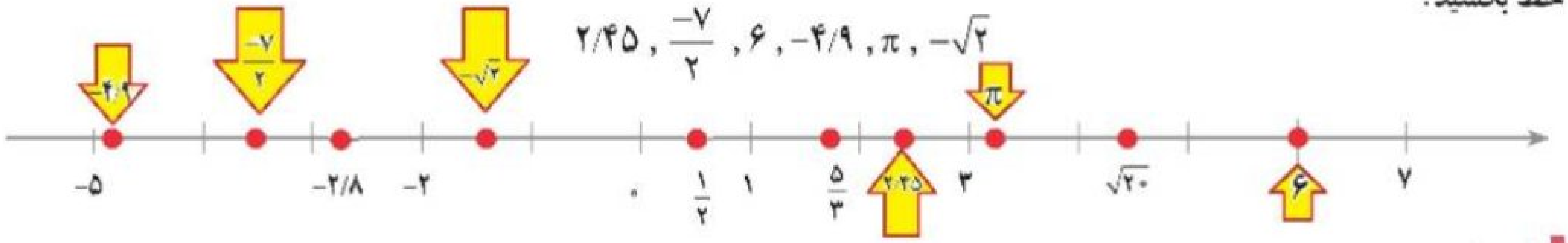
ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{$-۱و-۲و-۳و-۴و-۵و..$\}$

ث) مجموعهٔ $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ چند عضو دارد؟ یک عضو دارد زیرا $W-\mathbb{N}=\{o\}$

توجه داشته باشید که $\mathbb{N}-W=\varnothing$

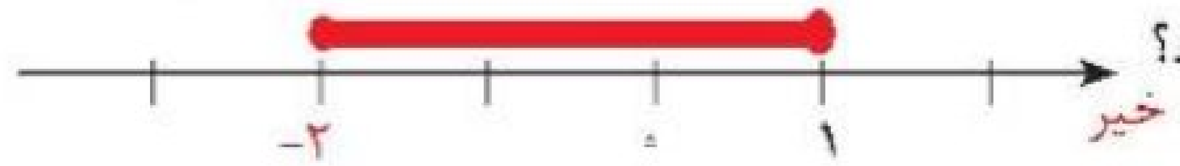
۲ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ‌اند؟ زیر آنها خط بکشید.

$۲/۴۵ , \frac{-۷}{۲} , ۶ , -۴/۹ , \pi , -\sqrt{۲}$



بازه‌ها

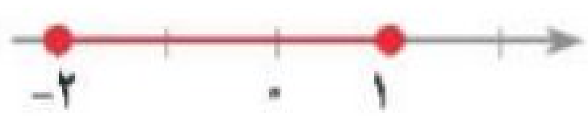
در اینجا گونهٔ دیگری از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنید A مجموعهٔ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۲- و ۱ به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲\leq x\leq ۱\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقیِ بعد از ۲- را مشخص کرد؟



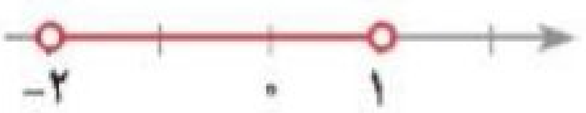
خیر

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام اعداد حقیقیِ بین دو عدد مشخص‌اند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سر و کار خواهیم داشت. از این‌رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بنابراین A را با نماد $[-۲,۱]$ نشان می‌دهیم و آن را **بازهٔ بسته** از ۲- تا ۱ می‌نامیم.
حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی ۲- و ۱ را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند $B=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲<x<۱\}$ به‌دست می‌آید که آن را **بازهٔ باز** بین ۲- و ۱ می‌نامیم و با نماد $(-۲,۱)$ نشان می‌دهیم. به‌طور خلاصه :

بازه بسته بین ۲- و ۱ : $A=[-۲,۱]=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲\leq x\leq ۱\}$



بازه باز بین ۲- و ۱ : $B=(-۲,۱)=\{x\in\mathbb{R} \mid -۲<x<۱\}$



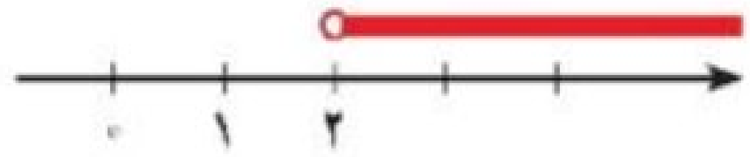
بازه‌های **نیم باز** هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری که $a<b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید :

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	a b
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$	a b
نیم باز	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$	a b
نیم باز	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$	a b
نیم باز	$(۱,۵]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid ۱<x\leq ۵\}$	۱ ۵
نیم باز	$[-۳,۲)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid -۳\leq x<۲\}$	-۳ ۰ ۱ ۲

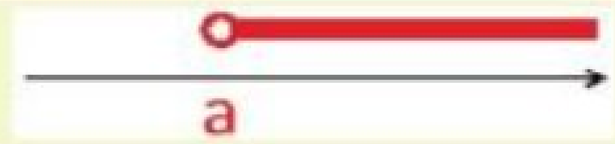
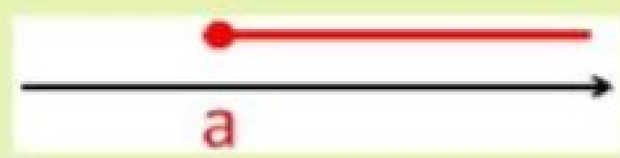
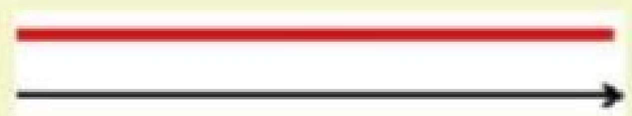
گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به‌عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۲x > ۴$ به‌صورت $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۲\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+\infty$ (بخوانید : مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ C را در قالب بازه با نماد $(۲,+\infty)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq ۱\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $(-\infty,۱]$ خواهد بود که یک بازهٔ نیم باز است. توجه داریم که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

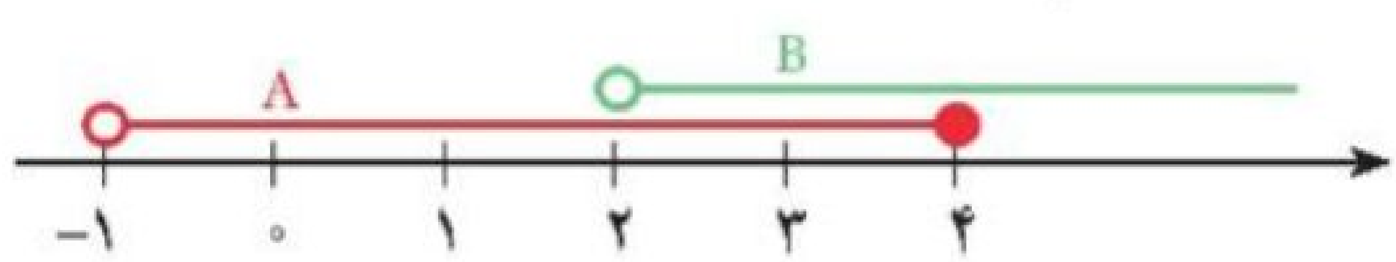
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty,a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty,a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}$	
نیم باز	$[۳,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۳\}$	
باز	$(-\infty,۵)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < ۵\}$	

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازهٔ $A=(-۱,۴]$ و $B=(۲,+\infty)$ را به‌دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از (-۱) یعنی :

$(-۱,۴] \cup (۲,+\infty) = (-۱,+\infty)$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی :

$(-۱,۴] \cap (۲,+\infty) = (۲,۴]$

توضیح دهید که چرا $۲ \notin A \cap B$.

زیرا ۲ در بازه ی B نیست ، پس در اشتراک وجود ندارد .

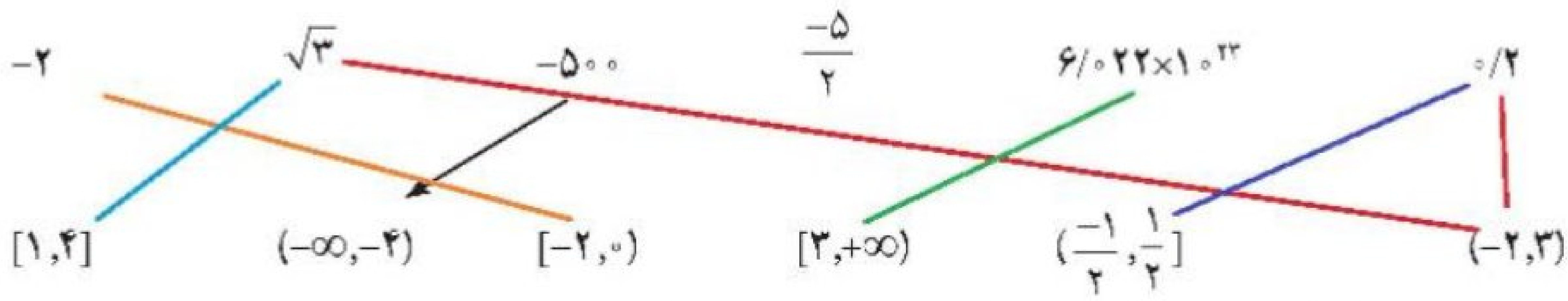
کار در کلاس

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید :

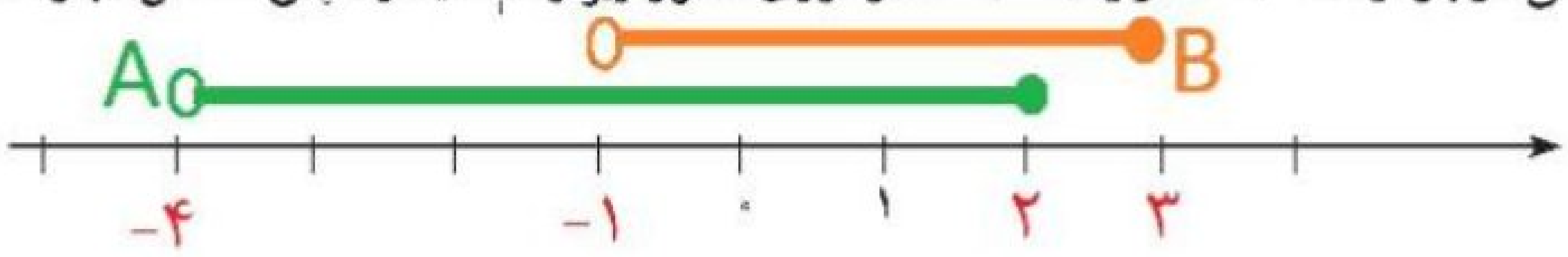
الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ ✓ ب) $-2 \in (-2, 0]$ ✗ پ) $0 \in (-2, 0]$ ✓ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ✓ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ ✗

ج) $[-1,2] \subseteq (-1,2)$ ✗ چ) $\{0,1\} \subseteq [-1,2)$ ✓ ح) $\varnothing \subseteq (-17,0]$ ✓ خ) $[2,5) = (2,5]$ ✗ د) $\sqrt{2} \in (0,1)$ ✗

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه $A = (-4,2]$ و $B = (-1,3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B = (-1,2]$ ب) $A \cup B = (-4,3]$ پ) $A - B = (-4,-1]$ $B - A = (2,3]$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید. $A=\{1,2,3\}$

$B=\{3,2,1,0,-1,-2,...\}$

ب) A چند عضو دارد؟ ۳ عضو دارد

پ) دربارهٔ تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟ دارای بی شمار عضو است.

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه‌های متناهی** می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعهٔ متناهی نیست؛ زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را **مجموعه‌های نامتناهی** می‌نامیم.

جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمالِ آمریکای جنوبی است و به‌دلیل همین وسعت، به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانهٔ آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به‌عنوان پرآب‌ترین رودخانهٔ دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجهٔ یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۳۹۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونهٔ مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این‌حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟

کار در کلاس

۱ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی		✓	۴ عضو دارد $\{۲,۳,۵,۷\}$
مجموعه انسان‌های روی زمین		✓	۷۵۰۰۰۰۰۰۰۰
مجموعه اعداد طبیعی فرد	✓		
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	۵۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		
مجموعه دانش‌آموزان مدرسهٔ شما		✓	۱۸۰
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی		✓	$۱۰^{۱۰} - ۱۰^{۹}$
مجموعه درخت‌های جنگل های آمازون		✓	۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک	✓		
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	✓		
بازه (۱ , ۰)	✓		
مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب		✓	$۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$

۲ دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید. ۱- مجموعه ی دبیران ریاضی آبادان ۲- مجموعه ی ماشین های پلاک آبادان

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.
مجموعه ی اعداد طبیعی که زیر مجموعه ی اعداد حسابی است .

۴ دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

$$B = [۱,۲] \quad A = [۱,۲) \quad \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B - A = \{۲\} \end{cases}$$

تذکر : تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به‌دست آورد.


طرحی از سلول‌های عصبی مغز

فعالیت

الف) $\frac{۱}{۳}$ عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ (۱ , ۰) بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. ۰/۰۰۰۱ , ۰/۲ , $\frac{۴}{۵}$, $\frac{۱}{۲}$

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ (۱ , ۰) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نامتناهی اند

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می توان گفت؟ نامتناهی است .

ث) اگر A دارای یک زیر مجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه ...نامتناهی... خواهد بود.

عدد آووگادرو

در شیمی تعداد $۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$ عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب را که ۱۸ گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به ۲۰ میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است!

به نظر شما، مجموعه مولکول های یک مول مشخص از آب، یک مجموعهٔ متناهی است یا نا متناهی؟

تمرین

۱) فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید. $U = \{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰,۳۵,۴۰,\dots\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید. $A = \{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵\}$

ت) دو زیر مجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به‌طوری که $C \subseteq D$.

$C = \{۲۰,۴۰,۶۰,\dots\}$, $D = \{۱۰,۲۰,۳۰,\dots\}$

۲) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶. متناهی

پ) بازه $(\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۲})$. نامتناهی

ت) $A=\{x \in \mathbb{N} \mid ۱<x<۲\}$. متناهی زیرا $A = \varnothing$

ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی

۳) دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد. $[۰,۲]$, $[۲,+\infty) \xrightarrow{\cap} \{۲\}$

۴) حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به‌دست آورید:

الف) $(-۲,۵] \cup (-۳,۰) = (-۳,۵]$

ب) $(۲,۹) \cap (-\infty,۶] = (۲,۶]$

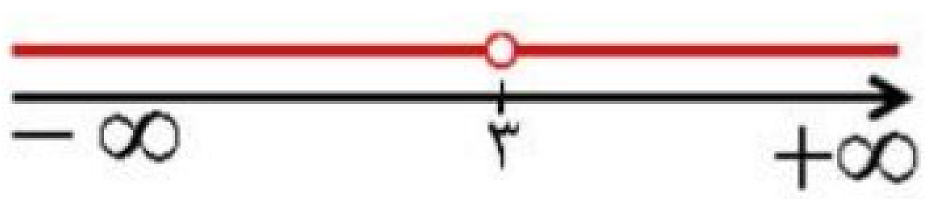
پ) $(۶,۱۰] \cap (۳,+\infty) = (۶,۱۰]$

ت) $(-\infty,۱) \cup [۱,+\infty) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

ث) $(۳,+\infty) - [۲,۴) = [۴,+\infty)$

ج) $[۲,۴) - (۳,+\infty) = [۲,۳]$

۵) مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



$(-\infty,۳) \cup (۳,+\infty)$

۶) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ متناهی

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: متمم یک مجموعه

کتابخانهٔ آیت اللّٰه العظمی مرعشی نجفی(ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به‌شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری دربارهٔ تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

نوع کتاب	تعداد
کتاب‌های خطی	۴۲۰۰۰ جلد
کتاب‌های چاپی	۱۰۰۰۰۰۰ جلد
کل کتاب‌ها	۱۰۴۲۰۰۰ جلد

مجموعه مرجع

فرض کنیم U نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تمام کتاب‌های کتابخانه آیت اللّٰه العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعهٔ کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با 'A نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را دربارهٔ کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعهٔ مرجع و 'A را متمم مجموعهٔ A می‌نامیم.

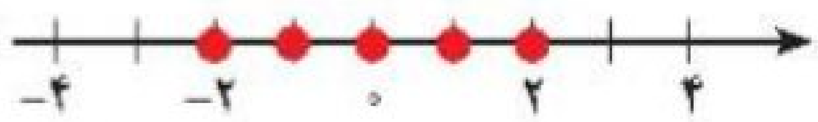
در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعهٔ مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$، آنگاه مجموعهٔ $U-A$ را **متمم** A می‌نامیم و آن را با نماد 'A نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر 'A شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

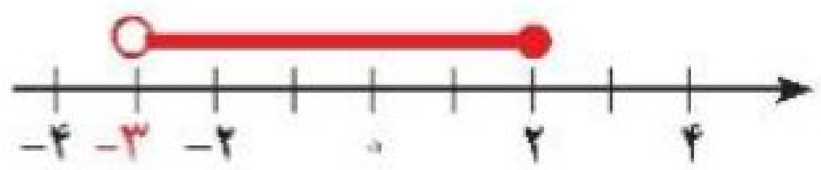
فعالیت

الف) دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$A=\{x\in \mathbb{Z} \mid -۳ < x \leq ۲\}$



$B=\{x\in \mathbb{R} \mid -۳ < x \leq ۲\}$



ب) A را با نمایش اعضا و B را به‌صورت یک بازه بنویسید.

A={-۲و-۱و۰و۱و۲}

B=(-۳و۲]

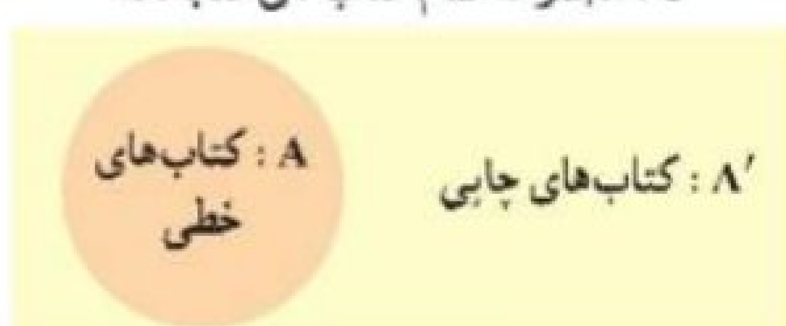
پ) در مورد A، اگر مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

$$A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots,-۴,-۳,۳,۴,\dots\} = \{\pm۳,\pm۴,\dots\}$$

ت) در مورد B با فرض این که $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty,-۳] \cup (۲,+\infty)$$

U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه



۱ اگر U مجموعهٔ شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعهٔ استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$A' = U - A$

= { سیستان و بلوچستان و هرمزگان و بوشهر و خوزستان و گلستان و مازندران و گیلان و اردبیل }

۲ فرض کنیم U مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شدهٔ کشور و B مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این‌صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

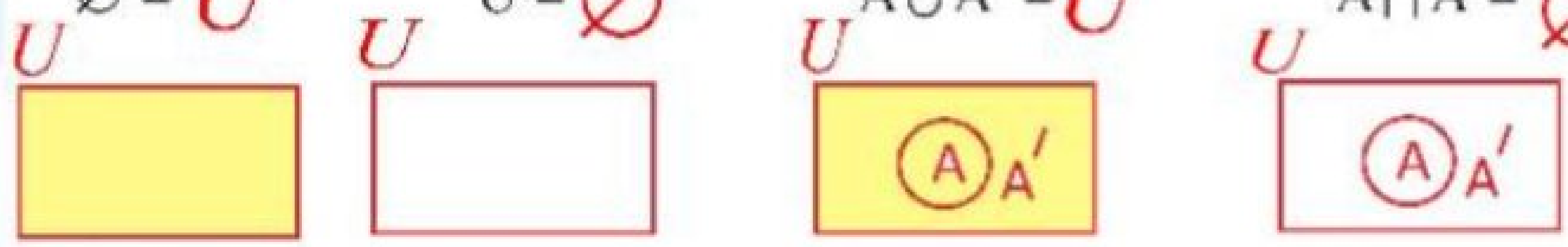
$B' = U - B =$ مجموعه ی اتومبیل های با پلاک زوج

۳ با فرض آنکه $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

{۱ ,۴ ,۶ ,۸ ,۹ ,۱۰ ,۱۲ ,۱۴ ,...}	{۱ ,۳ ,۵ ,۷ ,۹ ,...}
{۲ ,۴ ,۶ ,۸ ,۱۰ ,...}	{۳ ,۶ ,۹ ,۱۲ ,...}
{۱ ,۲ ,۴ ,۵ ,۷ ,۸ ,...}	{۱ ,۲ ,۳ ,... ,۹}
{۱۰ ,۱۱ ,۱۲ ,۱۳ ,۱۴ ,...}	{۲ ,۳ ,۵ ,۷ ,۱۱ ,۱۳ ,...}

۴ U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از آن می باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$\varnothing' = U$ $\quad U' = \varnothing$ $\quad A \cup A' = U$ $\quad A \cap A' = \varnothing$



نرخ بیکاری

جمعیت در سنّ کار در یک کشور را به‌عنوان مجموعه مرجع یعنی U درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A نشان‌دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این‌صورت A' برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ بیکاری آن کشور خواهد بود.

۵ الف) اگر $\mathbb{Z}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیریم، آنگاه $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{۰, -۱, -۲, -۳, ...\}$

ب) اگر $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیریم، در این صورت $\mathbb{N}'$ را روی محور نمایش دهید.

$\mathbb{N}' = \mathbb{R} - \mathbb{N}$

۶ فرض کنیم U={۱,۲,۳,۴,۵} مجموعه مرجع باشد و A={۱,۲,۳} و B={۲,۴}. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه ای می گیرید؟

$(A')'$
{۱,۲,۳}

A' = {۴ و ۵} $\quad$ B' = {۱ و ۳ و ۵}

$\Rightarrow (A')' = A$

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
{۱ و ۲ و ۳ و ۴}	{۵}	{۵}

$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
{۲}	{۱ و ۳ و ۴ و ۵}	{۱ و ۳ و ۴ و ۵}

$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$

$A - B$	$A - (A \cap B)$
{۱ و ۳}	{۱ و ۳}

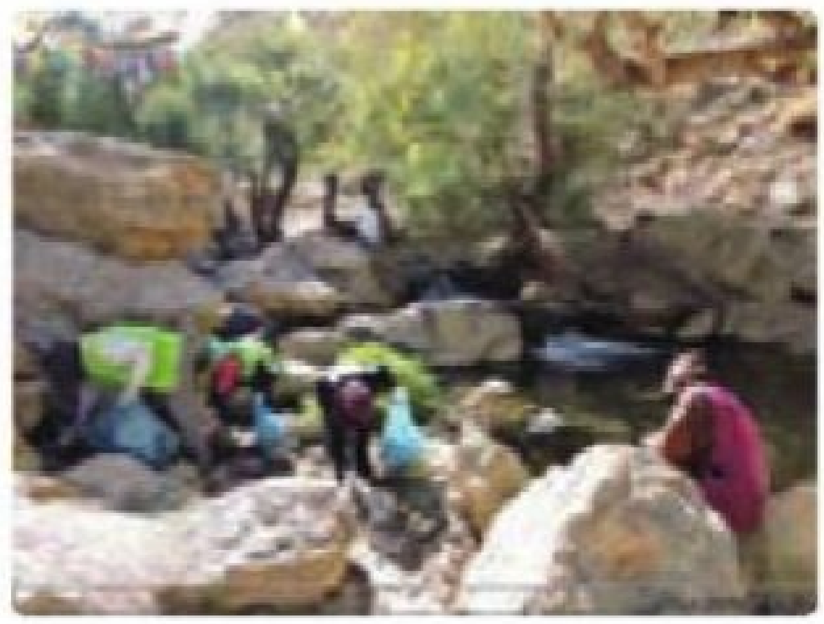
$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت n(A) استفاده می‌شود. مثلاً اگر {۲، ۳، ۵، ۷}=G در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم ۴=n(G). در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای n(A∪B) به‌دست آوریم.

فعالیت

۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسهٔ طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعهٔ هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند.



اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه {آنیتا، زهرا، الناز، الهام}=A و اعضای دانشجوی آن مجموعه {فاطمه، معصومه، فرزانه}=B هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به‌عبارت دیگر $A\cap B=\varnothing$.

به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعهٔ **جدا از هم** یا **مجزا** می‌گوییم.

الف) اعضای $A\cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A\cup B=${فرزانه و معصومه و فاطمه و الهام و الناز و زهرا و آنیتا}

n(A)	n(B)	$n(A\cup B)$	$n(A\cap B)$
۴	۳	۷	۰

ب) تعداد عضوهای $A\cup B$ چه رابطه‌ای با n(A) و n(B) دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک فرمول بنویسید. جمع تعداد عضوهای A و B برابر با تعداد اعضای $A\cup B$ است.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

با شرط این که دو مجموعه جدا از هم باشند $A\cap B=\varnothing$

۲ الف) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۸ : $A=\{$۱, ۲, ۴, ۷, ۱۴, ۲۸$\}\Rightarrow n(A)=$۶

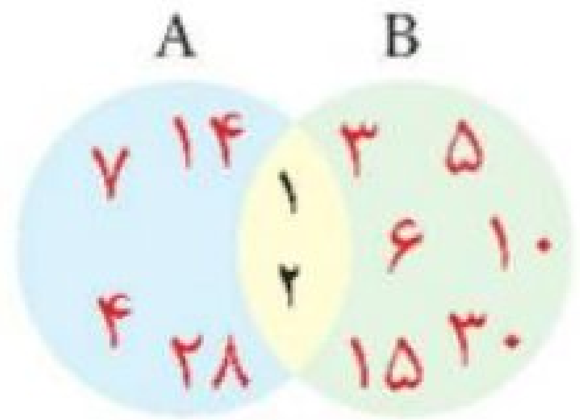
مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰ : $B=\{$۱و۲و۳و۵و۶و۱۰و۱۵و۳۰$\}\Rightarrow n(B)=$۸

شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰ : $A\cap B=\{$۱و۲$\}\Rightarrow n(A\cap B)=$۲

$A\cup B=\{$۱و۲و۳و۴و۵و۶و۷و۱۰و۱۴و۱۵و۲۸و۳۰$\}\Rightarrow n(A\cup B)=$۱۲

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n(A)	n(B)	$n(A\cap B)$	$n(A\cup B)$
۶	۸	۲	۱۲



پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به‌دست آوردید؛ یعنی $n(A\cup B) = n(A)+n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟ چون مجموعه های A و B عضوهای مشترک دارند یعنی
$A\cap B \neq \varnothing$

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطهٔ درست برای $n(A\cup B)$ را حدس بزنید.

همان‌طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم :

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

کار در کلاس

۱ یک دوره جشنوارهٔ فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی(کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به‌طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که :

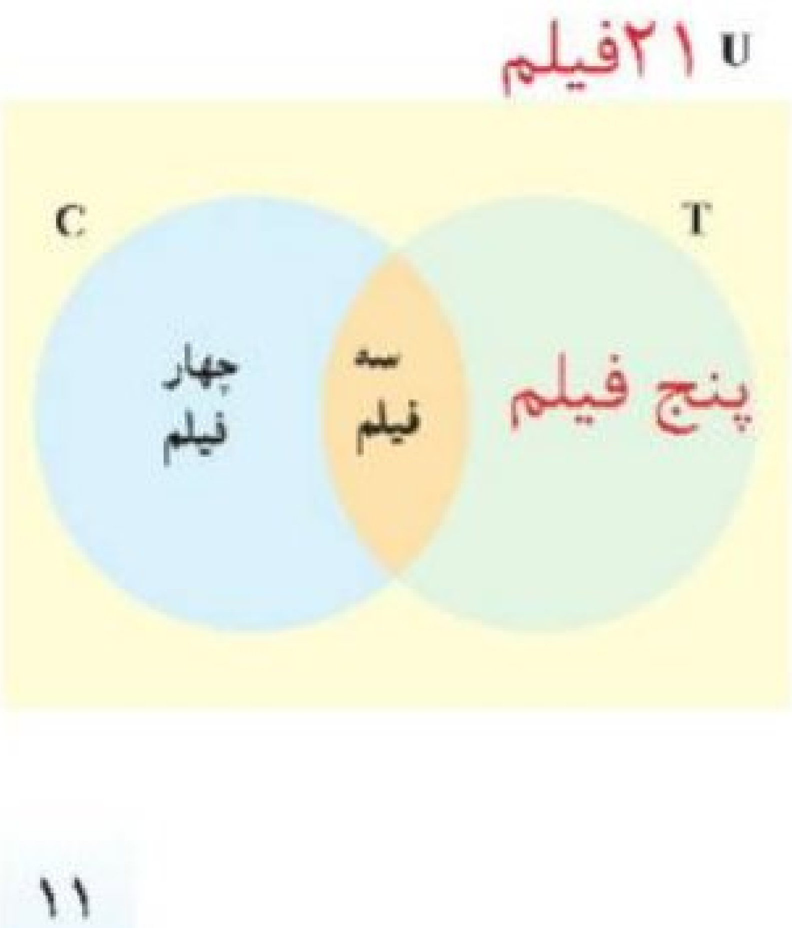
الف) پویانمایی یا طنزند.

ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل : مجموعهٔ شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پرکنید و جواب‌ها را بیابید.

الف) $n(C\cup T) = n(C) + n(T) - n(C\cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

ب) $n(C\cup T)' = n(U) - n(C\cup T) = 21 - 12 = 9$



روش دوم حل : در نمودار وِن مقابل، دو مجموعهٔ C و T سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده‌اند که عددِ مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

الف) پویانمایی یا طنز =۴+۳+۵=۱۲

ب) غیر پویا نمایی و غیر طنز =۲۱-۱۲=۹

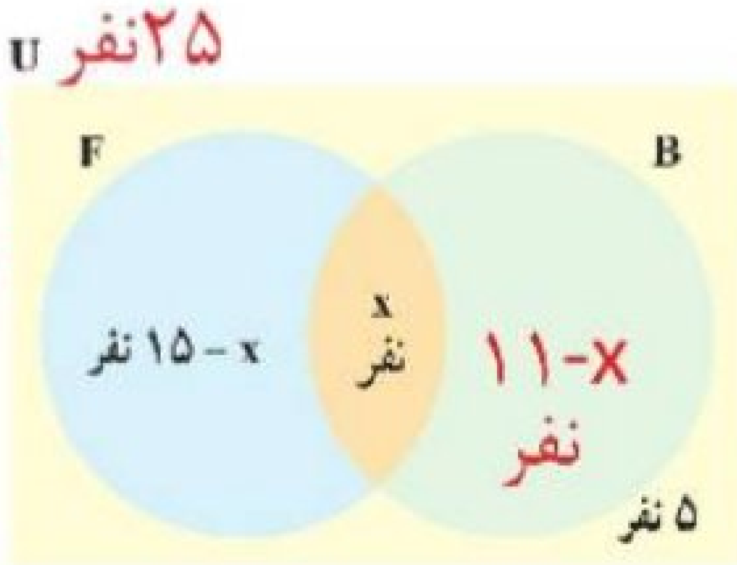
۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را بیابید.

$(۱۵-x)+x+(۱۱-x)+۵=۲۵$

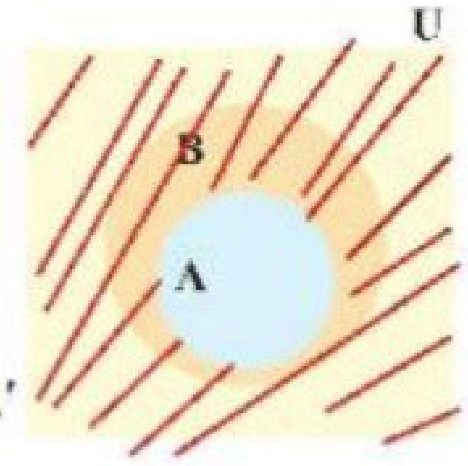
$\Rightarrow ۳۱-x=۲۵ \Rightarrow x=۶$

$\Rightarrow n(B\cap F)=۶$

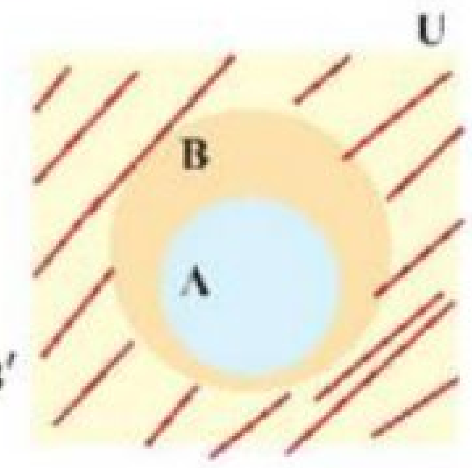


روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B\cup F)=۲۰$. حال با نوشتن فرمول $n(B\cup F)$ می‌توان $n(B\cap F)$ را به‌دست آورد.

$n(B\cup F)=n(B)+n(F)-n(B\cap F)\Rightarrow ۲۰=۱۱+۱۵-n(B\cap F)\Rightarrow n(B\cap F)=۶$



A' را هاشور بزنید



B' را هاشور بزنید

۳ الف) فرض کنیم $A\subseteq B\subseteq U$ که در آن U مجموعهٔ مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطهٔ زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

$A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$

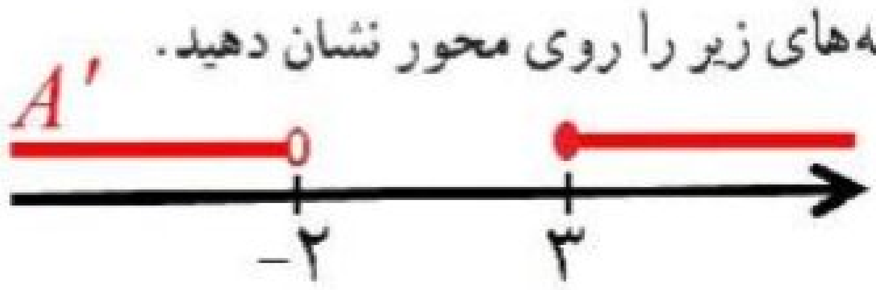
ب) اگر $U=\{a, b, c, d, e\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A=\{a, b\}$ و $B=\{a, b, c\}$، در این‌صورت $A\subseteq B$ می‌باشد. با به‌دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطهٔ زیرمجموعه بودن برقرار است.

$A'=\{c,d,e\}$, $B'=\{d,e\}\Rightarrow B'\subset A'$

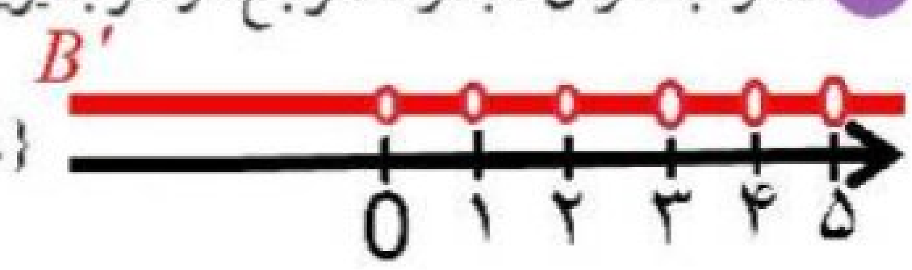
تمرین

۱ $\mathbb{R}$ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

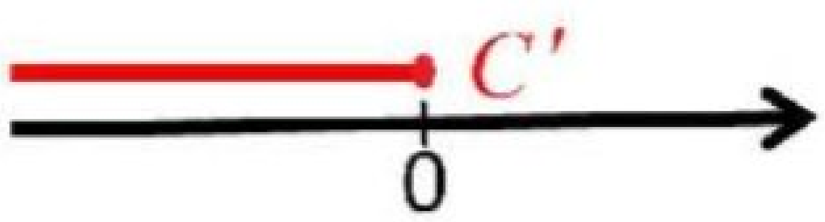
(الف) $A=[-۲,۳)$



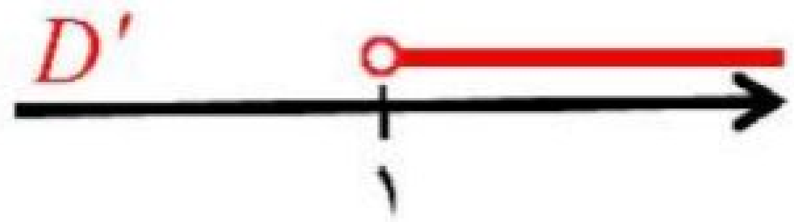
(ب) $B=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$



(پ) $C=(۰,+\infty)$



(ت) $D=(-\infty,۱]$



۲ $\mathbb{N}$ را به‌عنوان مجموعه مرجع درنظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

$A=$ مجموعه ی اعداد طبیعی زوج $A'=$ مجموعه ی اعداد طبیعی فرد

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

$B=\{۵,۶,۷,...\}$ $B'=\{۱,۲,۳,۴\}$

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به‌دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

$C=\{۲,۳,۵,۷\}$ $C'=\{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,...\}$ نامتناهی

۳ اگر $n(A)=۱۵$، $n(A\cap B)=۵$ و $n(A\cup B)=۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۰=۱۵+n(B)-۵\Rightarrow n(B)=۲۰$$

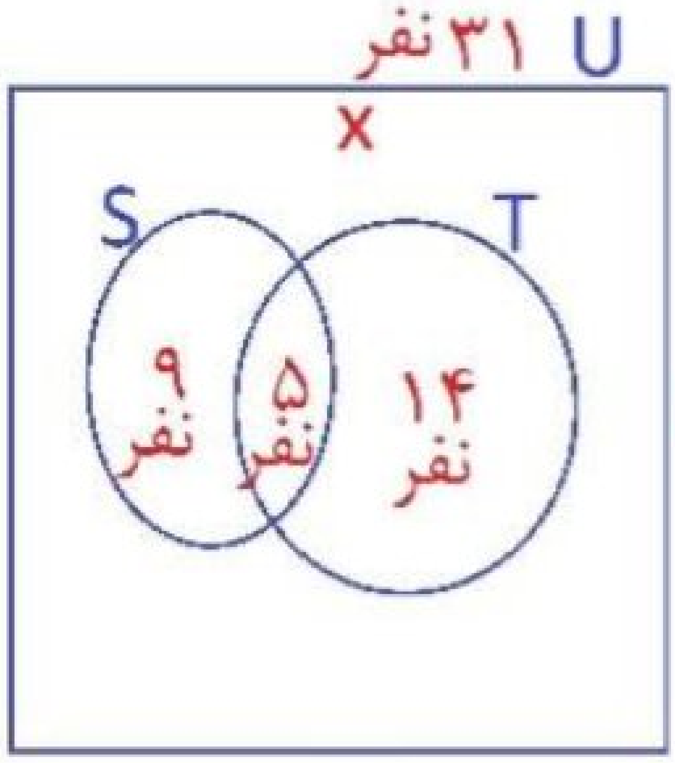
۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به‌طوری که $n(U)=۱۰۰$، $n(A)=۶۰$، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$ مطلوب است:

الف) $n(A\cup B)$ $\quad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cup B)=۶۰+۴۰-۲۰=۸۰$

ب) $n(A\cap B')$ $\quad n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۶۰-۲۰=۴۰$

پ) $n(A'\cap B)$ $\quad n(A'\cap B)=n(B\cap A')=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۴۰-۲۰=۲۰$

ت) $n(A'\cap B')$ $\quad n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۸۰=۲۰$



۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. ۹

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند. $x+۱۴+۵+۹=۳۱\Rightarrow x=۳$

۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) $\boxed{\text{دست‌کم}}$ از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

حداقل = به معنای اجتماع

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۰+۵۷-۳۲=۹۵$$

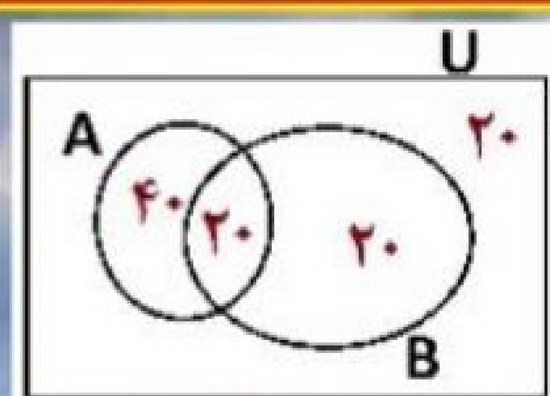
ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. ۷۰-۳۲=۳۸

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

فقط شرکت A + فقط شرکت B = (۷۰-۳۲)+(۵۷-۳۲)=۳۸+۲۵=۶۳

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند. $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۱۱۰-۹۵=۱۵$

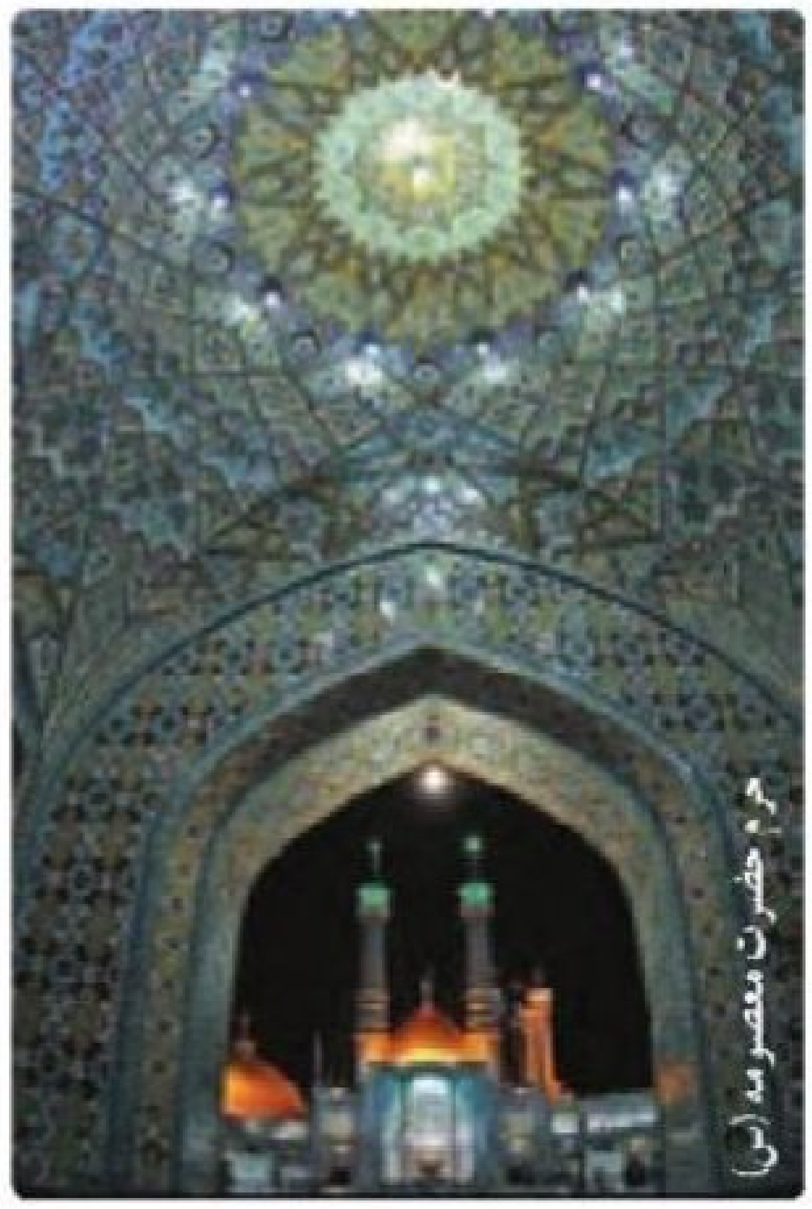
توجه : مسائل فوق را با شکل راحتتر می توان پاسخ داد به عنوان نمونه سوال ۴ را مشاهده بفرمایید



الف=۲۰+۲۰+۴۰
ب=۴۰
پ=۲۰
ت=۲۰

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: الگو و دنباله



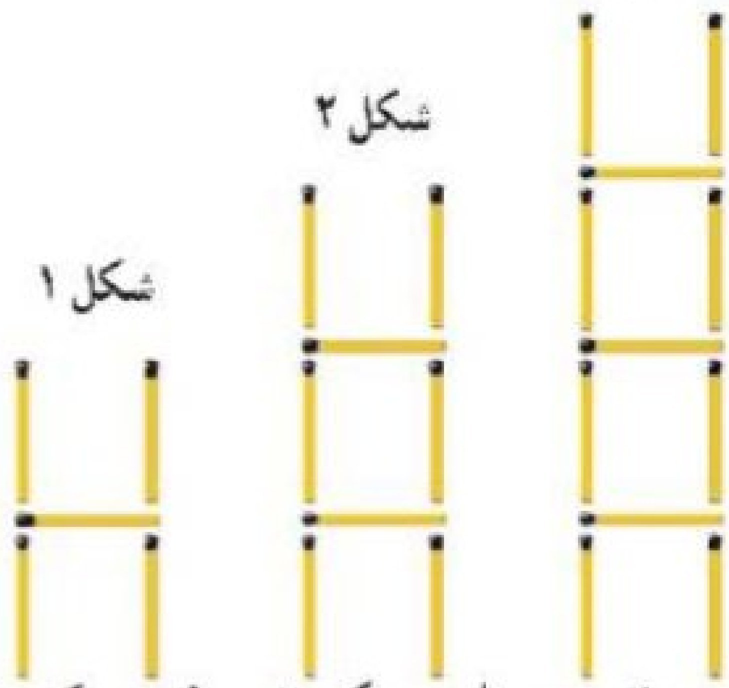
دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به‌عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی‌کاری شده یا ماربیچ‌های روی میوهٔ آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به‌طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به‌قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعهٔ الگوها.

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n :شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n :تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین n و a_n	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

به‌عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به‌طور خلاصه به‌صورت $a_1=5$ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم : a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های a_1، a_2 و a_3 متغیرهای اندیس‌دار[1] نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به‌ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جملهٔ اول الگوست؛ ۸ جملهٔ دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

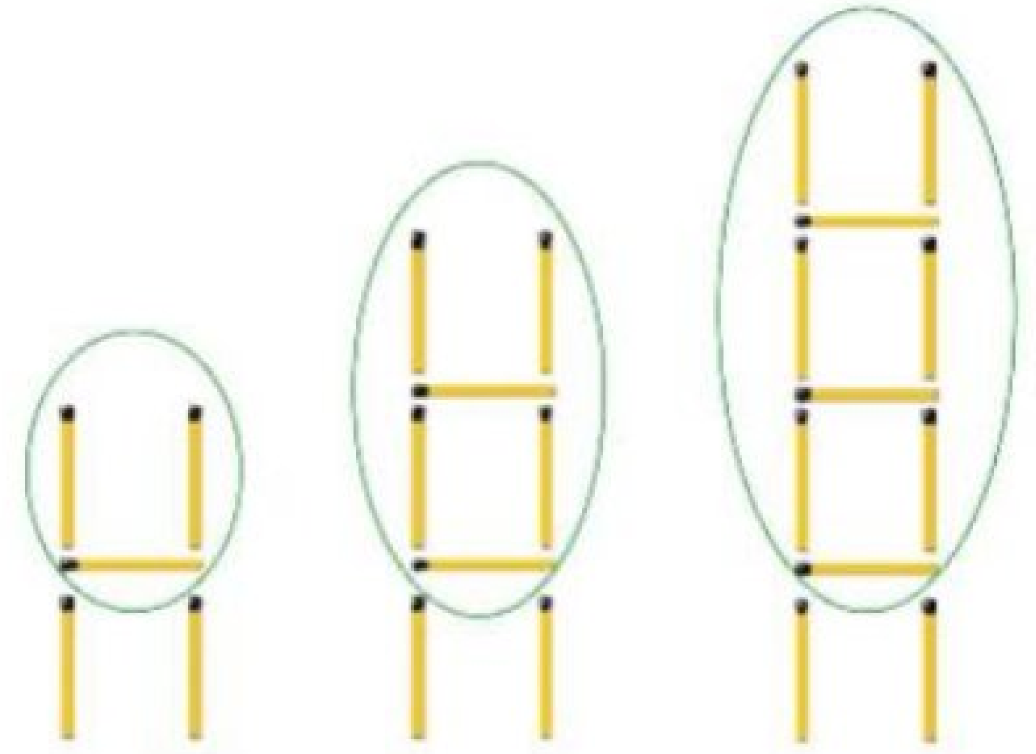
الف) با این نمادگذاری، a_4 نشان‌دهندهٔ چیست و مقدار آن چقدر است؟
جمله ی چهارم الگو است که مقدار آن ۱۴ می باشد .

ب) a_n به چه معناست؟ جمله ی n اُم الگو است .

پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

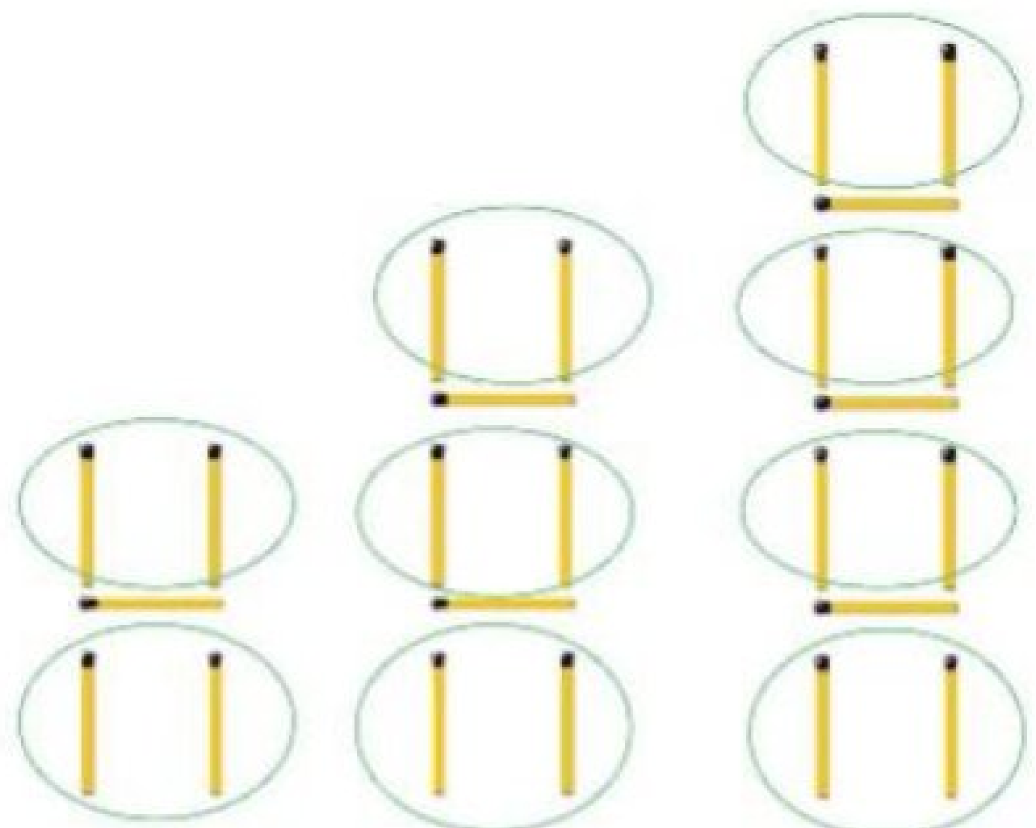
۱ــ در سال های گذشته با متغیرهایی مثل x، y و z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی‌که نام متغیرهای اندیس‌دار که در اینجا به‌کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام‌گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

فعالیت



۱ آیدا برای به‌دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل‌های الگو را به‌صورت روبه‌رو درنظر گرفت. به‌کمک این روش، مقدار $a_{۱۰}$ و a_n را به‌دست آورید.

$a_۱=۱(۳)+۲$ $\quad a_۲=۲(۳)+۲$ $\quad a_۳=۳(۳)+۲$ $\quad a_۴=۴(۳)+۲$ $\quad \dots \quad a_{۱۰}=۱۰(۳)+۲$ $\quad \dots \quad a_n=n(۳)+۲=۳n+۲$



۲ آیسا روش دیگری را به‌کار برد. او تعداد چوب کبریت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به‌طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را درجای مشخص شده بنویسید.

$a_۱=۱+۲(۲)$ $\quad a_۲=۲+۳(۲)$ $\quad a_۳=۳+۴(۲)$ $\quad a_۴=۴+۵(۲)$ $\quad \dots \quad a_{۱۰}=۱۰+(۱۰+۱)۲$ $\quad \dots \quad a_n=n+(n+۱)۲$

چوب های افقی — چوب های عمودی

$\Rightarrow a_n=۳n+۲$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به‌دست آوردن حاصل a_n می‌دانید؟

$a_۱=۵+۰\times۳$ $\quad a_۲=۵+۱\times۳$ $\quad a_۳=۵+۲\times۳$ $\quad a_n=۵+(n-۱)\times۳=۳n+۲$

۴ همان‌طور که در قسمت‌های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار a_n را به‌ترتیب به‌صورت‌های $a_n=۳n+۲$ و $a_n=n+(n+۱)(۲)$ به‌دست آوردند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

جواب آیسا $a_n=n+۲n+۲=۳n+۲ \rightarrow$ همان جواب آیدا است

۵ به کمک رابطهٔ $a_n=۳n+۲$ تعداد چوب کبریت‌های شکل بیستم را بیابید.

$n=۲۰ \Rightarrow a_{۲۰}=۳(۲۰)+۲=۶۲$

۶ با استفاده از رابطهٔ $a_n=۳n+۲$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

$a_n=۷۷ \Rightarrow ۳n+۲=۷۷ \Rightarrow ۳n=۷۵ \Rightarrow n=۲۵$ ۲۵ اُمین شکل دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبریت‌های شکل nام است. $a_n=۳n+۲$ را جملهٔ عمومی الگو می‌نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر، در اختیار داشتن جملهٔ عمومی یک الگو به‌معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

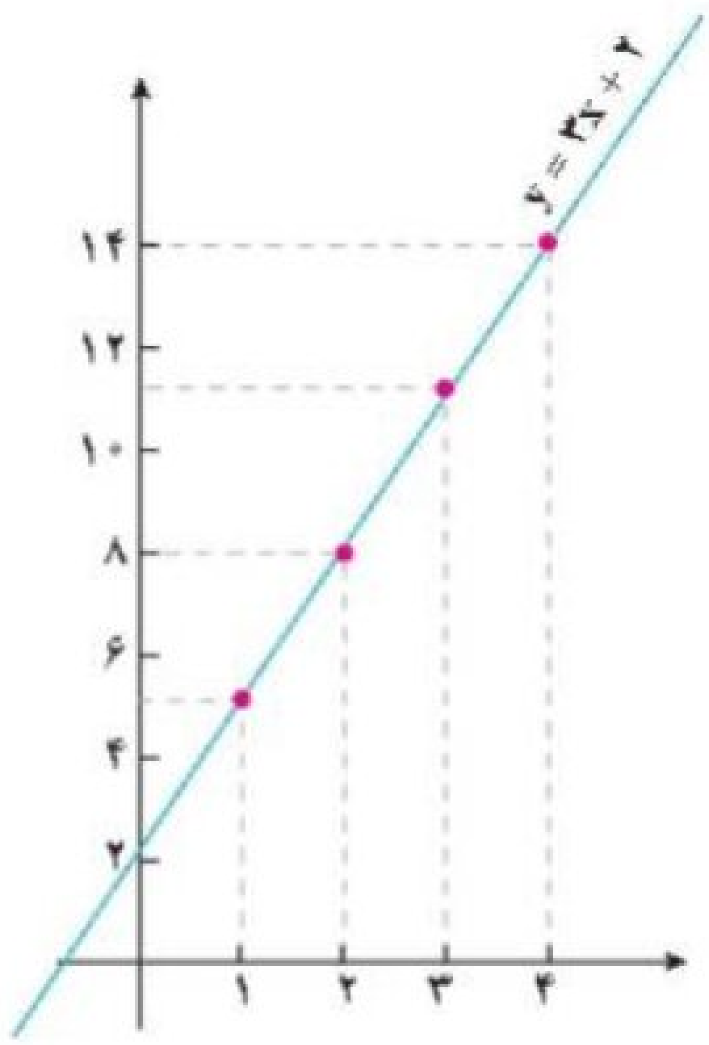
n	a_n	(n, a_n)
۱	۵	(۱،۵)
۲	۸	(۲،۸)
۳	۱۱	(۳،۱۱)
۴	۱۴	(۴،۱۴)
.	.	.
.	.	.
.	.	.

الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جملهٔ دقیقاً ۳ واحد بیش از جملهٔ قبل از خودش بود.

a_1	a_2	a_3	a_4	
۵	۸	۱۱	۱۴	...
	+۳	+۳	+۳	

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای پی بردن به‌دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را درنظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحهٔ مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y=۳x+۲$ قرار می‌گیرند. به‌عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادلهٔ خط گفته شده صدق می‌کند.



شباهت بین معادلهٔ خط یعنی $y=۳x+۲$ و جملهٔ عمومی الگو یعنی $a_n=۳n+۲$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادلهٔ خط به‌عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

> به‌طور کلی الگوهایی را که جملهٔ عمومی آنها به‌صورت $t_n=an+b$ است، **الگوهای خطی** می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $t_n=an+b$، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است.
به‌عنوان مثال در یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $t_n=-۴n+۱۵$، هر جمله نسبت به جملهٔ قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, -۹, \dots$

مثال

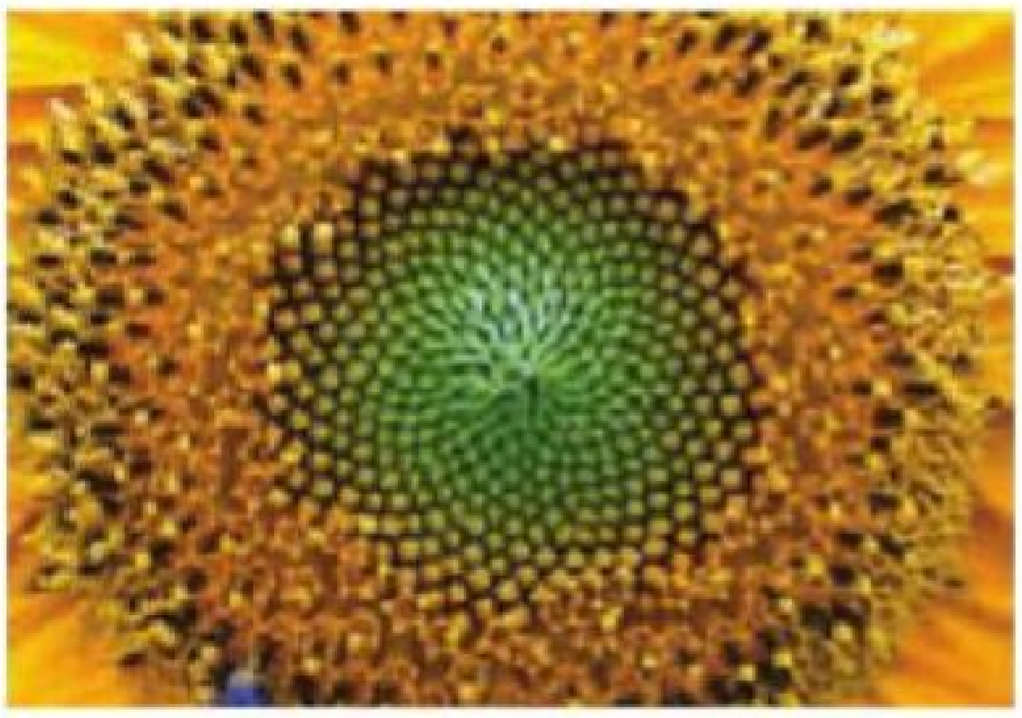
در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به‌ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جملهٔ عمومی به‌صورت $C_n=an+b$ باشد. پس داریم:

$$C_۴ = ۱۷ \Rightarrow a(۴)+b = ۱۷$$
$$C_{۱۰} = ۴۱ \Rightarrow a(۱۰)+b = ۴۱$$
$$\overline{\quad ۶a = ۲۴ \quad} \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow b = ۱$$

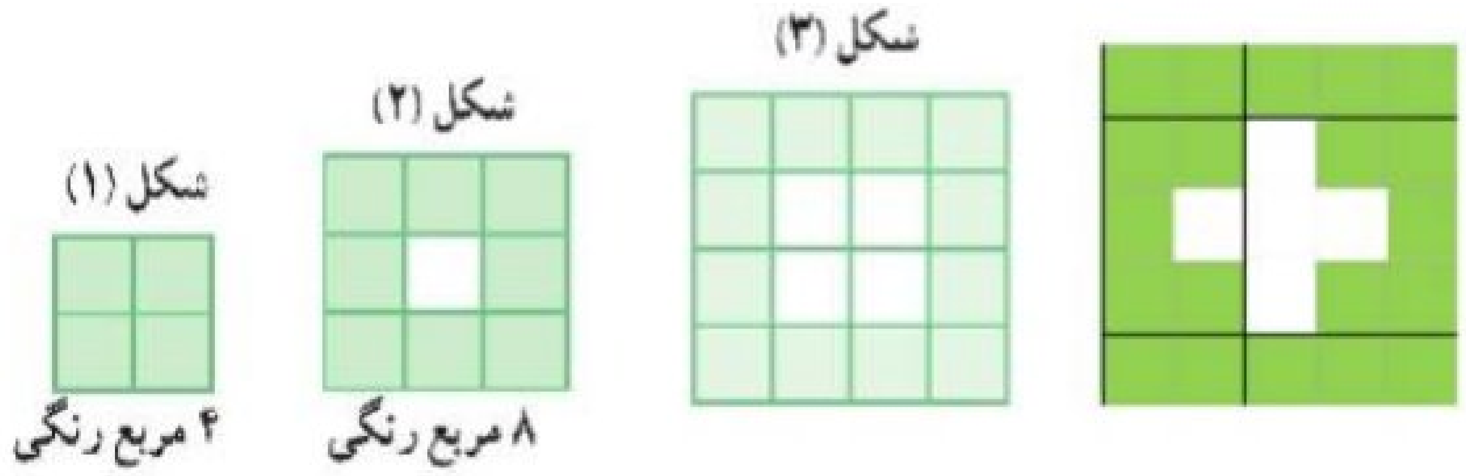
پس $C_n=۴n+۱$. بنابراین جملات الگو به‌صورت زیر خواهند بود:

$$۵, ۹, ۱۳, \underbrace{۱۷}_{C_۴}, ۲۱, ۲۵, ۲۹, ۳۳, ۳۷, \underbrace{۴۱}_{C_{۱۰}}, ۴۵, \dots$$



کار در کلاس

۱) شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



n : شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع‌های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و b_n	$b_1=۴$	$b_2=۸$	$b_3=۱۲$	$b_4=۱۶$	$b_5=۲۰$

۲) توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود.

چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی در آن ، عددی ثابت است.

۳) با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطهٔ $b_n=an+h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به‌دست آورید.

اختلاف هر دو جمله ی متوالی برابر ۴ است پس a=۴ و h=0 ، پس : $b_n=۴n$

۴) شکل شمارهٔ ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

$b_n=۴n \xrightarrow{n=۲۵۰} b_{۲۵۰}=۱۰۰۰$

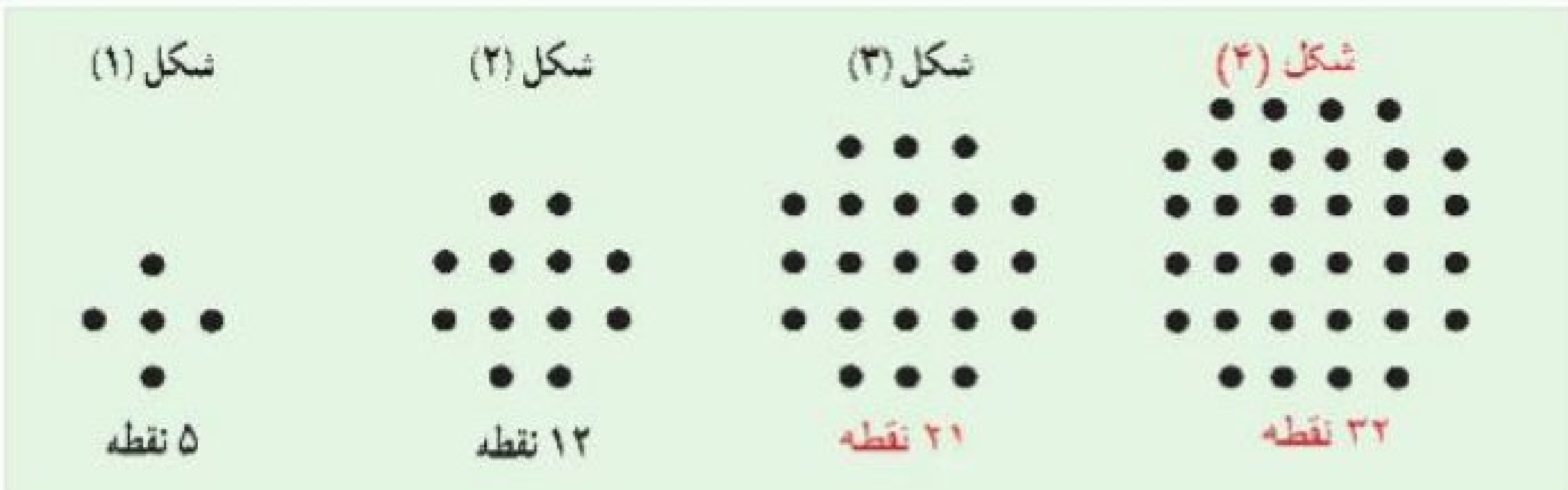
۵) در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟ $b_n=۱۴۴ \Rightarrow ۴n=۱۴۴ \Rightarrow n=۳۶$

یعنی در مرحله ی ۳۶ اُم ، ۱۴۴ مربع رنگی داریم .

الگوهای غیرخطی

فعالیت

۱) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



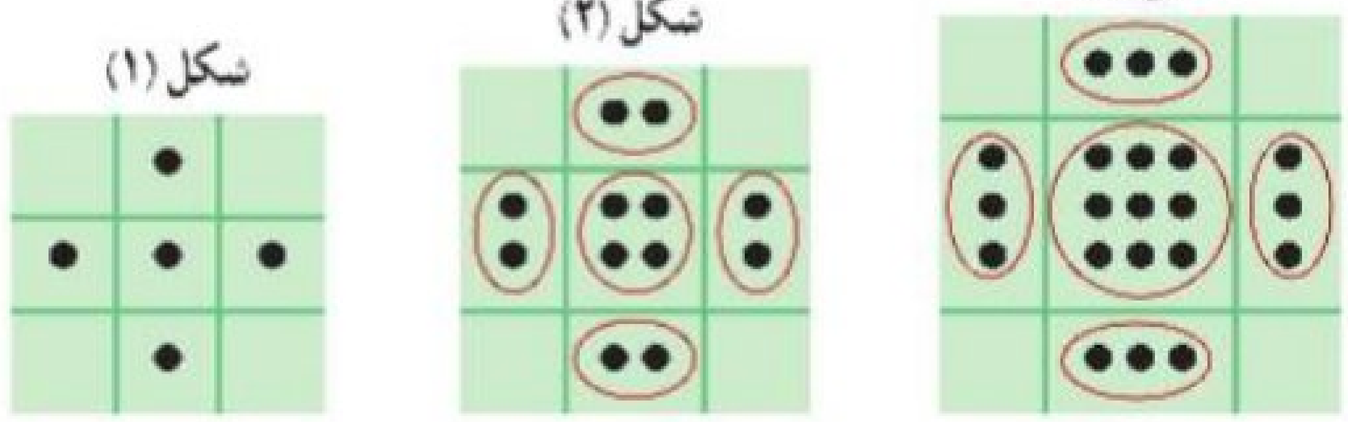
n : شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	
رابطه بین n و t_n	$t_1=۵$	$t_2=۱۲$	$t_3=۲۱$	$t_4=۳۲$	

۲) آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

خیر ، زیرا اختلاف هر دو جمله ی متوالی ، عددی ثابت نیست .

۳ امیررضا برای یافتن جملهٔ عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.

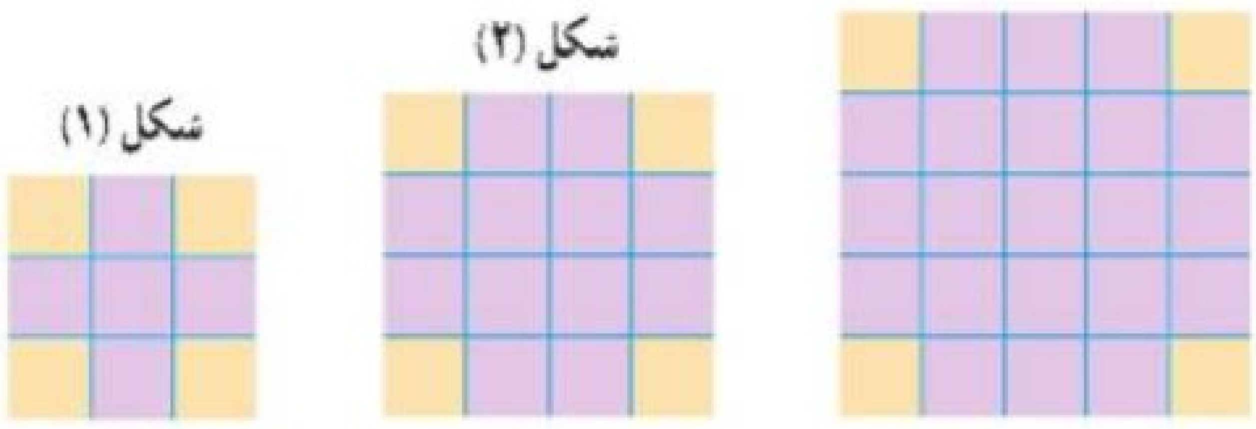
شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)



$t_۱=(۱)^۲+۴(۱)$ $t_۲=(۲)^۲+۴(۲)$ $t_۳=(۳)^۲+۴(۳)$ $t_۴=(۴)^۲+۴(۴)$ ... $t_n=n^۲+۴n$

۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به‌صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)



$t_۱=۳^۲-۴$ $t_۲=۴^۲-۴$ $t_۳=(۳+۲)^۲-۴$ $t_۴=(۴+۲)^۲-۴$ ... $t_n=(n+۲)^۲-۴$

$=(۱+۲)^۲-۴$ $=(۲+۲)^۲-۴$

۵ نشان دهید که دو مقدار به‌دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

جواب امیر محمد: $t_n=(n+۲)^۲-۴=n^۲+۴n+۴-۴=n^۲+۴n \Rightarrow$ جواب امیر رضا

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به‌عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به‌صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵ , ...

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

> هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک **دنباله** می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جملهٔ اول این دنباله را با t_1، جملهٔ دوم را با t_2 و به همین ترتیب جملهٔ nام یا جملهٔ عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس :

$t_1 = ۵$ ، $t_2 = ۱۲$ ، $t_3 = ۲۱$ ، ... ، $t_n = n^2 + 4n$ ، ...

گفتنی است که این دنباله یک دنبالهٔ درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جملهٔ عمومی آن یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنبالهٔ دلخواه مثال بزنید. ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,...:دنباله فیبو ناتچی ۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,... : دنباله اعداد طبیعی زوج

۲ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

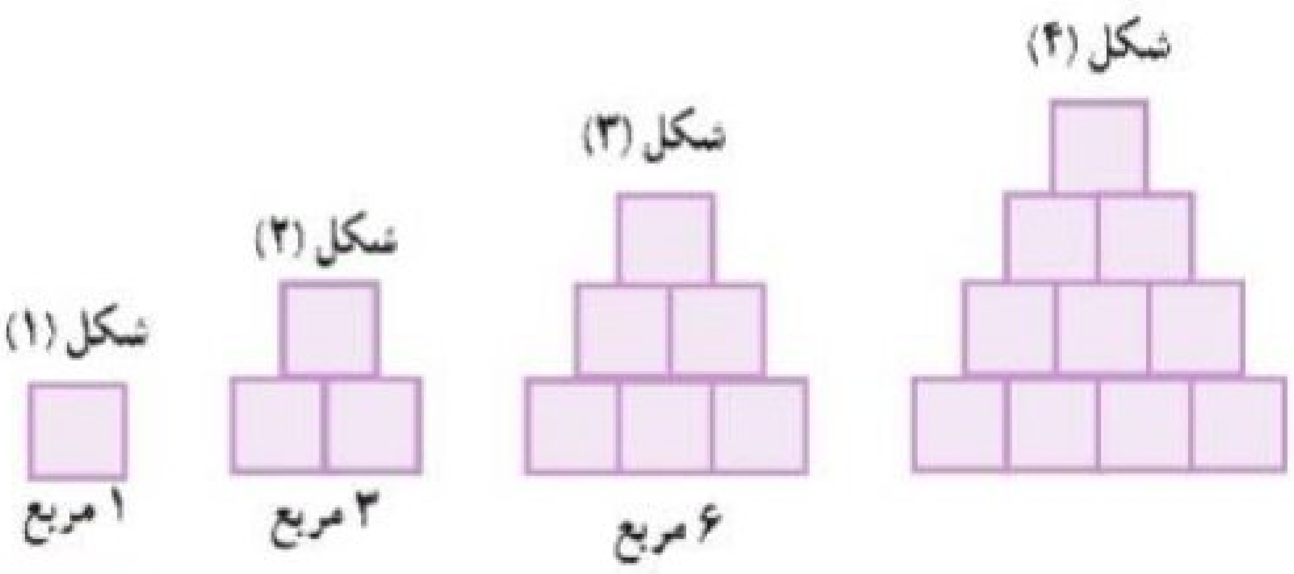
الف) $a_n = n^2 - 1$: ۰ , ۳ , ۸ , ۱۵ , ۲۴

ب) $b_n = -n + 4$: ۳ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱- , ۲-

ج) $c_n = -13 + 2n$: ۱۱- , ۹- , ۷- , ۵- , ۳-

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جملهٔ بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جملهٔ عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	$-n$	...
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	...	$\sqrt{2n-1}$	...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	n^2	...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۱	...	$(0/1)^n$	...
-1	۸	-27	۶۴	-125	۲۱۶	-343	...	$(-1)^n n^3$	...
۵	۱۸	۳۱	۴۴	۵۷	۷۰	۸۳		...	
-2	۱	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$		...	
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۳		...	
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶		...	
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳		...	
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷		...	



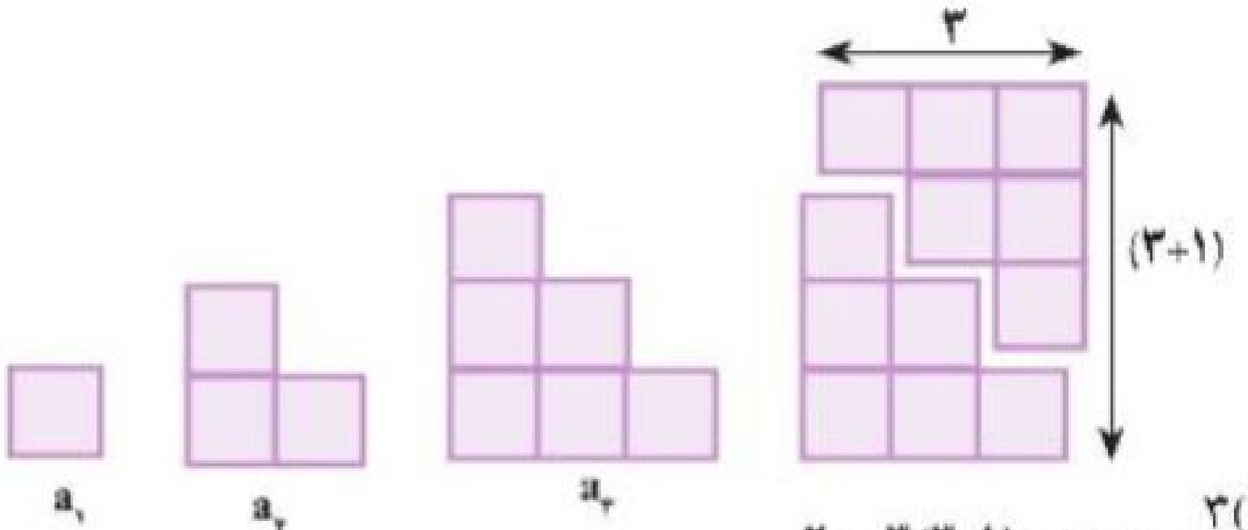
۴ الگوی مقابل را درنظر بگیرید.

الف) تعدادمربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید. ...و۲۱و۱۵و۱۰و۶و۳و۱ (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ خیر چرا؟

چون اختلاف هر دو جمله ی متوالیِ آن، عددی ثابت نیست.

پ) شکل‌های الگوی بالا را به‌صورت مقابل تبدیل می‌کنیم.
با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست‌آورید.



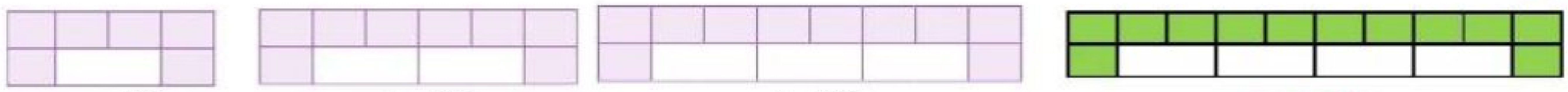
$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ت) به کمک مرحلهٔ قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ **همان جمله ی n اُم مرحله ی قبلی است.**

تمرین

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید

۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید

۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید

۱۲ کاشی تیره
۴ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیرهٔ آن را مشخص کنید. ۱۲ کاشی تیره

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید. ...و۱۸و۱۶و۱۴و۱۲و۱۰و۸و۶

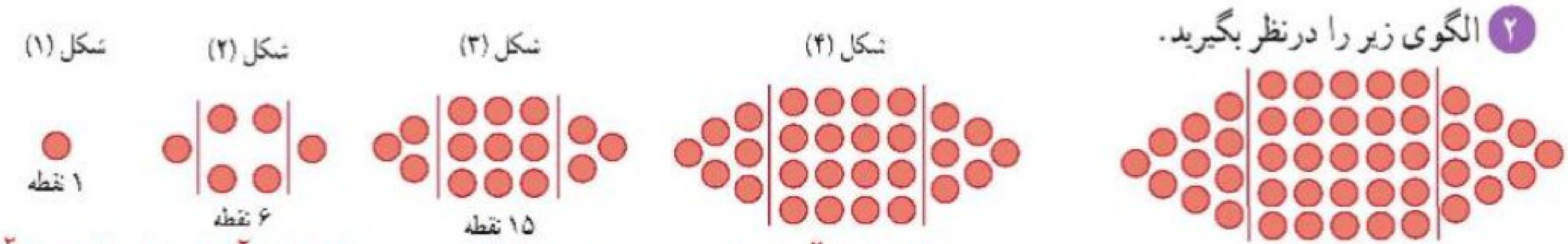
پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را برحسب n بنویسید. ۲n+۴ $t_n = 2(n+2) = 2n+4$
تعداد کاشی های سفید

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟ $t_{100} = 2\times100+4 = 204$

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

$t_n = 50 \Rightarrow 2n+4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23 \Rightarrow$ تعداد کاشی های سفید ۲۳ است.

۲ الگوی زیر را درنظر بگیرید.



$t_1 = 1^2 + 0\times1$ $t_2 = 2^2 + 1\times2$ $t_3 = 3^2 + 2\times3$ $t_4 = 4^2 + 3\times4$ $t_5 = 5^2 + 4\times5$

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید. ...و۶۶و۴۵و۲۸و۱۵و۶و۱

ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید. $t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟ $t_{10} = 2\times10^2 - 10 = 190$

۳ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n$ ... و ۱۶و۱۲و۸و۴

(ب) $b_n = 3n+1$ ...و۱۳و۱۰و۷و۴

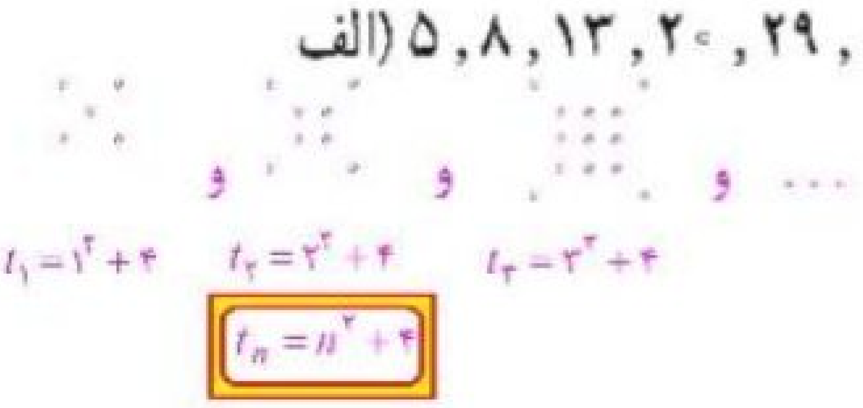
(پ) $c_n = n^2+2$ ...و۱۸و۱۱و۶و۳

(ت) $d_n = n^2+n$ ...و۲۰و۱۲و۶و۲

۴ برای دنباله‌های درجهٔ دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جملهٔ عمومی هر دنباله را بیابید.

(الف ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...

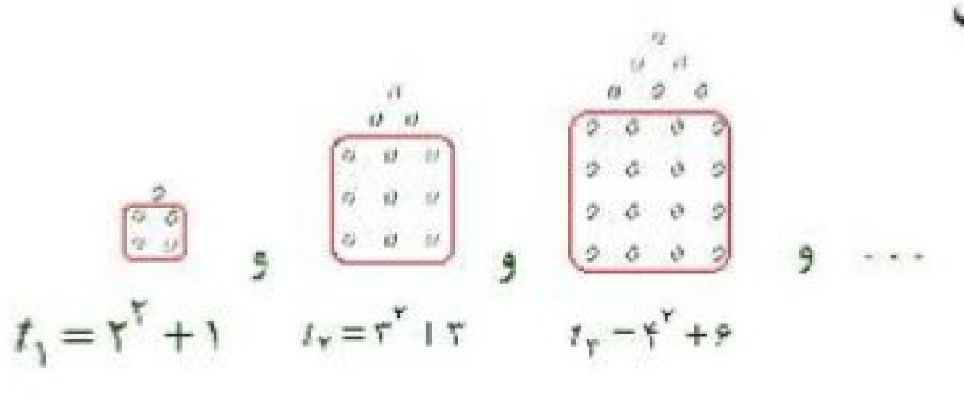
(ب ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...



و و و ...

$t_1 = 1^2+4$ $t_2 = 2^2+4$ $t_3 = 3^2+4$

$\boxed{t_n = n^2+4}$



و و و ...

$t_1 = 2^2+1$ $t_2 = 3^2+3$ $t_3 = 4^2+6$

یاد آوری: دنباله ... و۶و۳و۱ دنباله مثلثی
با جمله عمومی $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.
بنابراین $t_n = (n+1)^2 + a_n$ و در نتیجه :

$\boxed{t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}}$

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددیِ خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به‌عبارت دیگر :

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید، یک **دنبالهٔ حسابی** نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

فعالیت

۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزارهٔ سوم میلادی به بعد به‌صورت زیر است که جملات یک دنبالهٔ حسابی‌اند.

۲۰۰۰ , ۲۰۰۴ , ۲۰۰۸ , ۲۰۱۲ , ۲۰۱۶ , ۲۰۲۰ , ...

الف) جملهٔ اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $t_1 = \boxed{۲۰۰۰}$, $d = \boxed{۴}$

ب) نهمین دورهٔ المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ ۲۰۳۲

پ) با تکمیل جدول زیر، جملهٔ عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_9	...	t_n	...
۲۰۰۰	۲۰۰۰+۱(۴)	۲۰۰۰+۲(۴)	۲۰۰۰+۳(۴)	...	۲۰۰۰+(۸)(۴)	...	۲۰۰۰+(n−۱)(۴)	...

ت) بیست‌وچهارمین دورهٔ المپیک در هزارهٔ سوم میلادی درچه سالی برگزار خواهد شد؟

t_{24}=۲۰۰۰+(۲۴-۱)(۴)=۲۰۹۲

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی را به‌دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + ۱d$	$t_1 + ۲d$	$t_1 + ۳d$	$t_1 + ۴d$	$t_1 + ۵d$	...	$t_1 + (n-۱)d$	...

+d +d +d

همان‌طور که مشاهده شد،

جملهٔ nام یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدر نسبت d به‌صورت $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ است.

کار در کلاس

۱) در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و سپس جملهٔ عمومی هر کدام را به‌دست آورید.

الف) $۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, \boxed{۲۵}, \boxed{۳۰}, \boxed{۳۵}, \ldots$, $d=۵$, $a_n = ۵+(n-۱)۵ = ۵n$

ب) $۱, ۳, ۵, ۷, \boxed{۹}, \boxed{۱۱}, \boxed{۱۳}, \ldots$, $d=۲$, $b_n = ۱+(n-۱)۲ = ۲n-۱$

پ) $۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \boxed{۲۱}, \boxed{۲۵}, \boxed{۲۹}, \ldots$, $d=۴$, $c_n = ۵+(n-۱)۴ = ۴n+۱$

ت) $۱۳, ۷, ۱, -۵, \boxed{-۱۱}, \boxed{-۱۷}, \boxed{-۲۳}, \ldots$, $d=-۶$, $d_n = ۱۳+(n-۱)(-۶) = -۶n+۱۹$

۲) A و B دو شرکت عرضه‌کنندهٔ سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم کارت‌های شرکت A	سیم کارت‌های شرکت B
هزینهٔ ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان	هزینهٔ ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
هزینهٔ هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان	هزینهٔ هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان‌دهندهٔ هزینهٔ کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینهٔ مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را برحسب n بنویسید. $a_n = ۲۰۰۰ + ۳۰n$ و $b_n = ۳۰۰۰ + ۲۰n$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n: زمان مکالمهٔ ماهانه (دقیقه)	۰	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
a_n: هزینهٔ سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰	۶۸۰۰
b_n: هزینهٔ سیم کارت B	...	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشند؟ بله چرا؟ اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.

زیرا جمله ی عمومی انها به شکل یک دنباله خطی است. دلیل دیگر اینکه اختلاف هر دو جمله ی متوالی آنها مقدار ثابتی است.

$a_n : d = ۳۲۰۰ - ۲۰۰۰ = ۱۲۰۰$ و $b_n : d = ۳۸۰۰ - ۳۰۰۰ = ۸۰۰$

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

$a_{۶۰} = ۳۸۰۰$, $b_{۶۰} = ۴۲۰۰$ $\Rightarrow$ به سارا سیم کارت شرکت A را پیشنهاد می کنیم.

$a_{۱۵۰} = ۶۵۰۰$, $b_{۱۵۰} = ۶۰۰۰$ $\Rightarrow$ به فاطمه سیم کارت شرکت B را پیشنهاد می کنیم.

مثال

در دنبالهٔ حسابی زیر جملهٔ شانزدهم را به‌دست آورید. $۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, \ldots$

حل : آرتین و آرکان این مثال را به‌روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟

آرکان : یک الگوی خطی با قدرنسبت ۷ داریم. پس

$t_n = ۷n + b$

$t_۱ = ۷(۱) + b$

$۴ = ۷ + b \Rightarrow b = -۳$

جملهٔ عمومی $t_n = ۷n - ۳$

$t_{۱۶} = ۷(۱۶) - ۳$

$t_{۱۶} = ۱۰۹$

آرتین : از جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی استفاده می‌کنیم :

$t_n = t_۱ + (n-۱)d$

$t_{۱۶} = t_۱ + ۱۵d$

$= ۴ + (۱۵)(۷)$

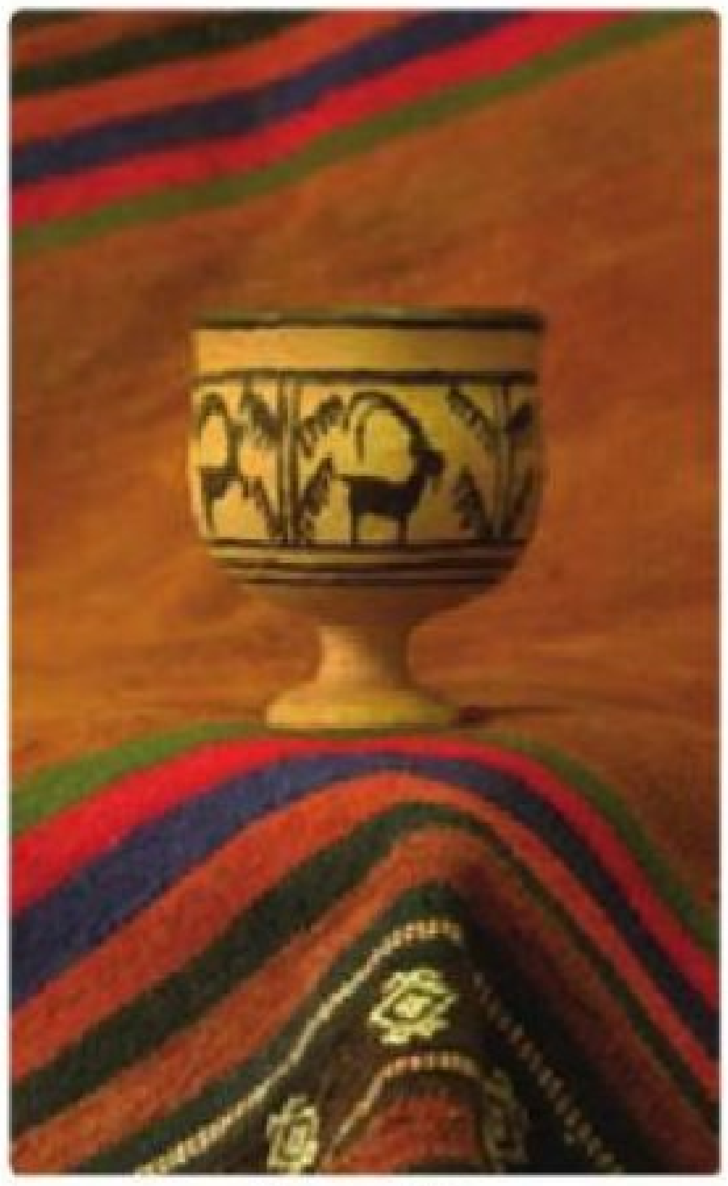
$= ۱۰۹$

کار در کلاس

۱ الف) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد. ... و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴

ب) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد. ... و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ و ۲۵

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جملهٔ مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند. ... و ۳- و ۱- و ۱ و ۳ و ۵


بزنمایی روی سفال

۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه **واسطهٔ حسابی** درج کرده‌ایم.

حل : با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به‌دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_۱ = ۱۸ \\ t_۵ = ۶۲ \end{cases} \Rightarrow t_۱ + ۴d = ۶۲ \Rightarrow d = ۱۱$$

$t_۱$				$t_۵$
۱۸	۲۹	۴۰	۵۱	۶۲

توجه : برای محاسبه ی قدرنسبت می توان از رابطه $d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$ نیز استفاده کرد.

بنابراین $d = \frac{t_۵ - t_۱}{۵ - ۱} = \frac{۶۲ - ۱۸}{۴} = ۱۱$

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطهٔ حسابی درج کنید.

$d = \frac{t_۳ - t_۱}{۳ - ۱} = \frac{۸۰ - ۲۰}{۲} = ۳۰$

۲۰	۵۰	۸۰

$d = \frac{t_۴ - t_۱}{۴ - ۱} = \frac{۸۰ - ۲۰}{۳} = ۲۰$

۲۰	۴۰	۶۰	۸۰

$d = \frac{t_۵ - t_۱}{۵ - ۱} = \frac{۸۰ - ۲۰}{۴} = ۱۵$

۲۰	۳۵	۵۰	۶۵	۸۰

$d = \frac{t_۶ - t_۱}{۶ - ۱} = \frac{۸۰ - ۲۰}{۵} = ۱۲$

۲۰	۳۲	۴۴	۵۶	۶۸	۸۰

$d = \frac{t_۷ - t_۱}{۷ - ۱} = \frac{۸۰ - ۲۰}{۶} = ۱۰$

۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جملهٔ بیست‌ویکم را بیابید.

الف) ۳ ، ۱۰ ، ۱۷ ، ۲۴ ، ... حسابی و $d=۷$

$t_{۲۱}=a+۲۰d=۳+۱۴۰=۱۴۳$

ب) ۱ ، ۲ ، ۴ ، ۸ ، ... ناحسابی

پ) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, ...$ حسابی و $d=\sqrt{۳}$

$t_{۲۱}=a+۲۰d=\sqrt{۳}+۲۰\sqrt{۳}=۲۱\sqrt{۳}$

ت) ۱۰ ، ۷ ، ۴ ، ۱ ، ... حسابی و $d=-۳$

$t_{۲۱}=a+۲۰d=۱۰+(-۶۰)=-۵۰$

ث) $\frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}, ۱, ...$ حسابی و $d=\frac{۱}{۵}$

$t_{۲۱}=a+۲۰d=\frac{۲}{۵}+\frac{۲۰}{۵}=\frac{۲۲}{۵}$

ج) ۲ ، ۲ ، ۲ ، ۲ ، ۲ ، ... حسابی و $d=۰$

$t_{۲۱}=a+۲۰d=۲+۰=۲$

۲ در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هفتم به‌ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به‌دست آوردن جملهٔ اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$d=\frac{t_۷-t_۳}{۷-۳}=\frac{۵۶-۲۰}{۴}=۹ \xrightarrow{t_۳=a+۲d=۲۰} a+۱۸=۲۰ \Rightarrow a=۲ \Longrightarrow$ دنباله: ۲، ۱۱، ۲۰، ۲۹، ...

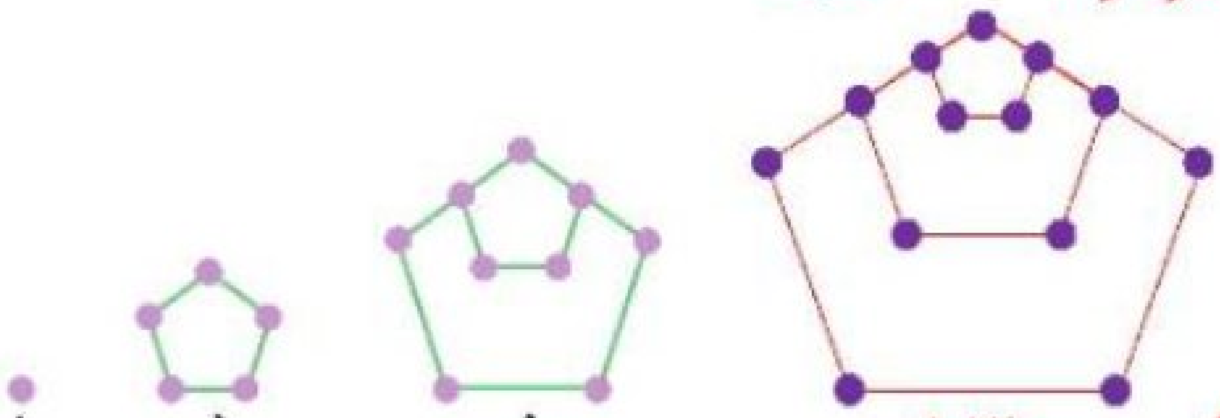
۳ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_۱+t_۲+t_۳=۳ \\ t_۴+t_۵+t_۶=۳۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+a+d+a+۲d=۳ \\ a+۳d+a+۴d+a+۵d=۳۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+۳d=۳ \\ ۳a+۱۲d=۳۹ \end{cases} \xrightarrow{\times(-)} \begin{cases} -۳a-۳d=-۳ \\ ۳a+۱۲d=۳۹ \end{cases}$$

$$۹d=۳۶ \Rightarrow d=۴ \Rightarrow a=-۳$$

دنباله: $-۳, ۱, ۵, ۹, ...$

۴ الف) دو جملهٔ بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



دنباله از نوع حسابی است : ۱، ۵، ۹، ۱۳، ...

ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.

$a=۱, d=۴ \Rightarrow t_n=۱+(n-۱)\times ۴ \Rightarrow t_n=۴n-۳$

پ) جملهٔ چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

$t_n=۳۹۷ \Rightarrow ۴n-۳=۳۹۷ \Rightarrow n=۱۰۰$

۵ الف) واسطهٔ حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$d=\frac{t_۳-t_۱}{۳-۱}=\frac{۱۱-۵}{۲}=۳ \Rightarrow ۵, \boxed{۸}, ۱۱$

ب) واسطهٔ حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

$d=\frac{t_۳-t_۱}{۳-۱}=\frac{۳۰-۲۰}{۲}=۵ \Rightarrow ۲۰, \boxed{۲۵}, ۳۰$

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ واسطه ی حسابی دو عدد ، همان میانگین آنها است.

به عبارت دیگر : اگر c و b و a سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی باشند، bرا واسطه ی حسابی نامیده و داریم : $b=\frac{a+c}{۲}$ یا $a+c=۲b$

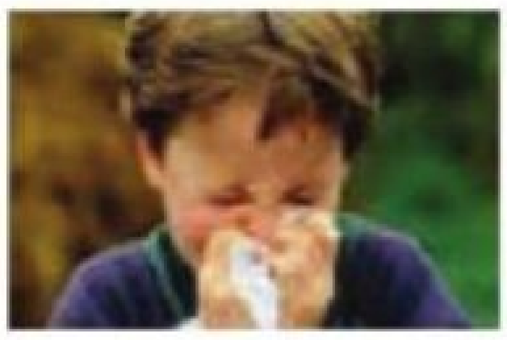
۶ مسئلهٔ زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید.

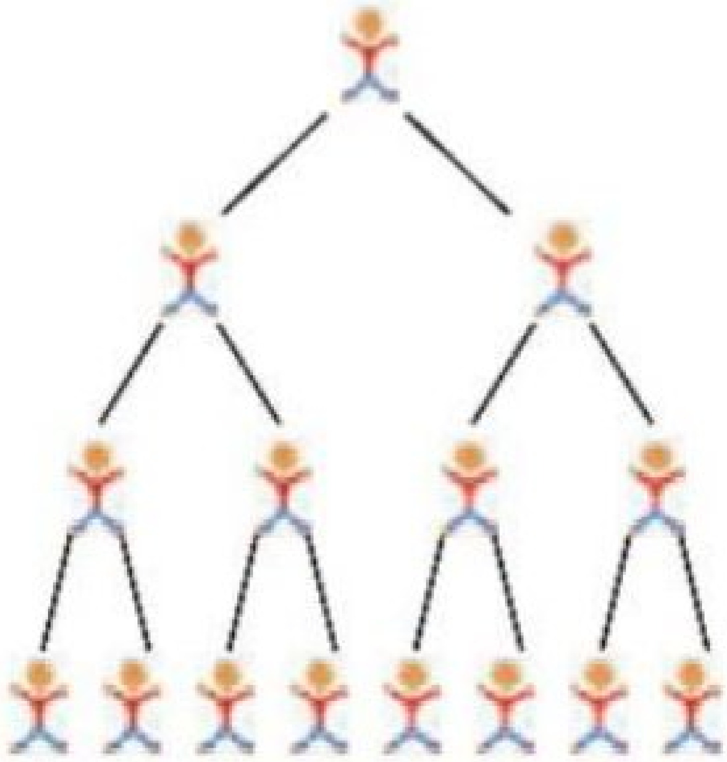
«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».

دنباله ی حسابیِ تشکیل شده را $t_۱, t_۲, t_۳, t_۴, t_۵$ در نظر می گیریم . طبق فرض سوال می توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵=۱۰۰ \Rightarrow ۵a+۱۰d=۱۰۰ \xrightarrow{\div ۵} a+۲d=۲۰ \\ \frac{۱}{۳}(t_۳+t_۴+t_۵)=t_۱+t_۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳a+۹d=۶a+۳d \Rightarrow a=۲d \end{array}\right\} \Rightarrow d=۵, a=۱۰$$

بنابراین دنباله به صورت ۳۰، ۲۵، ۲۰، ۱۵، ۱۰ می باشد.





دنباله هندسی

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک‌زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش‌بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اولِ بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به‌طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

t_n : تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند	n : روز
(امید و محسن) ۲	۱
$۲\times۲=۲^۲$	۲
$۴\times۲=۲^۳$	۳
$۸\times۲=۲^۴$	۴
$۱۶\times۲=۲^۵$	۵
$۳۲\times۲=۲^۶$	۶
...	⋮
$t_n=۲^n$	n

فعالیت

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟ $t_{۱۰}=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟ $t_{۱۱}=۲^{۱۱}=۲۰۴۸$

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود. $t_n=۱۶۳۸۴\Rightarrow ۲^n=۲^{۱۴}\Rightarrow n=۱۴$

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به‌صورت دنبالهٔ زیر بنویسیم :

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ...

این دنباله یک دنبالهٔ حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جملهٔ متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$......=\frac{۳۲}{۱۶}=\frac{۱۶}{۸}=\frac{۸}{۴}=\frac{۴}{۲}=۲$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی :

> **دنبالهٔ هندسی**، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

فعالیت

در حالت کلی در یک دنبالهٔ هندسی، اگر جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n	...
t_1	t_1r	t_1r^2	t_1r^3	t_1r^4	...	t_1r^{n-1}	...

×r ×r ×r ×r

با دقت در الگوی به‌کار رفته در جملات بالا دیده می‌شود که:

> جملهٔ nام دنبالهٔ هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد.

کار در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبهٔ هفتمین جملهٔ دنبالهٔ هندسی ......, ۱, ۳, ۹ روش‌های مقابل را به‌کار برده‌اند.
کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ نگار توضیح دهید.
برای محاسبه ی قدر نسبت باید هر جمله را بر جمله ی قبلی آن تقسیم کرد. ولی متاسفانه نرگس جمله را بر جمله ی بعدیش تقسیم نموده است. که غلط است.

نرگس	نگار
$r = \frac{۹}{۳} = ۳$	$r = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$
$t_۷ = ۹(۳)^{۷-۱}$	$t_۷ = ۹(\frac{۱}{۳})^{۷-۱}$
$= ۶۵۶۱$	$= \frac{۱}{۸۱}$

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جملهٔ بعدی را بنویسید. سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به‌دست آورید.

الف) $\overset{a_1}{۲}, ۶, ۱۸, ۵۴, \boxed{۱۶۲}, \boxed{۴۸۶}, ..., a_n = ۲ \times ۳^{n-۱}$
$\times ۳ \quad \times ۳ = r$

ب) $۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, \boxed{۸۰}, \boxed{۱۶۰}, ..., b_n = ۵ \times ۲^{n-۱}$

پ) $۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \boxed{۶۰۰۰۰}, \boxed{-۶۰۰۰۰۰}, ..., c_n = ۶ \times (-۱۰)^{n-۱}$

ت) $۴, ۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \boxed{\frac{۱}{۴}}, \boxed{\frac{۱}{۸}}, ..., d_n = ۴ \times (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = ۲^۲ \times \frac{۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۱}{۲^{n-۳}}$

۳ الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک **واسطهٔ هندسی** بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به‌جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان درنظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = ۳ \\ t_۳ = ۴۸ \Rightarrow t_1 r^۲ = ۴۸ \Rightarrow r^۲ = ۱۶ \Rightarrow r = \pm ۴ \end{cases}$$

۳	۱۲	۴۸	یا	۳	-۱۲	۴۸

اگر t_n و t_m دو جمله ی متمایز دنباله ی هندسی باشند آنگاه $r^{n-m} = \frac{t_n}{t_m}$ است.

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطهٔ هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟
خیر جواب یکتا نیست. بلکه دارای دو جواب است.

$t_1 = ۳ \quad , \quad t_۵ = ۴۸$
$\Rightarrow r^{۵-۱} = \frac{t_۵}{t_1} \Rightarrow r^۴ = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶ \Rightarrow \boxed{r = \pm ۲}$

۳	۶	۱۲	۲۴	۴۸	یا	۳	-۶	۱۲	-۲۴	۴۸

> اگر a, b, c سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند، آنگاه b را واسطه ی هندسی (میانگین هندسی) نامیده و خواهیم داشت: $ac = b^۲$
> اولی در آخری برابر است با مربع وسطی

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنبالهٔ هندسی حاصل شود.

۱۰	b	۴۰۰۰

$\Rightarrow b^۲ = ۱۰ \times ۴۰۰۰ = ۴۰۰۰۰ \Rightarrow b = \pm ۲۰۰$

$t_1 = ۱۰ \quad , \quad t_۴ = ۸۰۰۰۰ \Rightarrow r^{۴-۱} = \frac{t_۴}{t_1} \Rightarrow r^۳ = ۸۰۰۰ \Rightarrow \boxed{r = ۲۰}$

۱۰	۲۰۰	۴۰۰۰	۸۰۰۰۰

$t_1 = ۴ \quad , \quad t_۶ = ۹۷۲ \Rightarrow r^{۶-۱} = \frac{t_۶}{t_1} \Rightarrow r^۵ = ۲۴۳ \Rightarrow \boxed{r = ۳}$

۴	۱۲	۳۶	۱۰۸	۳۲۴	۹۷۲

۴ یک کوه یخی هزار تُنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟

الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند. ب) حدود $\frac{1}{3}$ آن باقی می‌ماند. ✓

پ) تقریباً نصف آن آب می‌شود. ت) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند.

اگر در هر روز $\frac{1}{5}$ وزن خود را از دست بدهد به این معناست که $\frac{4}{5}$ وزنش باقی می ماند.

پایان روز پنجم	پایان روز چهارم	پایان روز سوم	پایان روز دوم	پایان روز اول
$\frac{4}{5}\times 409.6 = 327.68$	$\frac{4}{5}\times 512 = 409.6$	$\frac{4}{5}\times 640 = 512$	$\frac{4}{5}\times 800 = 640$	$\frac{4}{5}\times 1000 = 800$

تمرین

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7, 28, 112, 448, \dots$ هندسی است و $r = \frac{28}{7} = 4$

ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$ هندسی نیست

پ) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$ هندسی است و $r = -\frac{1}{2} \div 1 = -\frac{1}{2}$

ت) $5, 5, 5, 5, \dots$ هندسی است و $r = \frac{5}{5} = 1$

---

۲ چند دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

با توجه به انتخاب جمله های اول دلخواه ، بی شمار دنباله ی هندسی با قدر نسبت داده شده می توان نوشت .

فرض: $t_1 = 1 \Rightarrow 1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \dots$

فرض: $t_1 = -1 \Rightarrow -1, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}, \dots$

---

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

درست نیست ، زیرا بی شمار دنباله می توان نام برد که نه حسابی و نه هندسی باشند ، به عنوان نمونه دنباله مثلثی ، مربعی ، فیبوناتچی و ... یا دنباله های غیر معروف مثل : ... و ۶ و ۴- و ۲

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

درست نیست ، دنباله هایی با اعداد ثابت ناصفر ، در نظر بگیرید این دنباله ها حسابی با قدرنسبت صفر و هندسی با قدرنسبت یک می باشند . مانند ... و ۲ و ۲ و ۲

---

۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخهٔ دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد ؟

کاهش ۲۰ درصدی قیمت به معنی آن است که قیمت هر سال ۸۰ درصد سال قبل است .بنابراین :

بعد از سه سال	بعد از دو سال	بعد از یک سال
$500000\times\left(\frac{80}{100}\right)^3 = 256000$	$500000\times\left(\frac{80}{100}\right)^2$	$500000\times\frac{80}{100}$

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می آید ؟ $t_n = 500000\times\left(\frac{80}{100}\right)^n$

---

۵ حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را محاسبه کنید. ... و ۸ و ۴ و ۲

$$2^1\times 2^2\times 2^3\times\cdots\times 2^{20} = 2^{(1+2+3+\cdots+20)} = 2^{\frac{20\times 21}{2}} = 2^{210}$$

توجه : حاصلضرب n جمله نخست دنباله هندسی برابر است با : $P_n = a^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}}$ بنابراین : $\xrightarrow{a=r=2} P_{20} = 2^{20}\times 2^{\frac{20\times 19}{2}} = 2^{20}\times 2^{190} = 2^{210}$

---

۶ جملات سوم و ششم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند . دنباله را مشخص کنید .

$t_3 = 12 \ , \ t_6 = 96 \Rightarrow r^{6-3} = \frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

$\xrightarrow{r=2} a\times 2^2 = 12 \Rightarrow a = 3$

دنباله : $3, 6, 12, \dots$

---

۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهندهٔ حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۴/۸	۱۴۹۶۷/۰۶	۱۴۲۱۸/۷۰۷	۱۳۵۰۷/۷۷۱	۱۲۸۳۲/۳۸۲	۱۲۱۹۰/۷۶۲

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟ دنباله ی هندسی با قدر نسبت ۰/۹۵

توجه داشته باشید که اگر هر سال ۵٪ کاهش یابد به این معنی است که هر سال برابر است با ۹۵٪ سال قبل ، پس باید هر سال را در ۰/۹۵ ضرب کرد تا سال آینده ی آن بدست آید .

تهیه کنندگان:

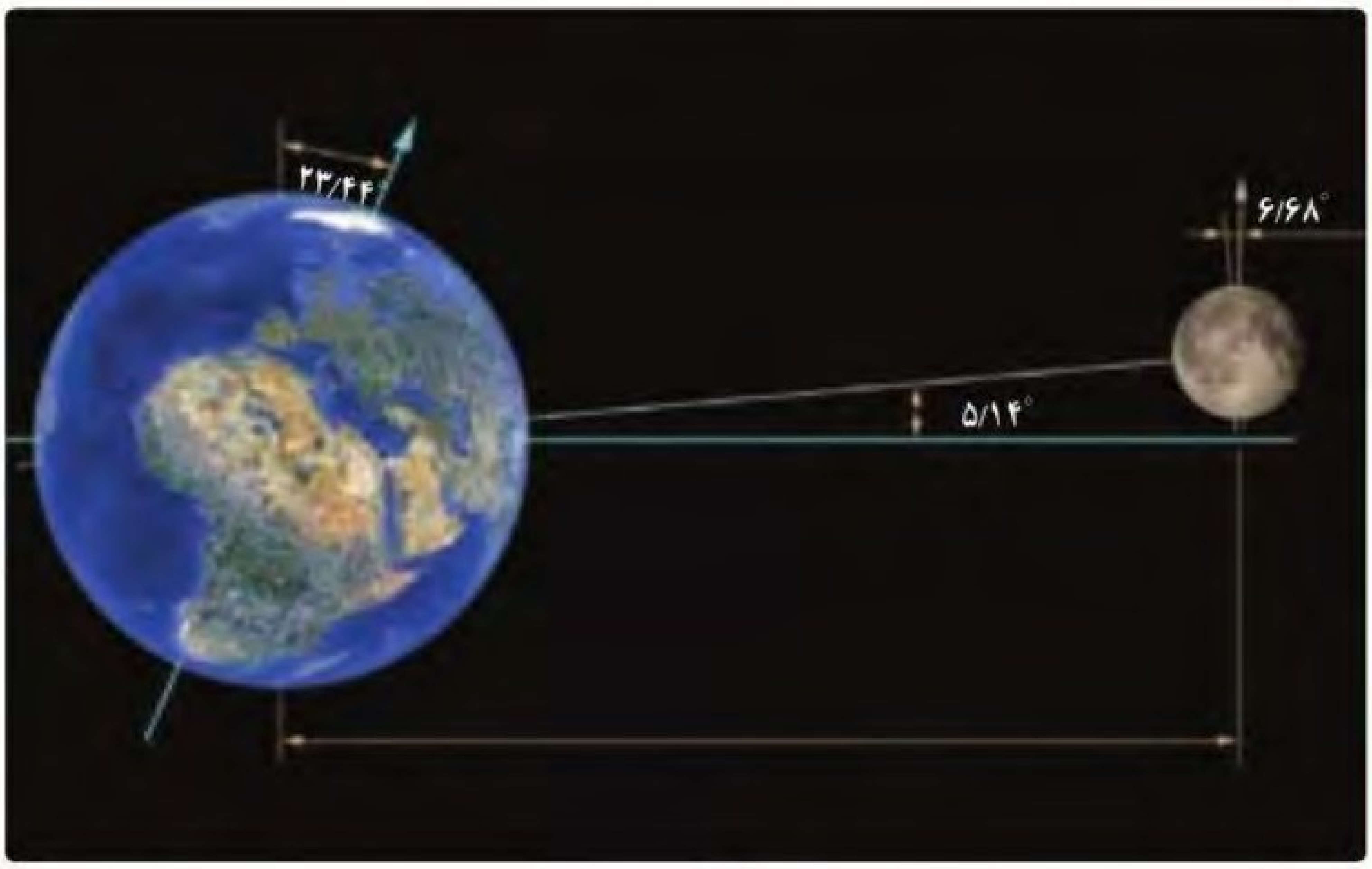
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۲

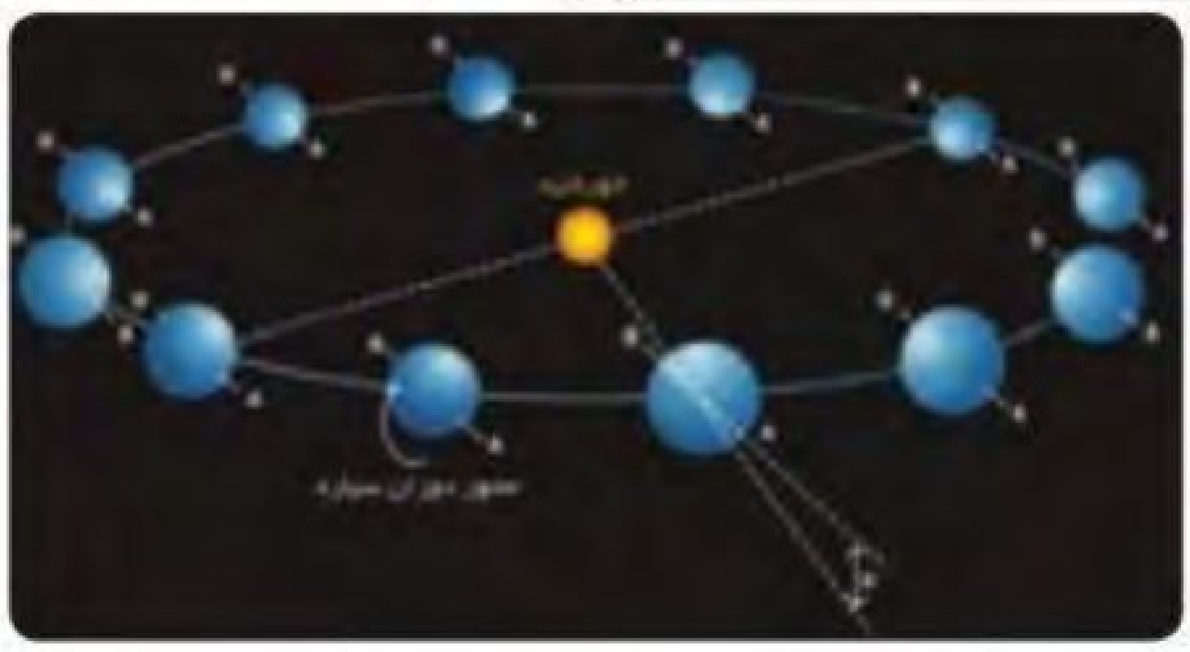
مثلثات

الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ (رحمان : ۵)

خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



زمین هم به‌دور خودش و هم به‌دور خورشید می‌چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل‌های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می‌نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستارهٔ قطبی، ستاره‌ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی‌کند. اگر از سمت ستارهٔ قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه‌های ساعت به دور خود، دوران می‌کند.



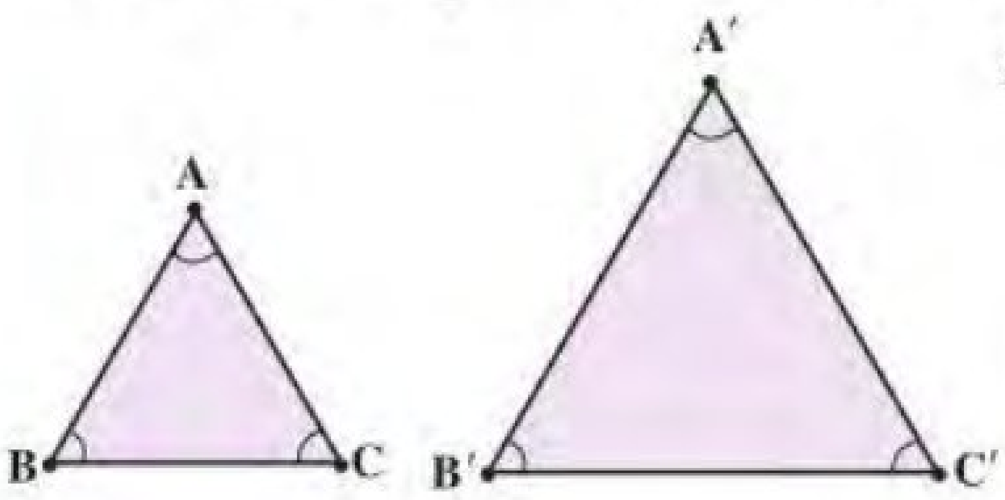
برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به‌صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.
به‌عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.

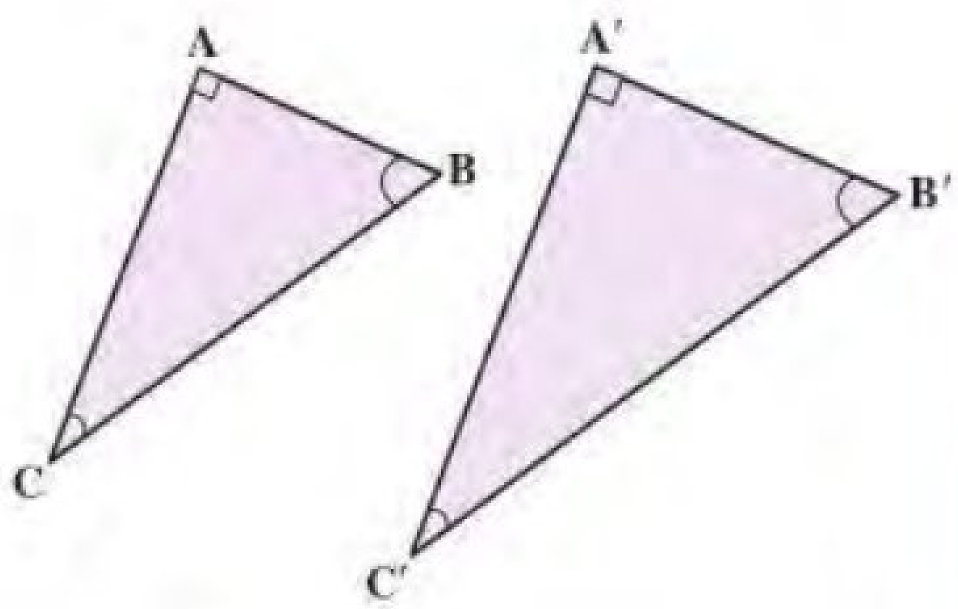
در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها ۱۲۰ درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفن‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفن‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنهٔ شدت شنوایی انسان را دارند.

اگر زاویهٔ هواپیما با افق 13° باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.
برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایهٔ نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ ، آنگاه داریم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}$. در هندسه ثابت می‌شود:



هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

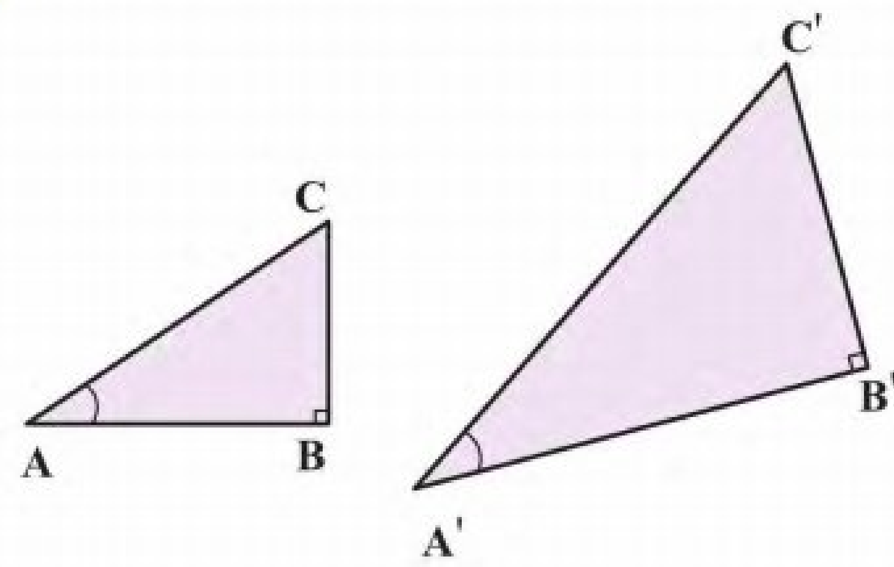
به‌عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید:



اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$ ، آنگاه

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

کار در کلاس



۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و A'B'C'، $\hat{A} = \hat{A}'$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\overset{\Delta}{ABC} \ \square \ \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

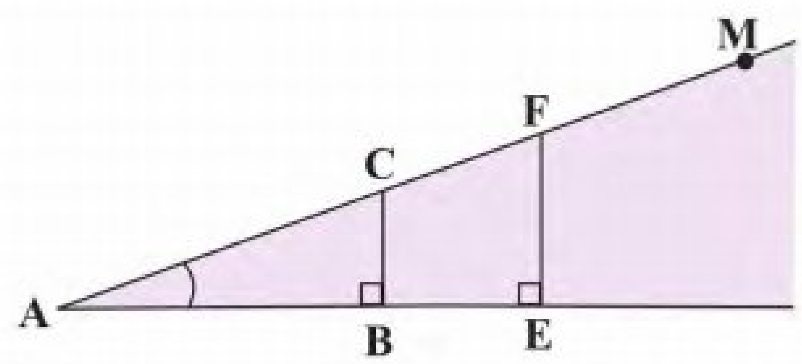
طبق خواص تناسب

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \ \text{و} \ \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه: اگر زاویهٔ A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه 'A از مثلث قائم‌الزاویه 'A'B'C (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \ \text{و} \ \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \ \text{و} \ \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

فعالیت

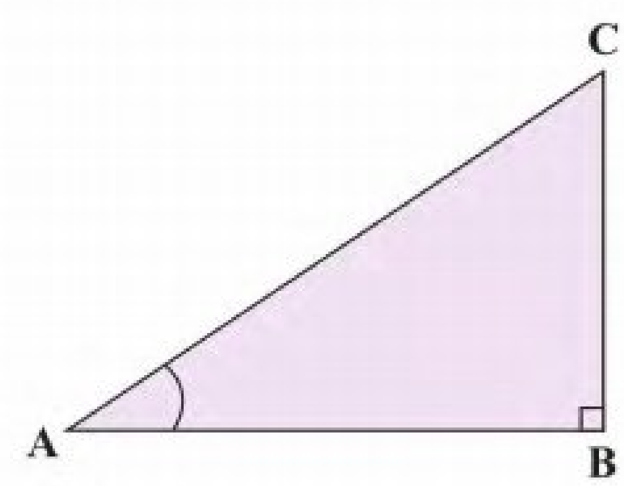


۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

$$\overset{\Delta}{ACB} \sim \overset{\Delta}{AFE} \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

۲ نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$



همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به‌طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با tanA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، داریم:

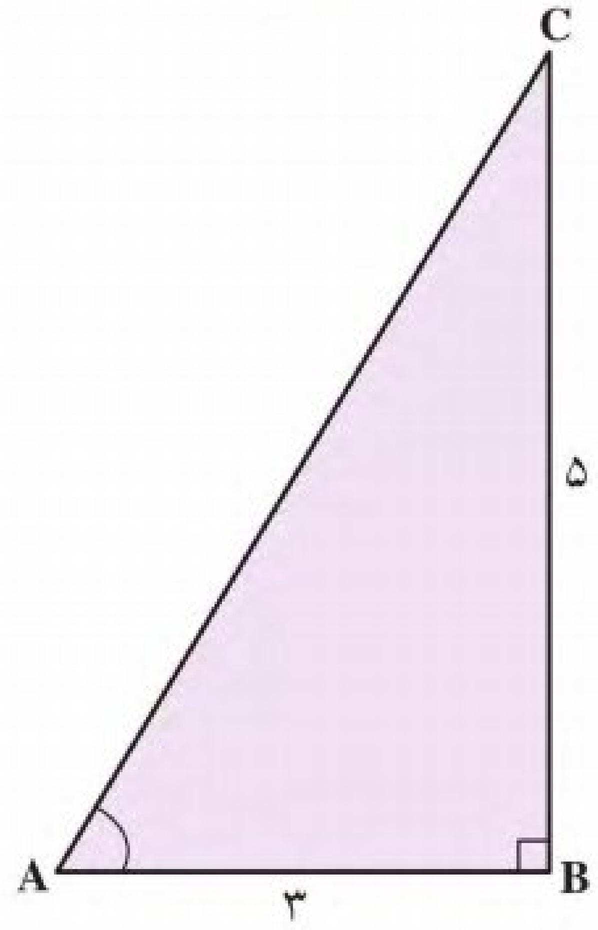
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}} = \frac{BC}{AB}$$

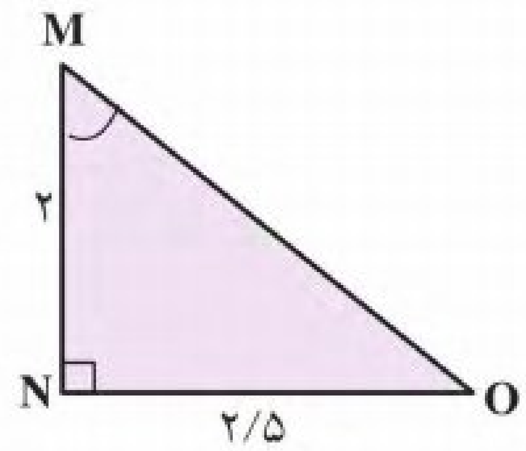
عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با cotA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

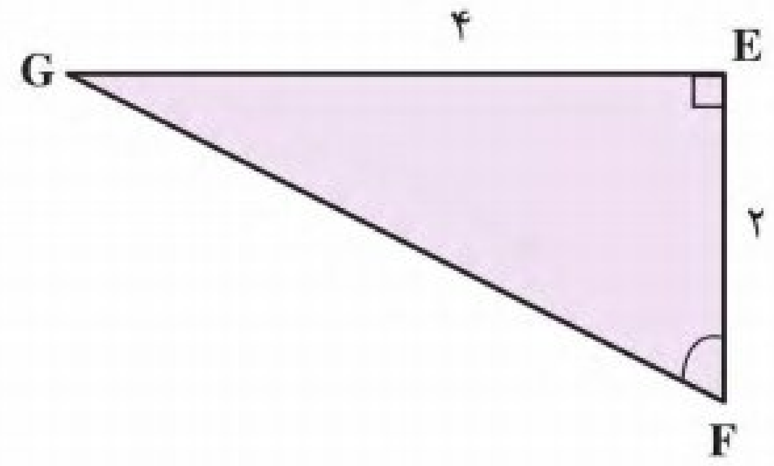
$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}} = \frac{AB}{BC}$$

فعالیت

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

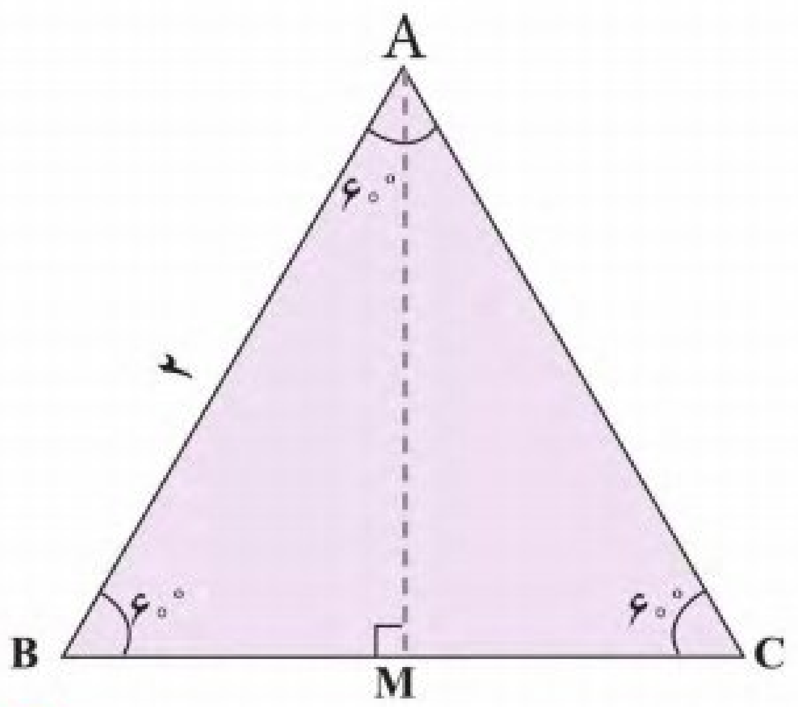






$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\quad$ $\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵}$ $\quad$ $\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$ $\quad$ $\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲/۵}{۲}$ $\quad$ $\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$



۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به‌طول ۲ واحد را درنظر بگیرید.

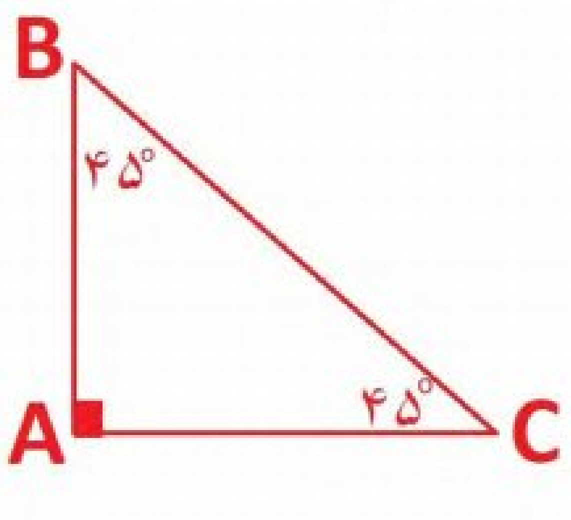
الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ...میانه... ضلع BC است. بنابراین

$BM = MC = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}AB = ۱$

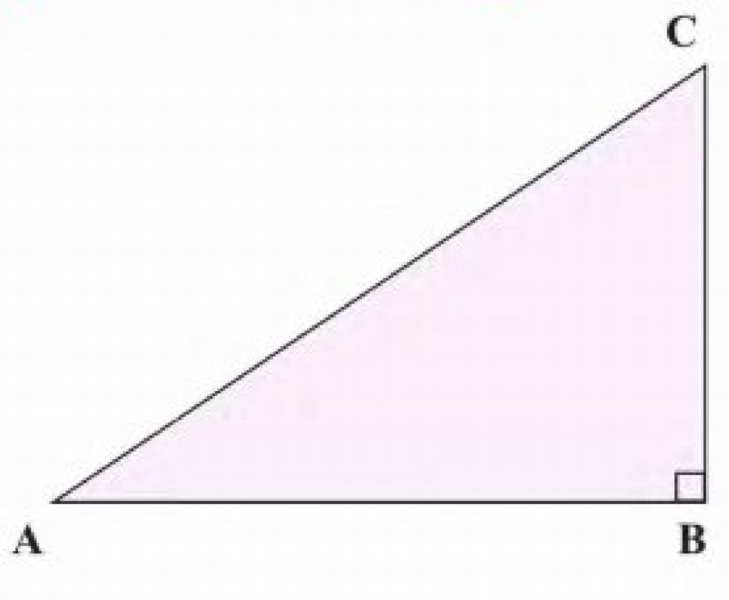
ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱}$ $\quad$ $۱^۲ + AM^۲ = ۲^۲ \Rightarrow AM = \sqrt{۳}$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.



$\tan ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = ۱$ $\quad$ $\cot ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = ۱$



در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن‌را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و با sinA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC} \ .$$

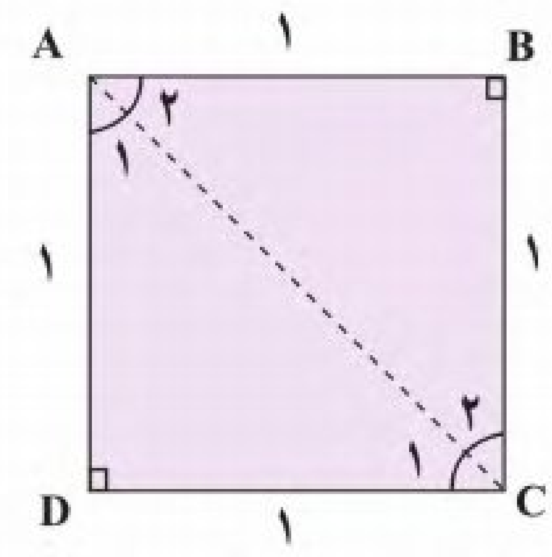
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم و آن‌را با cosA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $\cos A = \frac{AB}{AC}$.

به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این‌رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به‌طور مشابه، می‌توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن‌را حساب کنند.



فریبا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است، داریم $(AD)^۲+(DC)^۲=(AC)^۲$. در نتیجه $(AC)^۲=۱^۲+۱^۲$ و از این‌رو $(AC)^۲=۲$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC=\sqrt{۲}$.

معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، از این‌رو $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱=$ ...۴۵°... .

مبینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_۱=\sin ۴۵^\circ=\frac{DC}{\text{وتر}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

سبا: من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس ۴۵° را پیدا کنم.

$$\cos A_۱=\cos ۴۵^\circ=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}.$$

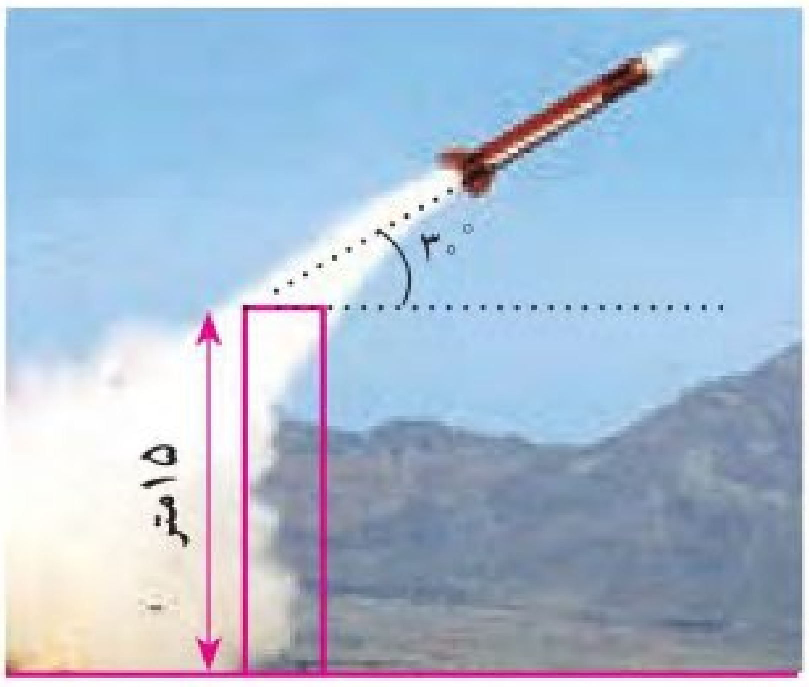
مریم: اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، طبق تعریف داریم

$$\tan A_۱=\tan ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱ \quad \text{و} \quad \cot A_۱=\cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱.$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰°، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sinA	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cosA	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tanA	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cotA	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

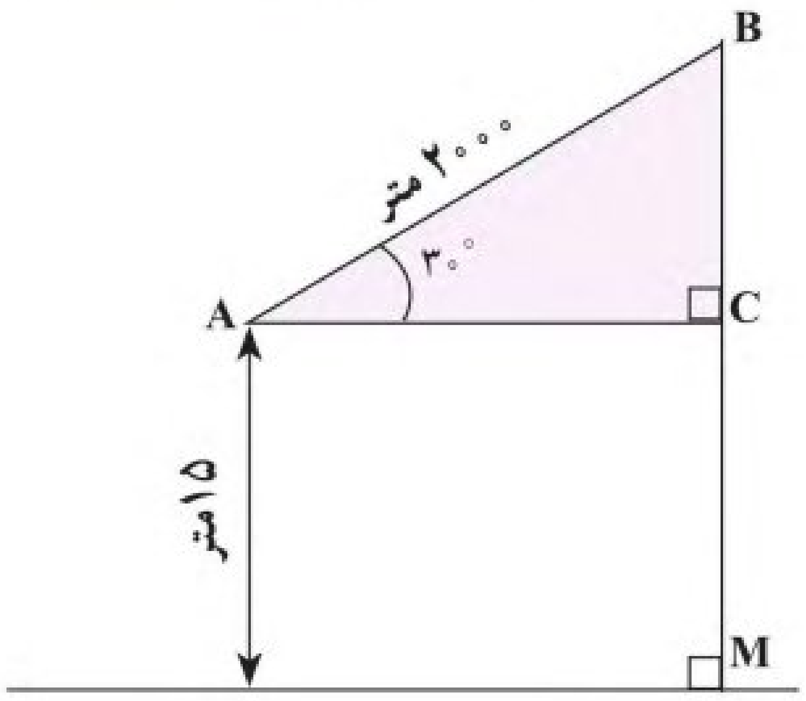


مثال

یک موشک در ارتفاع ۱۵متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

حل : ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به‌سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با :

$BC + MC = BC + ...۱۵...$



بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

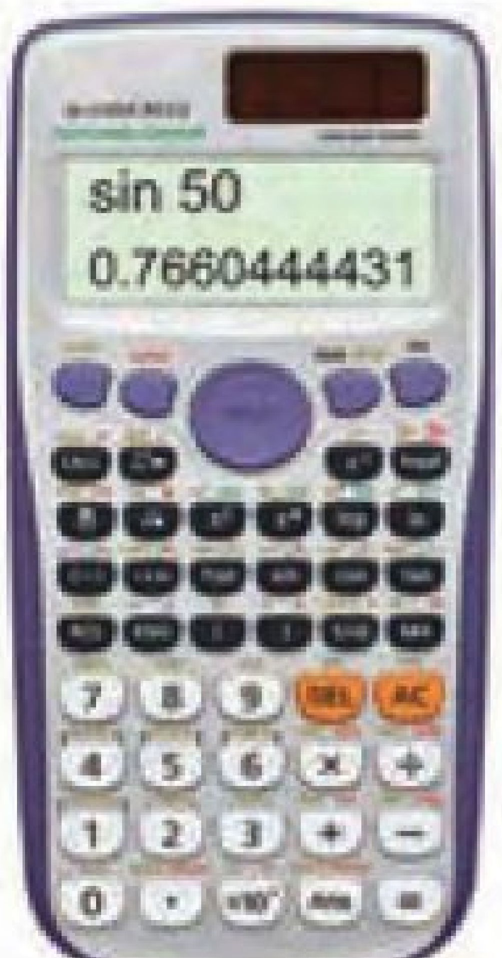
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۲۰۰۰} \Rightarrow BC = ۱۰۰۰$$

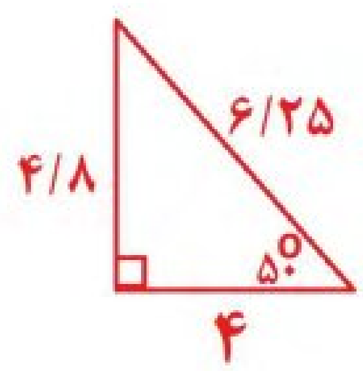
و از این‌رو

ارتفاع موشک = ...۱۰۰۰... + ...۱۵... = ...۱۰۱۵...

فعالیت

۱ یک زاویهٔ ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۵۰° را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.





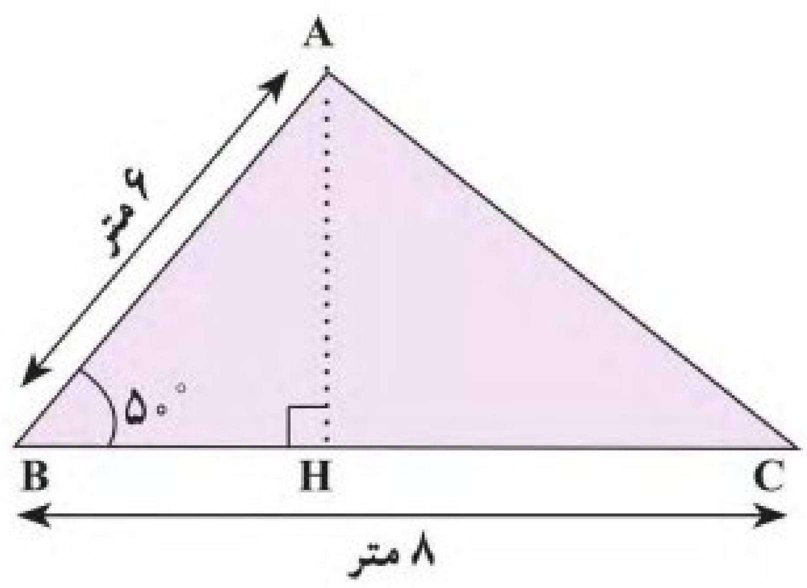
$$\sin ۵۰^\circ = \frac{۴/۸}{۶/۲۵} = ۰/۷۶۸$$

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم :

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶$، داریم :

$$\sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Rightarrow AH \simeq ۰/۷۶ \times ۶ = ۴/۵۶$$

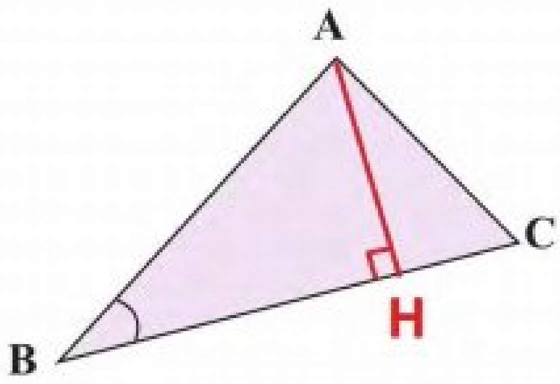


ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲} AH \times BC \simeq \frac{۱}{۲} \times ۴/۵۶ \times ۸ = ۱۸/۲۴$$


@GAM_10
فلسفه و
منطق و ...
ریاضی و
فیزیک
زیست و
شیمی
گام به گام
بزرگترین و کاملترین کانال گام به گام دروس
اختصاصی (همه پایه ها و رشته ها)
کلیک کنید

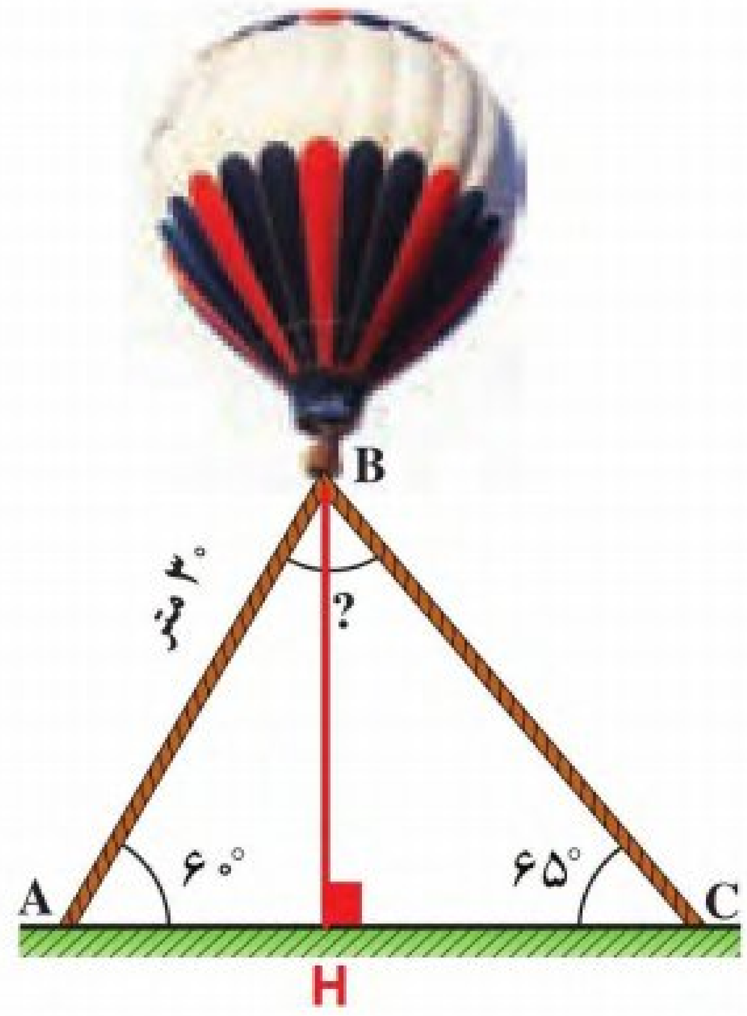
کار در کلاس



۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها نشان دهید :

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{2}BC \times AH \\ \sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin B \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}BC \times AB \times \sin B$$



۲ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن‌را BH بنامید.

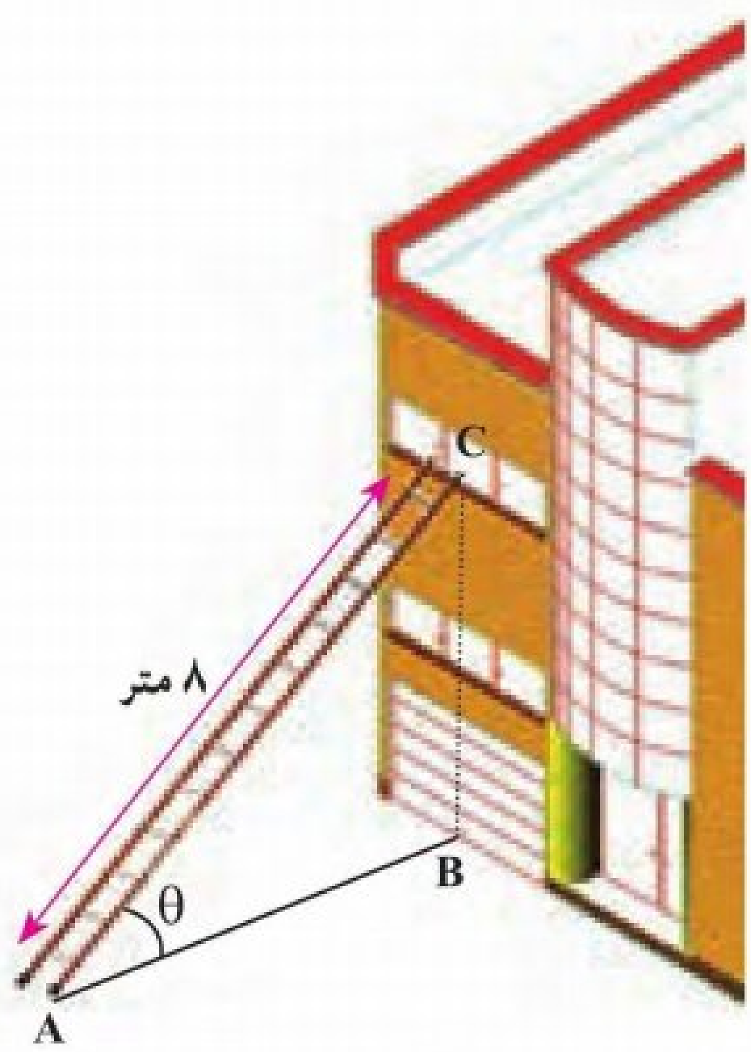
$$\widehat{B} + ۶۰^\circ + ۶۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۵۵^\circ$$

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۳۰} \Rightarrow BH = ۱۵\sqrt{۳}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow ۰/۹۰۶ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹۰۶} \simeq ۲۸/۶۶۶۵$$



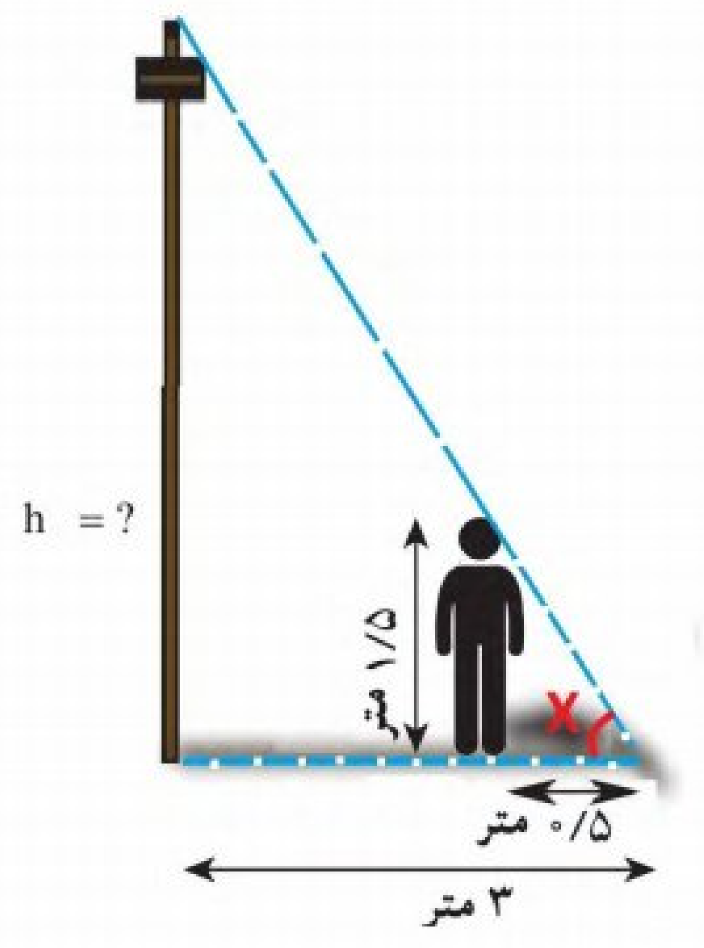
۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow ۲BC = ۸ \Rightarrow BC = ۴$$

اکنون به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم :

$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۴۸ \Rightarrow AB = \sqrt{۴۸}$$

تمرین



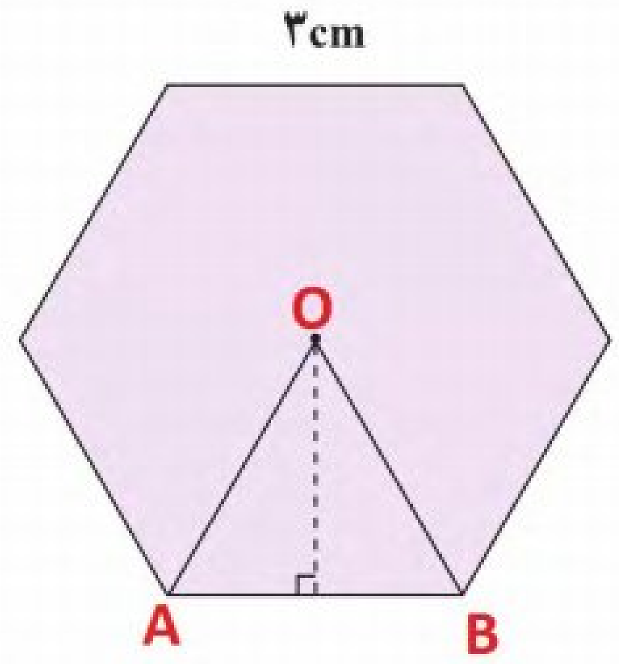
۱ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

شکل کتاب ایراد داشته که آن را اصلاح کرده و جواب می دهیم :

در مثلث قائم الزاویه ی کوچک $\tan x = \frac{۱/۵}{۰/۵}$ و در مثلث قائم الزاویه ی بزرگ $\tan x = \frac{h}{۳}$

می باشد . در نتیجه می توان نوشت : $\frac{۱/۵}{۰/۵} = \frac{h}{۳} \Rightarrow h = ۹$. یعنی ارتفاع تیر برق ۹ متر است .

۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.



مطابق شکل ، هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است بنابراین مثلث AOB متساوی الاضلاع است

بنابراین : $\left.\begin{array}{l} OA=3 \\ \widehat{A}=60^\circ \end{array}\right\}$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA\times AB\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم}=6\times S_{AOB}=6\times\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیرِ بسته، که آن را مَدار می‌نامند، درحال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند :

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً هم‌زمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بیند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر ۴/۴۲ درصد سطح کره زمین را بپوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

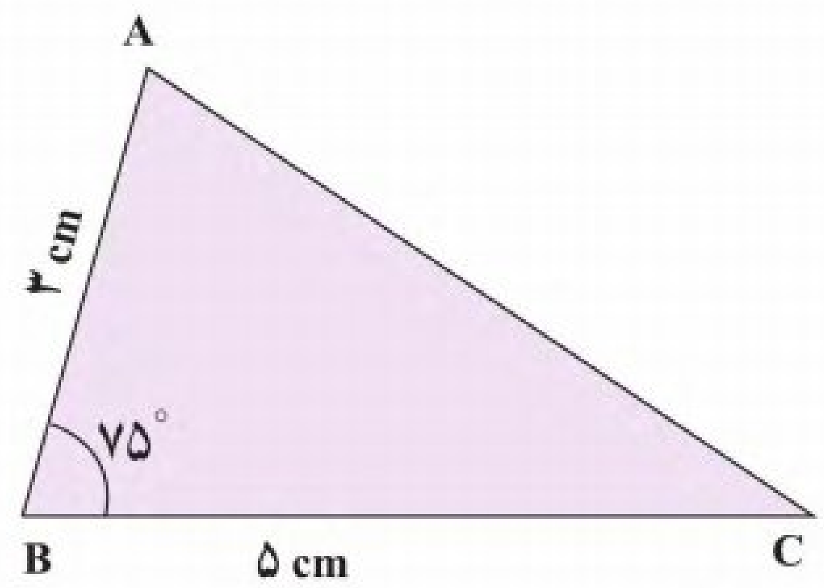
۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرودآمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید.

$\tan 13^\circ \simeq 0/23$

طبق قضیه ی خطوط موازی ، زاویه ی B نیز ۱۳ درجه است.

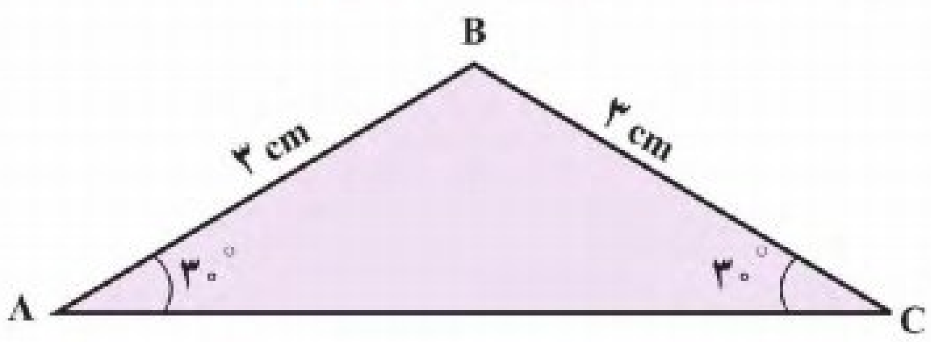
$$\tan B=\frac{2}{AB}\xrightarrow{B=13^\circ}0/23=\frac{2}{AB}\Rightarrow AB=\frac{2}{0/23}\simeq 8/695$$

۴ فرض کنید $\sin 75^\circ \simeq 0/96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.



$$S=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin 75^\circ=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times 0/96=7/2$$

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

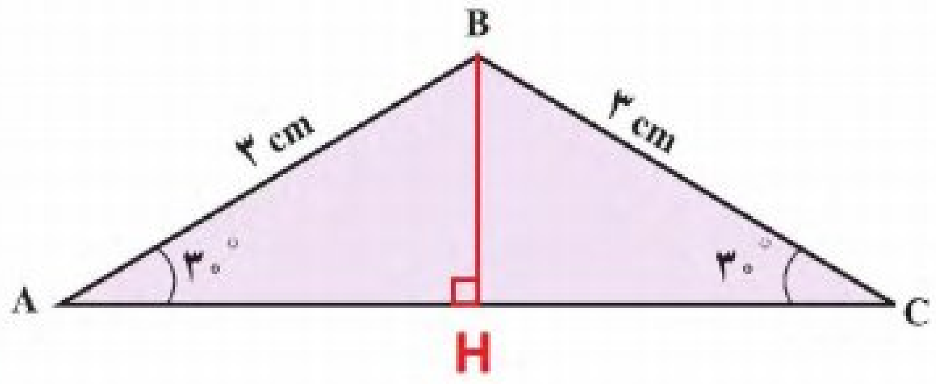


روش اول (با استفاده از ماشین حساب) :

$$\widehat{B}+30^\circ+30^\circ=180^\circ\Rightarrow\widehat{B}=120^\circ$$

$$S=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin 120^\circ=\frac{9}{2}\times 0/866=3/897$$

روش دوم (بدون استفاده از ماشین حساب) :



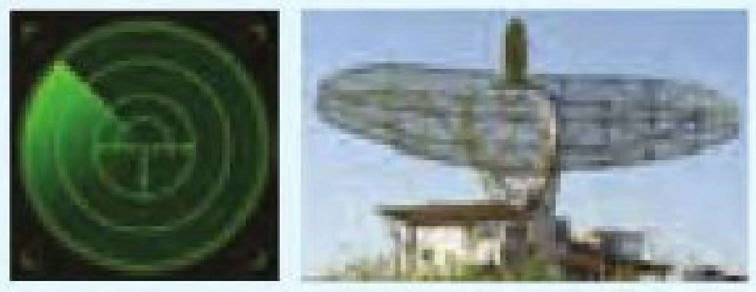
$$\cos 30^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AH}{3}\Rightarrow AH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABH}}=\frac{1}{2}AH\times AB\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}$$

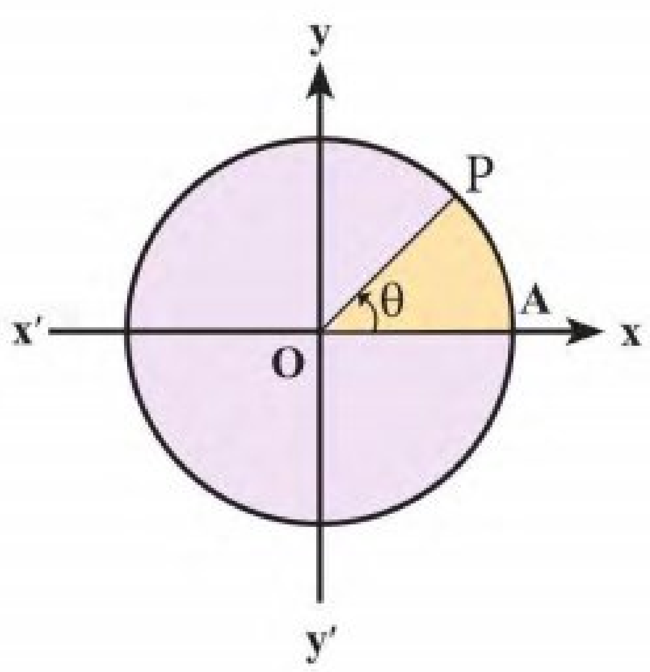
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=2\times S_{\overset{\Delta}{ABH}}=2\times\frac{9\sqrt{3}}{8}=\frac{9\sqrt{3}}{4}=3/897$$

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: دایره مثلثاتی



می‌توان از دایرهٔ مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.

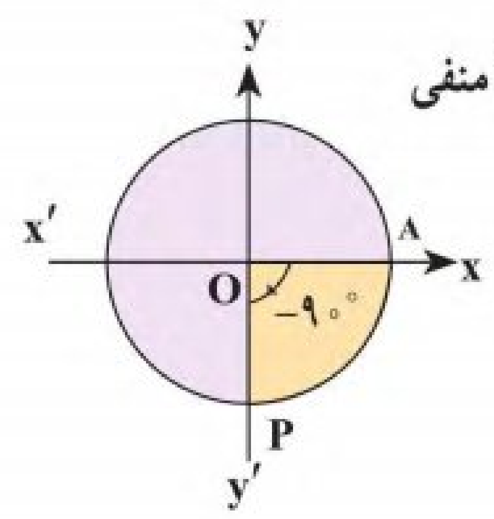


دایرهٔ روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را درنظر بگیرید. نقطهٔ A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

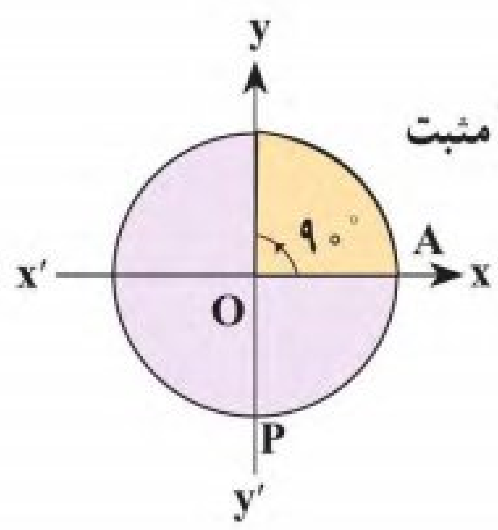
مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های -90°، 90°، -210° و 225° داده شده‌اند.

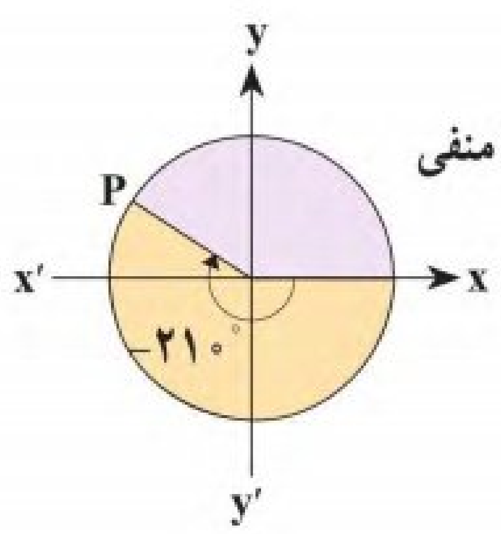
زاویهٔ منفی



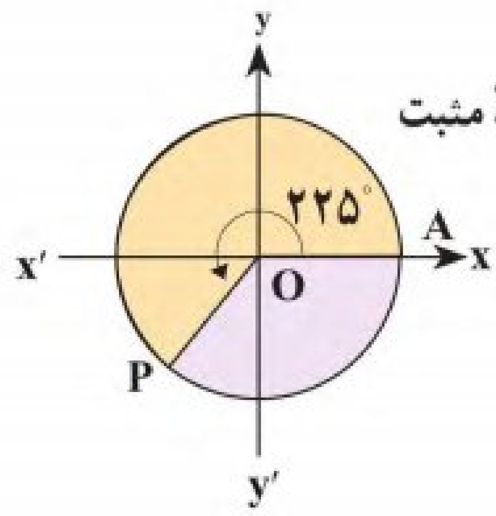
زاویهٔ مثبت



زاویهٔ منفی

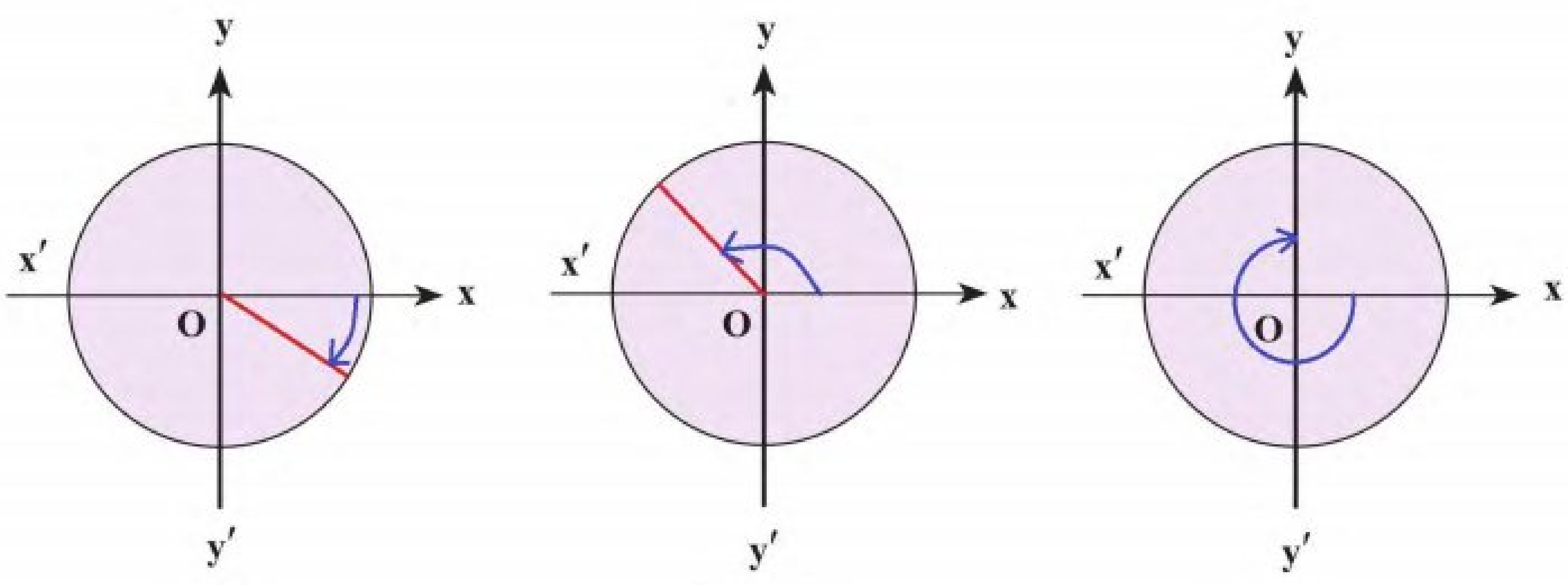


زاویهٔ مثبت

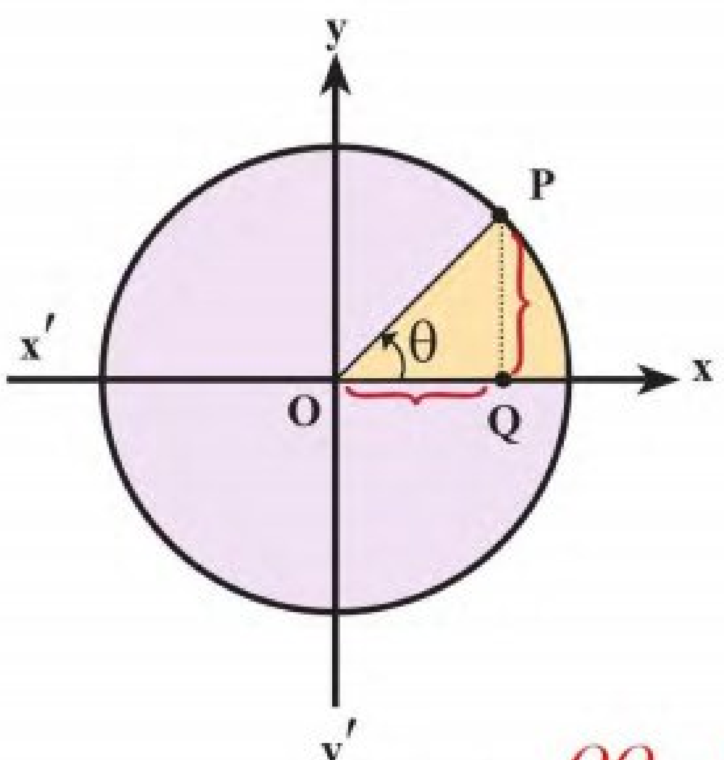


فعالیت

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



-270° $\quad$ 135° $\quad$ -30°

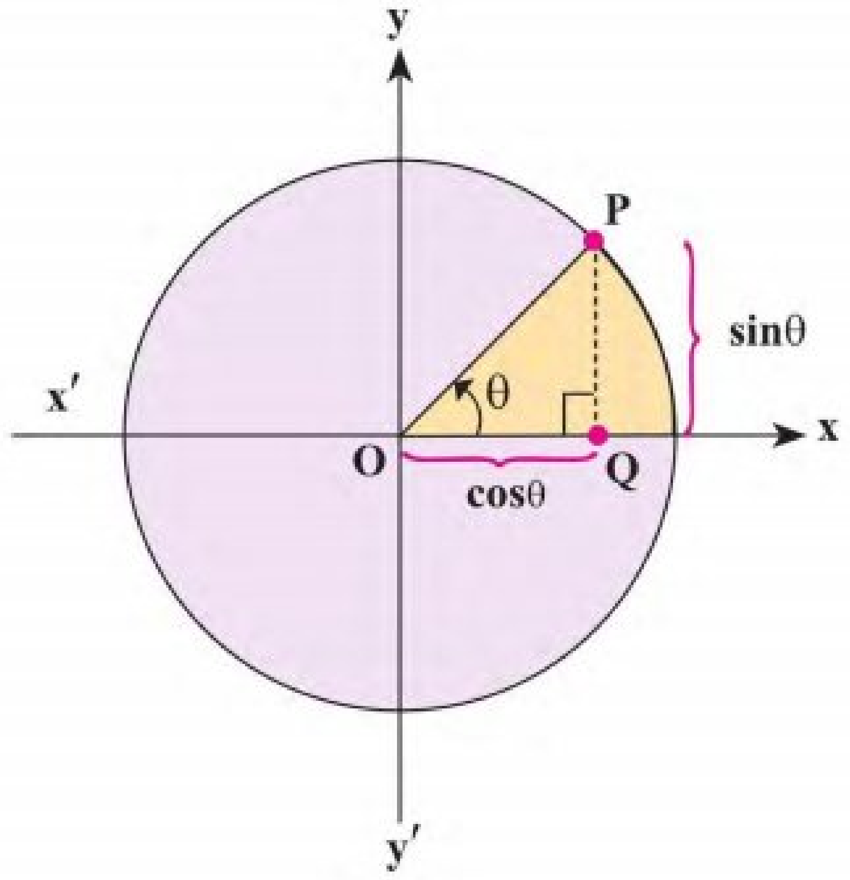


۲ فرض کنید P(x,y) نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور $\overrightarrow{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.

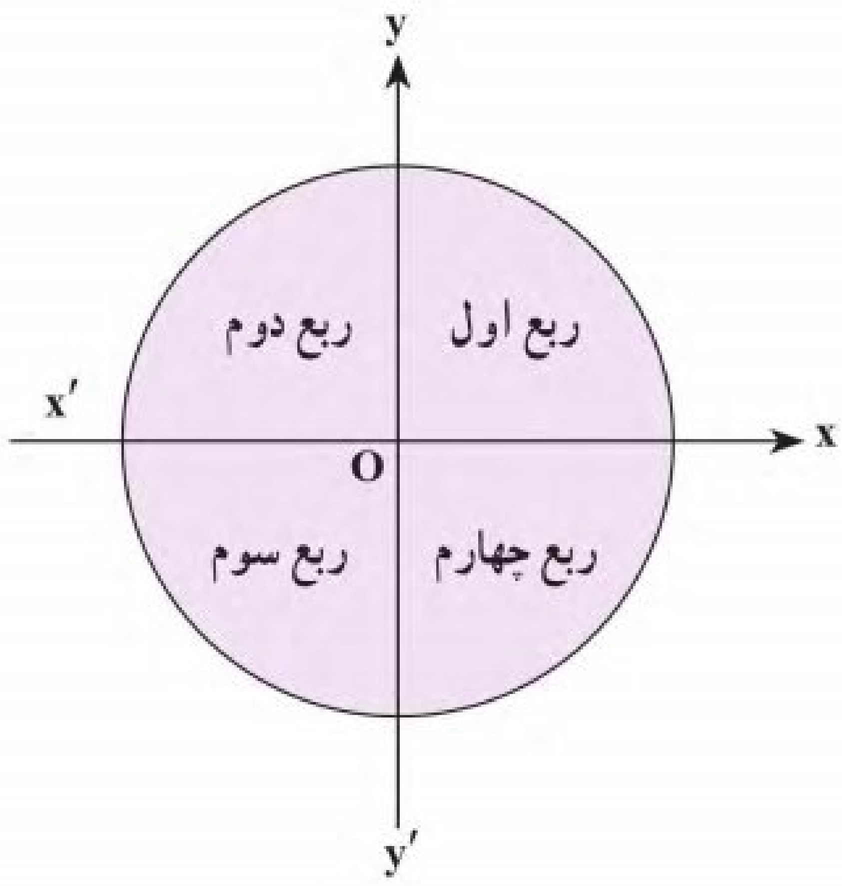
الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$ و $\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ$ و $\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصلهٔ Q تا مبدأ با $\cos\theta$ برابر است و فاصلهٔ نقطهٔ P تا پای عمود، یعنی نقطهٔ Q با $\sin\theta$ برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور $x'ox$ یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور $y'oy$ یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم‌خط OP با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.



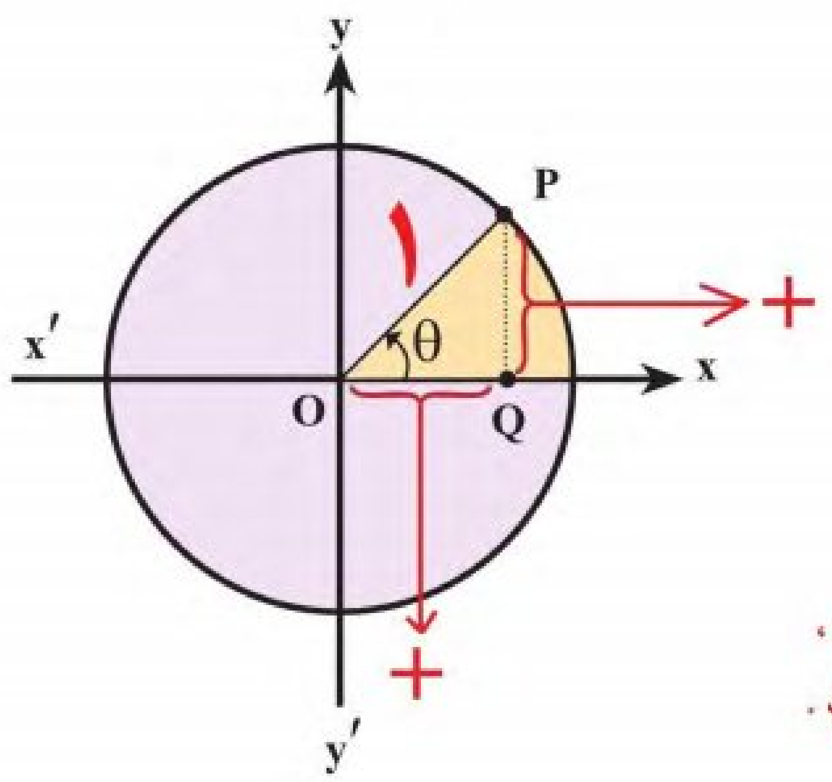
نکته : دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ xoy را ربع اول، ناحیهٔ $x'oy$ را ربع دوم، ناحیهٔ $x'oy'$ را ربع سوم و ناحیهٔ xoy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

نکته : زاویه‌های °۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰ زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

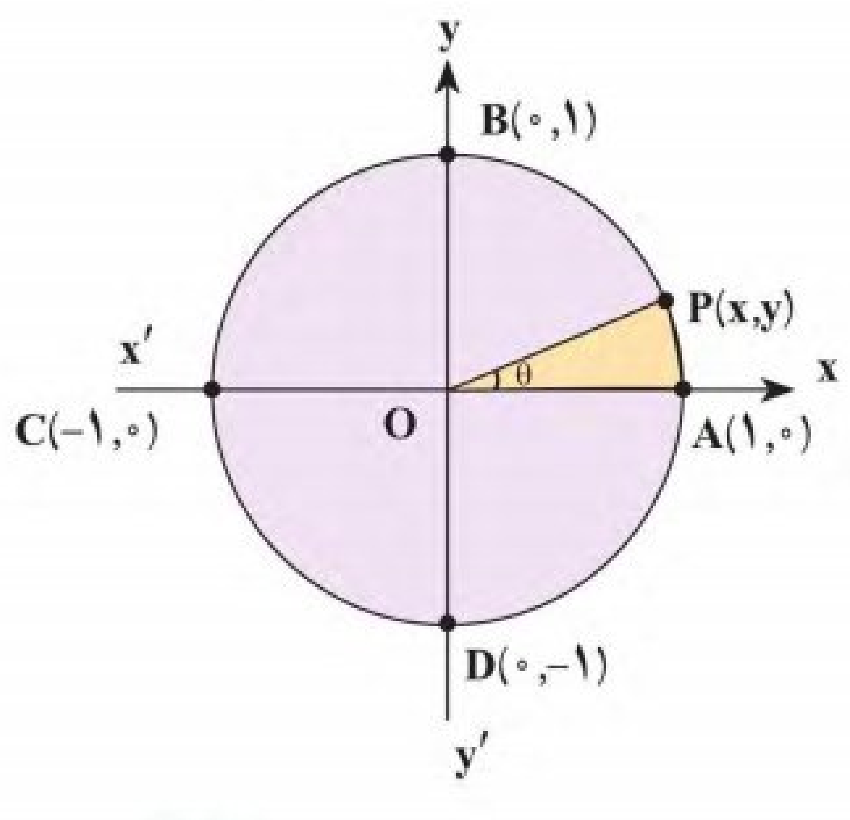
۱ مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف) °۳۰- چهارم   ب) °۶۵ اول   پ) °۱۸۲ سوم   ت) °۹۵- سوم



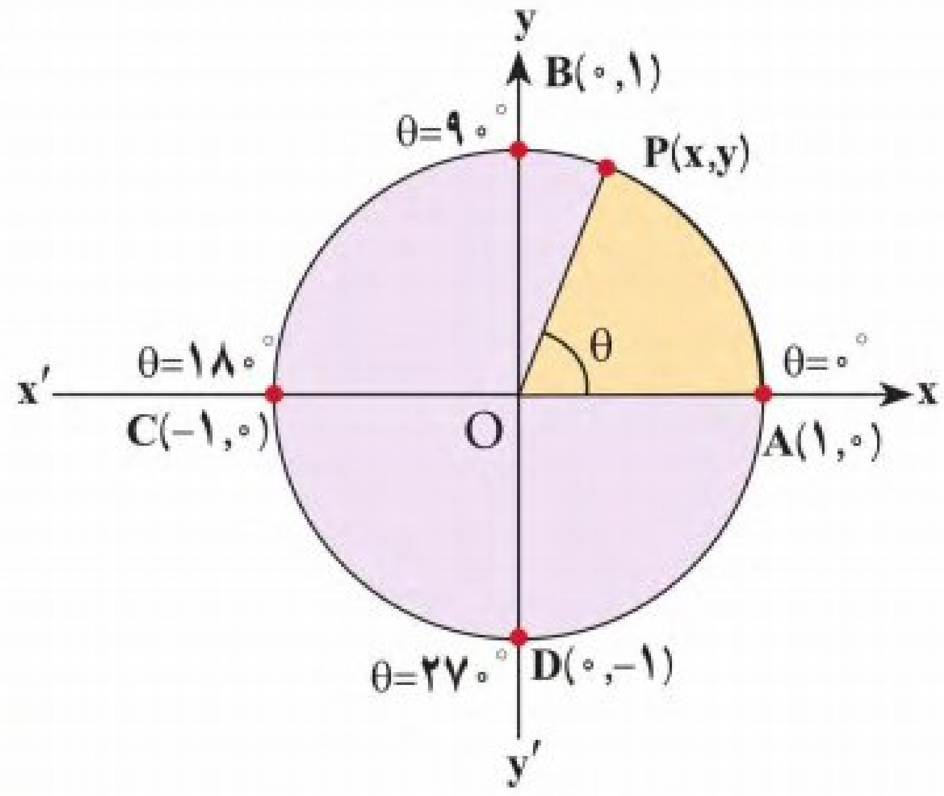
۲ با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟ در ناحیه ی اول ، قسمت های مثبت دو محور مختصات وجود دارد (شکل روبرو) . و می دانیم طبق تعریف ، نسبت های مثلثاتی ، همان نسبت اندازه های مشخص شده در شکل هستند لذا همگی مثبت خواهند بود .

مثال



می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ °۰ را به‌دست آوریم. می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو، $\sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. اگر $\theta=0^\circ$، آنگاه نقطه P روی نقطهٔ A قرار می‌گیرد و داریم $\sin 0^\circ=0$، همچنین $\cos 0^\circ=1$ و $\tan 0^\circ=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0$ ، اما $\cot 0^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).

زیرا $\cot 0^\circ=\frac{x}{y}=\frac{1}{0}$



فعالیت

۱ در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta=۹۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۹۰° روی نقطه ی $B(۰,۱)$ واقع است بنابراین: $\sin ۹۰^\circ = y_B = ۱$ و $\cos ۹۰^\circ = x_B = ۰$ و $\tan ۹۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۱}{۰} =$ تعریف نشده

۲ اگر $\theta=۱۸۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۱۸۰° روی نقطه ی $C(-۱,۰)$ واقع است بنابراین: $\sin ۱۸۰^\circ = y_C = ۰$ و $\cos ۱۸۰^\circ = x_C = -۱$ و $\tan ۱۸۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۰}{-۱} = ۰$

۳ اگر $\theta=۲۷۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۲۷۰° روی نقطه ی $D(۰,-۱)$ واقع است بنابراین: $\sin ۲۷۰^\circ = y_D = -۱$ و $\cos ۲۷۰^\circ = x_D = ۰$ و $\tan ۲۷۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-۱}{۰} =$ تعریف نشده

کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	۰°	۹۰°		۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	−۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	−۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

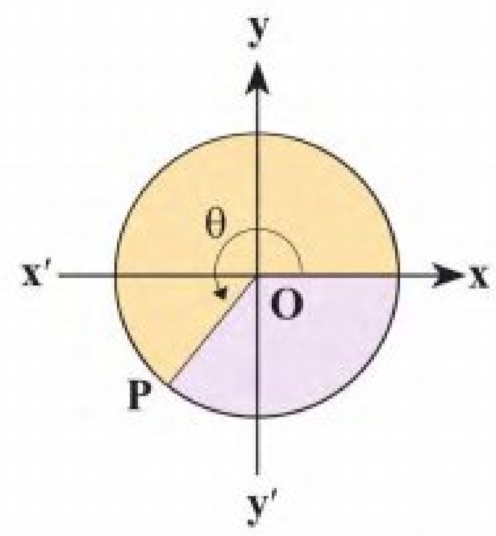
$۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع اول است

$۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع دوم است

$۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع سوم است

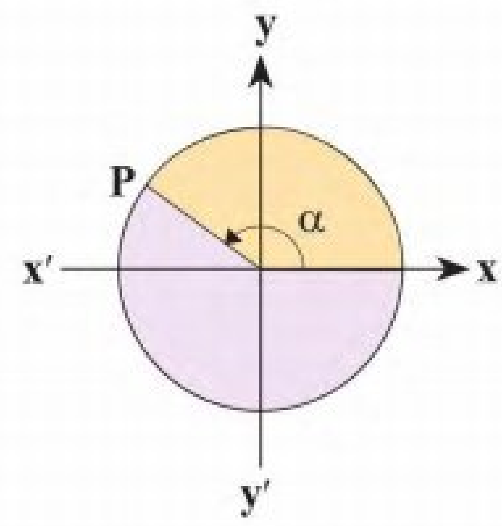
$۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع چهارم است

فعالیت



۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$ و در ربع سوم، $x, y<۰$، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

$\sin\theta < ۰ \quad , \quad \cos\theta < ۰ \quad , \quad \tan\theta > ۰$



۲ فرض کنید α زاویه‌ای در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

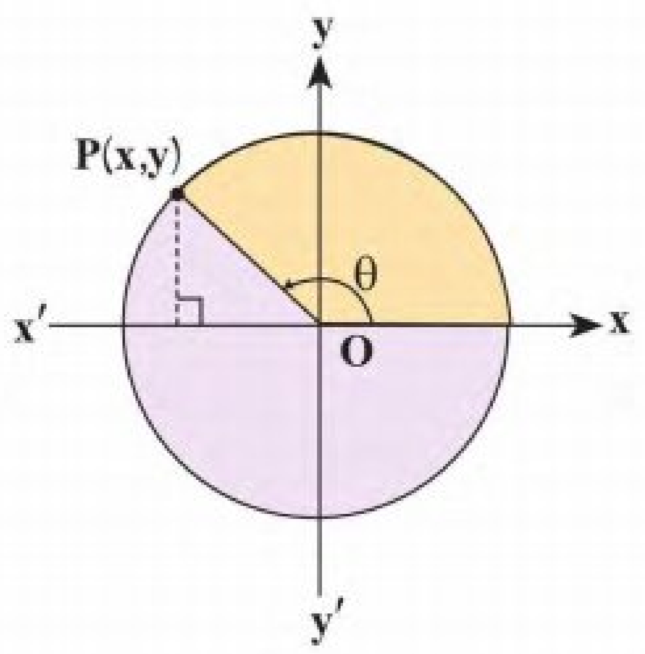
$\sin\theta > ۰ \quad , \quad \cos\theta < ۰ \quad , \quad \tan\theta < ۰$

۳ جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	ربع اول x,y>۰	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم ....
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

نکته : برای هر زاویهٔ دلخواه θ، $-۱ \le \sin\theta \le ۱$ و $-۱ \le \cos\theta \le ۱$.

مثال



آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید : اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta=\frac{۵}{۷}$ ،

آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین : می‌دانیم $\sin\theta=y=\frac{۵}{۷}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض ... $\frac{۵}{۷}$ .. است.

معلم : درست است و حالا طول نقطه P چگونه به‌دست می‌آید؟

امیرعلی : طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم : $x^۲+y^۲=۱$. بنابراین $x^۲+\frac{۲۵}{۴۹}=۱$ و در نتیجه $x^۲=\frac{۲۴}{۴۹}$. اکنون داریم $x=\pm\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$.

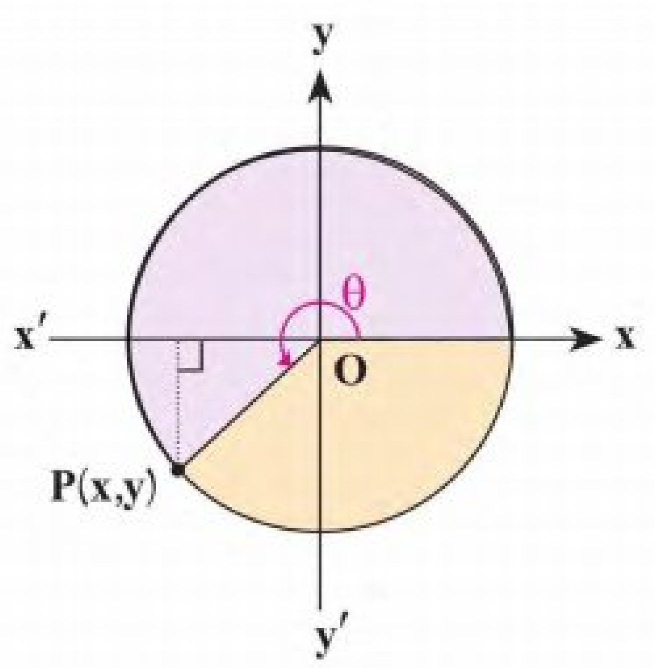
معلم : آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی : چون θ زاویه‌ای در ربع .دوم.. است، پس طول نقطهٔ P منفی است و از این‌رو $x=-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ قابل قبول است.

معلم : استدلال محمدمهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات $(-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷} , \frac{۵}{۷})$ است. در نتیجه :

$$\cos\theta=x=-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{۵}{-۲\sqrt{۶}}\ ,\quad \cot\theta=\frac{x}{y}=-\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

فعالیت



۱ فرض کنید نقطه P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین ..... $y=\sin\theta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید. $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید. $\tan\theta=\frac{y}{x}=۱$ و $\cot\theta=\frac{x}{y}=۱$

۲ اگر $\cos\alpha=\frac{-۲}{۵}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

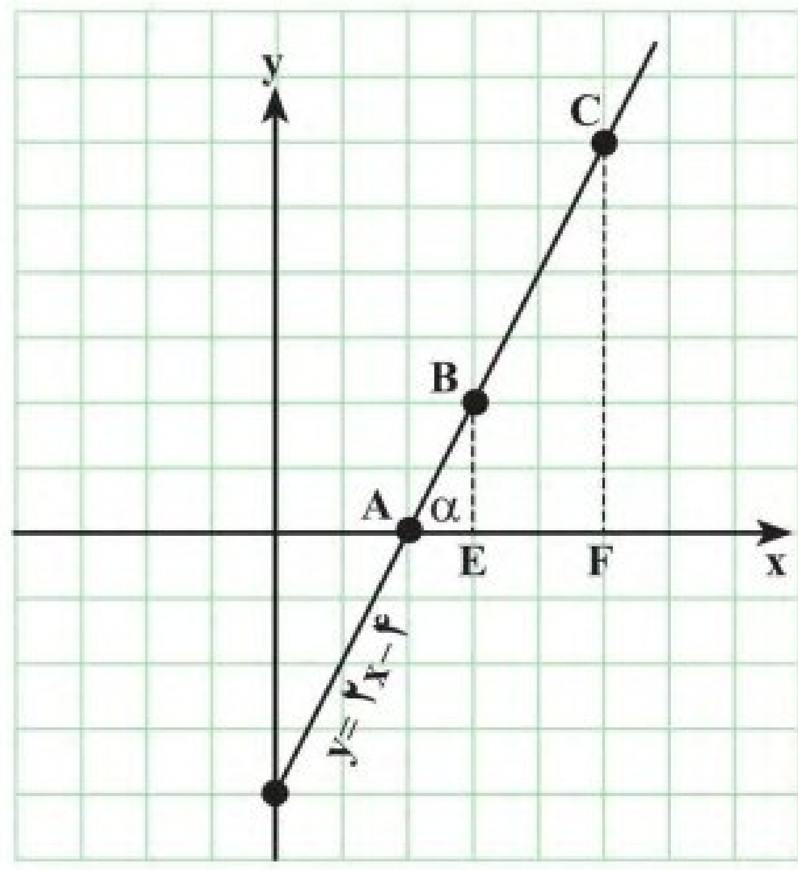
α فقط می تواند در نواحی دوم یا سوم باشد ، زیرا فقط در این نواحی کُسینوس منفی است

۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

این زاویه باید در ناحیه ی چهارم باشد پس هر زاویه از این ناحیه قابل قبول است به طور مثال زاویه ی ۳۰۰ درجه می تواند جواب باشد .

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت



نمودار خط y=۲x-۴ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را درنظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\tan\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$A(۲,۰)\,,B(۳,۲) \Rightarrow$ شیب خط $= \dfrac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \dfrac{۲-۰}{۳-۲} = ۲$

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

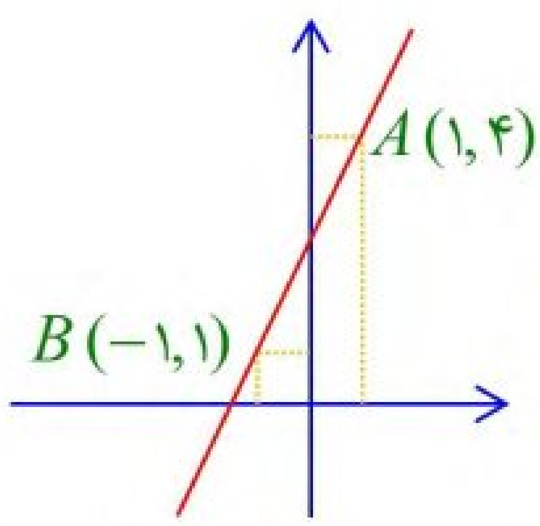
می توان نیجه گرفت تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی ، برابر شیب خط است .

> شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه :
>
> tanα= شیب خط

کار در کلاس

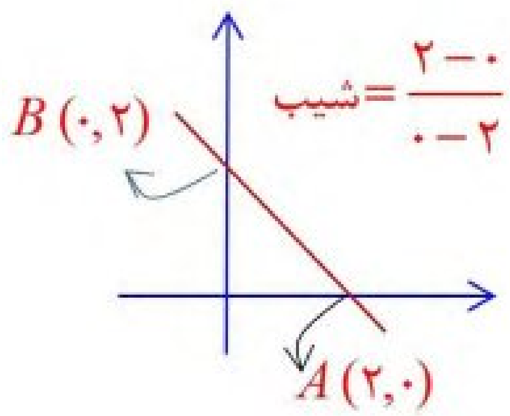
۱ فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

الف) ۲y-۳x=۵



شیب $= \dfrac{۴-۱}{۱-(-۱)} = \dfrac{۳}{۲} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{۳}{۲}$

ب) x+y=۲



شیب $= \dfrac{۲-۰}{۰-۲} = -۱ \Rightarrow \tan\alpha = -۱$

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها °۳۰ است و از نقطهٔ (۱,۰) می‌گذرد.

$$m = \tan ۳۰^\circ \Rightarrow m = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow y - ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۱)$$

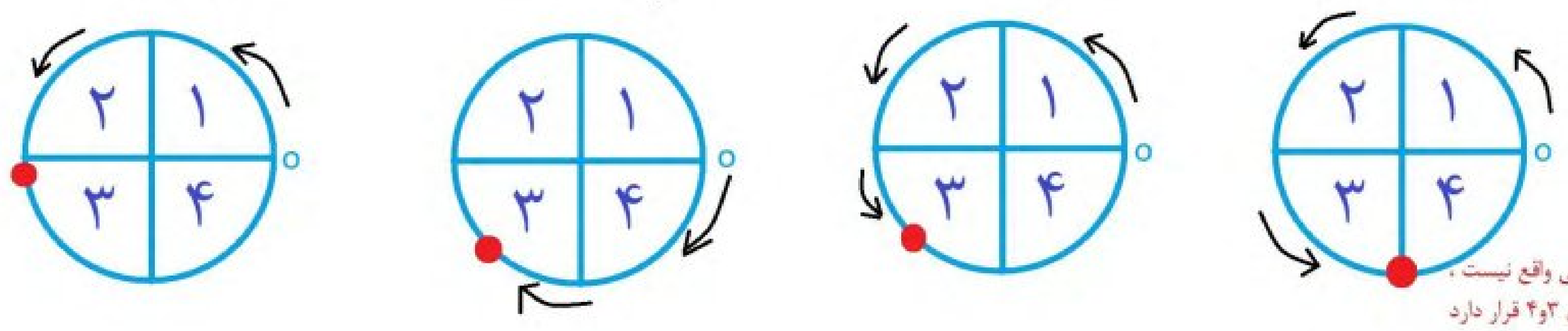
$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نکته : اگر خطی با شیب m از نقطه ی $(x_۰\,,y_۰)$ بگذرد معادله ی آن $y - y_۰ = m(x - x_۰)$ است .

تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) °۲۷۰+ ب) °۲۲۵ پ) °۱۳۵- ت) °۱۸۵



در هیچ کدام از نواحی واقع نیست ، بلکه در مرز دو ناحیه ی ۳و۴ قرار دارد

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم) همچون مثال صفحه ی ۳۹ عمل می کنیم :

$$x = \frac{۳}{۷} \xrightarrow{x^۲+y^۲=۱} \frac{۹}{۴۹} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۴۰}{۴۹} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \quad , \tan\alpha = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۳}$$

ب) $\sin\beta = \frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

$$y = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x^۲+y^۲=۱} x^۲ + \frac{۱}{۴} = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \tan\beta = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

۳ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

در صورتی که هر دو مثبت باشند ، در ربع اول ، اما اگر هر دو منفی باشند در ربع چهارم

۴ حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta > ۰ , \cos\theta > ۰$ ربع اول

ب) $\sin\theta < ۰ , \cos\theta > ۰$ ربع چهارم

۵ اگر $\sin\alpha \times \cos\alpha < ۰$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

ضرب آنها منفی شده است ، پس دو حالت داریم :

اگر سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد ، جواب ربع دوم است .

اما در صورتی که سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد ، جواب ربع چهارم است .

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری‌که $\tan\alpha > \cot\alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری‌که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \quad , \quad \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ > \cot ۶۰^\circ$$

$$\beta = ۳۰^\circ \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳} \Rightarrow \cot ۳۰^\circ > \tan ۳۰^\circ$$

در ربع اول اگر زاویه بیشتر از ۴۵ درجه باشد ، تانژانت آن بیشتر از کتانژانت آن است . و اگر کمتر باشد ، برعکس است .

۷ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها ۴۵° است و نقطهٔ $(۲,۰)$ روی آن قرار دارد.

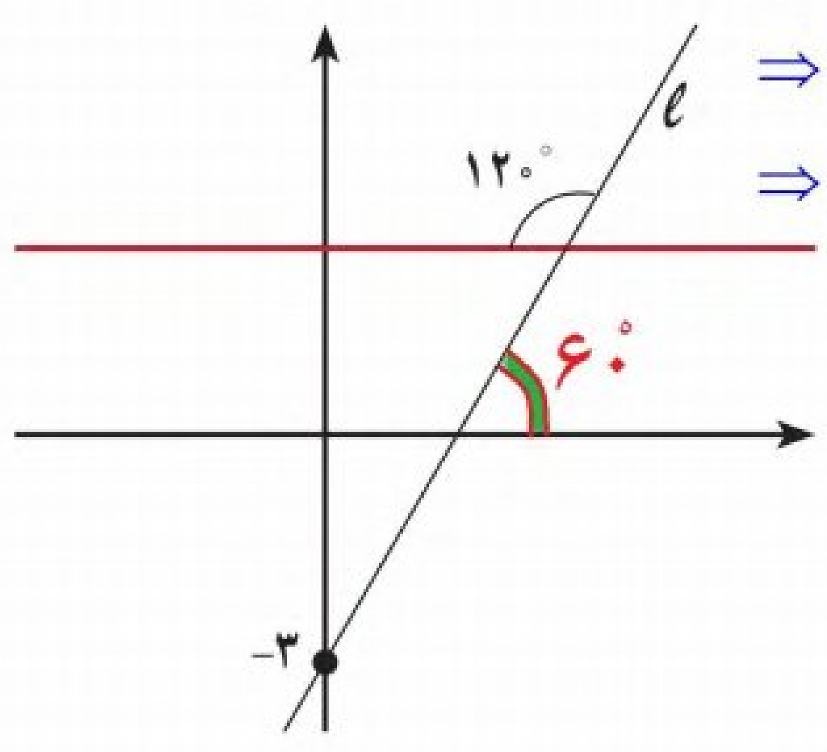
$$m = \tan ۴۵^\circ = ۱ \quad \Rightarrow y - ۲ = ۱(x - ۰) \Rightarrow y = x + ۲$$

۸ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط ℓ را به‌دست آورید.

$$m = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \quad , \quad (۰,-۳)$$

$$\Rightarrow y - (-۳) = \sqrt{۳}(x - ۰)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳$$



در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره برحسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدرمطلق برابر با نصف طول وتری به‌اندازهٔ دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین‌جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سدهٔ دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همهٔ کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه‌نصیرالدین‌طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

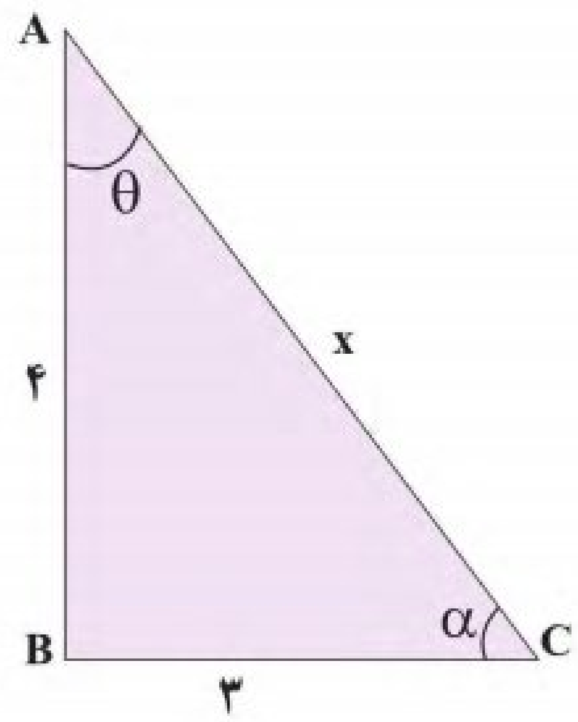
درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر بگیرید.

الف) اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.



$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$ $\qquad$ $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$

$\cos\theta = \frac{۴}{۵}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۳}{۴}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$

$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۴}{۳}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

ب) با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$ را به‌دست آورید.

$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

$\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^۲=\sin^۲\theta$

پ) درستی رابطهٔ $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^۲+(\cos\theta)^۲=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=(\frac{BC}{AC})^۲+(\frac{AB}{AC})^۲=\frac{BC^۲+AB^۲}{AC^۲}=\frac{AC^۲}{AC^۲}=۱$$

ت) مشابه قسمت (پ) درستی رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ را بررسی کنید.

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=(\frac{AB}{AC})^۲+(\frac{BC}{AC})^۲=\frac{AB^۲+BC^۲}{AC^۲}=\frac{AC^۲}{AC^۲}=۱$$

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم :

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ جاهای خالی را پر کنید :

الف) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}$

ب) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}$

تذکر : در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha=\frac{-۴}{۵}$ ، آنگاه مقدار $\tan\alpha$، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha} \xRightarrow{\alpha\ \text{در ناحیه سوم}} \cos\alpha=-\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳} \qquad \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به‌دست می‌آوریم :

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

۱) $$\Rightarrow \tan^۲\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \qquad (\cos\alpha\neq ۰)$$

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}+\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

۲) $$\Rightarrow ۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha} \qquad (\sin\alpha\neq ۰)$$

۳) اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۵}$$

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ ، $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \ (\cos\alpha \neq ۰)$ و $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \ (\sin\alpha \neq ۰)$ را که به‌ازای هر α همواره برقرار است، یک **اتحاد مثلثاتی** می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به‌طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید :

ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایهٔ میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

مثال

درستیِ اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta\right)(۱ - \sin\theta) = \cos\theta$$

$$(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta) \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} ۱-\sin^۲\theta = \cos^۲\theta$$

حل :

$$\text{طرف چپ} = \left(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta\right)(۱ - \sin\theta) = \left(\frac{۱}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱ - \sin\theta)$$

$$= \left(\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}\right)(۱ - \sin\theta) = \frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta} = \cos\theta = \text{طرف راست}$$

کار در کلاس

۱) با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

$$\text{طرف چپ} = \sin^۴\theta - \cos^۴\theta \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) \times (\sin^۲\theta + \cos^۲\theta) = (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) \times ۱ = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$

ب) $\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

طرف راست $=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}+\cot\alpha=\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha$

۲ کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin\alpha\cos\alpha$

$\alpha=۳۰^\circ\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^۴+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴=۱-۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\frac{۹}{۱۶}=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow$ تساوی صحیح نیست

ب) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

$\alpha=۳۰^\circ\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^۴+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴=۱-۲\times(\frac{۱}{۲})^۲\times(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\frac{۹}{۱۶}=۱-\frac{۶}{۱۶}\Rightarrow$ تساوی صحیح است

حال باید درستی آن را در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=(\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

۳ با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید.

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\xrightarrow{\times\cot\alpha}\cot\alpha+\cot\alpha\tan^۲\alpha=\cot\alpha\times\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cot\alpha+\underbrace{\cot\alpha\tan\alpha}_{۱}\tan\alpha=\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\sin\alpha}\times\frac{۱}{\cos^{\cancel{۲}}\alpha}\Rightarrow\boxed{\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$$

تمرین

۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۴}{۵}\div\frac{-۳}{۵}=\frac{۴}{۵}\times\frac{-۵}{۳}=-\frac{۴}{۳}$

۲ اگر $\tan\alpha=\frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ و $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{-۴}{۳}\times\frac{۳}{۵}=-\frac{۴}{۵}$

۳ اگر $\sin۱۳۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به‌دست آورید.

$\cos^۲۱۳۵^\circ=۱-\sin^۲۱۳۵^\circ=۱-\frac{۲}{۴}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow\cos۱۳۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\tan۱۳۵^\circ=\frac{\sin۱۳۵^\circ}{\cos۱۳۵^\circ}=\frac{\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}{-\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=-۱$

۴ اگر $\tan۲۴۰^\circ=\sqrt{۳}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ ۲۴۰° را به‌دست آورید.

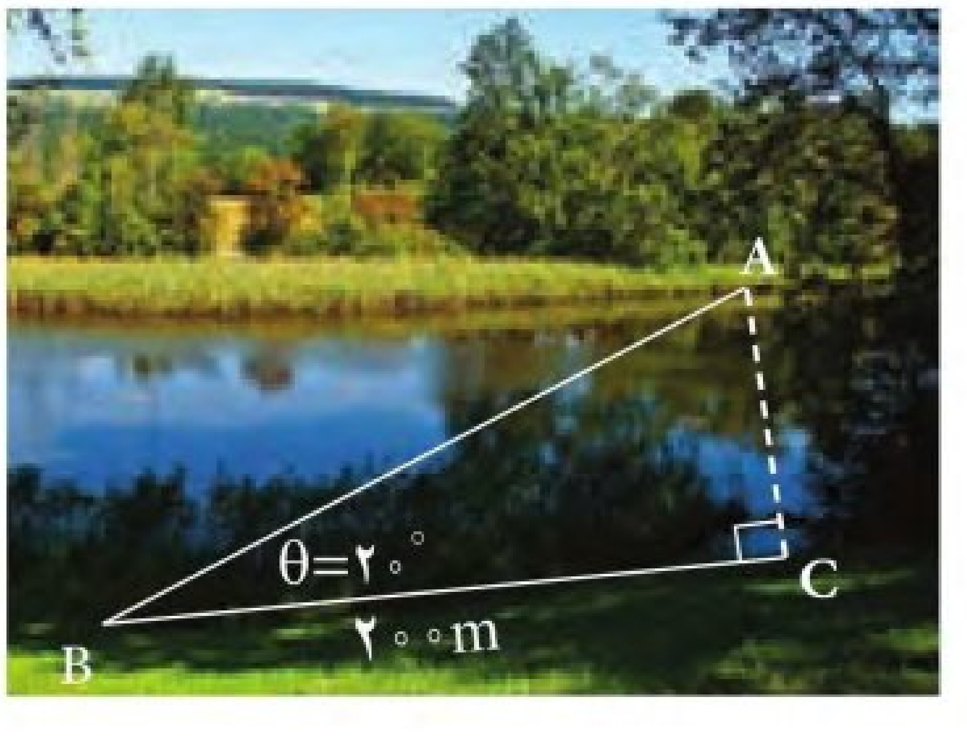
$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+۳=۴\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۱}{۲}$ و $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\sqrt{۳}\times\frac{-۱}{۲}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A)، ۲۰° باشد و $\sin۲۰^\circ\simeq ۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)

$\cos^۲۲۰^\circ=۱-\sin^۲۲۰^\circ=۱-۰/۱۱۵۶=۰/۸۸۴۴\Rightarrow\cos۲۰^\circ=۰/۹۴۰۴$

$\tan۲۰^\circ=\frac{\sin۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\frac{۰/۳۴}{۰/۹۴۰۴}=۰/۳۶۱۵$

$\tan۲۰^\circ=\frac{AC}{BC}\Rightarrow۰/۳۶۱۵=\frac{AC}{۲۰۰}\Rightarrow AC=۷۲/۳$



البته روش های متفاوتی برای حل این سوال وجود دارد. و ممکن است جواب های بدست آمده با توجه به میزان دقت، با هم تفاوت داشته باشند.

۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\cancel{\sin\theta}}\times\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta}=\frac{۱}{\cos\theta}$$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\text{چپ}=\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^{۲}\theta}=\frac{\cancel{\cos\theta}(۱-\sin\theta)}{\cos^{\cancel{۲}}\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

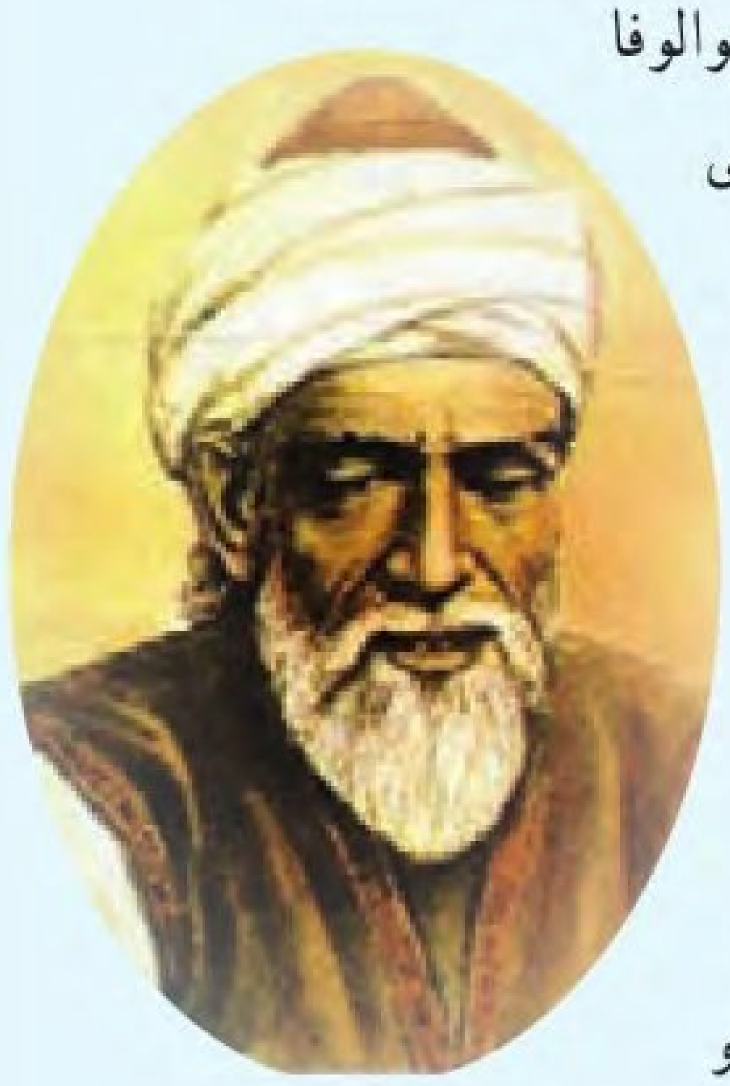
$$\text{چپ}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\frac{۱}{\tan\alpha}}=\frac{\tan\alpha\,\cancel{(۱+\tan\alpha)}}{\cancel{\tan\alpha+۱}}=\tan\alpha$$

ت) $۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\sin x$

$$\text{چپ}=۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=۱-\frac{۱-\sin^{۲}x}{۱+\sin x}=۱-\frac{(۱-\sin x)\cancel{(۱+\sin x)}}{\cancel{۱+\sin x}}=۱-۱+\sin x=\sin x$$

ث) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\frac{۱-\sin^{۲}x}{\cos x\,(۱+\sin x)}=\frac{\cos^{\cancel{۲}}x}{\cancel{\cos x}\,(۱+\sin x)}=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (هـ.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (هـ.ق) در بغداد درگذشت.

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول‌درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

بانک سلول‌های بنیادی رویان

درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $۲ = \sqrt[۳]{۸} \Rightarrow ۸ = ۲^{۳}$ ؛ همچنین $۸ = ۲^{۳} \Rightarrow ۲ = \sqrt[۳]{۸}$. علامت $\Rightarrow$ به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به‌طور خلاصه با علامت $\Leftrightarrow$ نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $۲ = \sqrt[۳]{۸} \Leftrightarrow ۸ = ۲^{۳}$.

فعالیت

۱ اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$\sqrt{۸۱} = ۹ \Leftrightarrow ۹^{۲} = ۸۱$ $\qquad$ $(-۳)^{۳} = -۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$

$\sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow (۵\sqrt{۲})^{۲} = ۵۰$ $\qquad$ $(-۵)^{۳} = -۱۲۵ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۱۲۵} = -۵$

$\sqrt[۳]{-۸} = -۲ \Leftrightarrow (-۲)^{۳} = -۸$ $\qquad$ $۲^{۴} = ۱۶ \Leftrightarrow \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$

$\sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \Leftrightarrow ۱۰^{۲} = ۱۰۰$ $\qquad$ $۱۱^{۲} = ۱۲۱ \Leftrightarrow \sqrt{۱۲۱} = ۱۱$

$\sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳} \Leftrightarrow (۴\sqrt{۳})^{۲} = ۴۸$ $\qquad$ $(۰/۲۵)^{۲} = ۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۰۶۲۵} = ۰/۲۵$

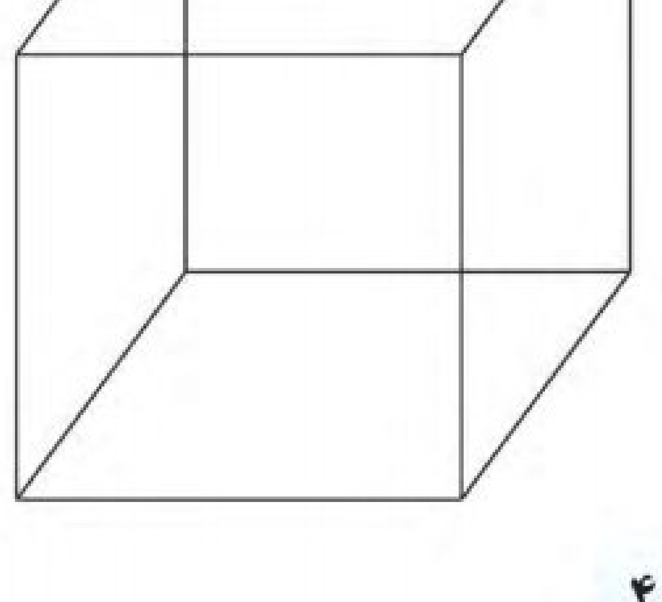
$\sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow (۳\sqrt{۵})^{۲} = ۴۵$ $\qquad$ $(۰/۵)^{۲} = ۰/۲۵ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵$

۲ در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	−۲۷	۱۲۵	−۱۰۰۰	۳۳۷۵	۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم	۲	۳	−۳	۵	−۱۰	۱۵	۱۰	۹

کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر $a^{۳}$ متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.



طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

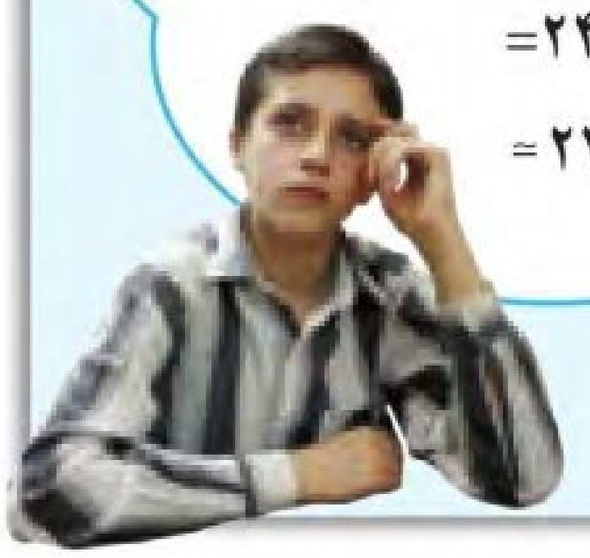
دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به‌دست آورده‌اند :
روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

احمد : چون $۲۷ = ۳^۳$ و $۸ < ۲۵ < ۲۷$، پس $۲ < \sqrt[۳]{۲۵} < ۳$
بهتر است ۲/۸ را امتحان کنم
آیا $۲۵ \stackrel{?}{=} (۲/۸)^۳$

$$(۲/۸)^۳ = (۲/۸)^۲ \times ۲/۸ = ۲۱/۹۵۲ \simeq ۲۲$$

محسن : ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس بهتر است عدد ۲/۹ را امتحان کنم.

$$(۲/۹)^۳ = (۲/۹)^۲ \times ۲/۹ = ۲۴/۳۸۹ \simeq ۲۴/۴$$



دبیر : ریشهٔ سوم ۲۵ تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به‌صورت تقریبی آن را برابر ۲/۹ بگیریم.

$$\sqrt[۳]{۲۵} \simeq ۲/۹$$

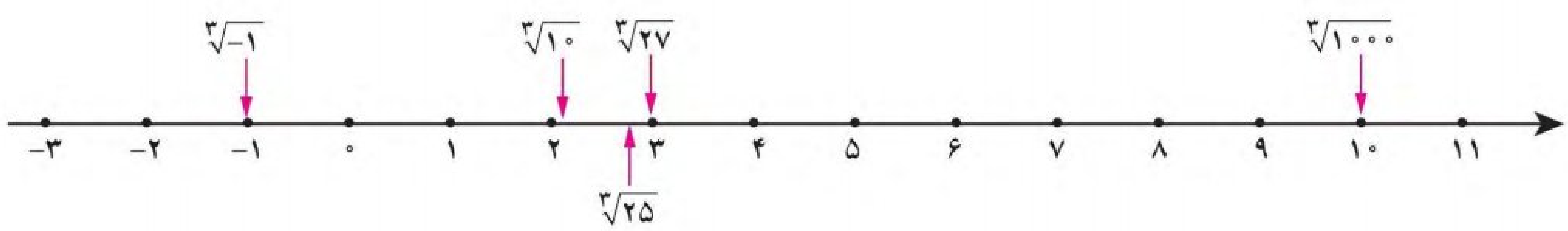
احمد : مقدار دقیق $\sqrt[۳]{۲۵}$ چقدر است؟

دبیر : $\sqrt[۳]{۲۵}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به‌دست آورید، **اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد $\sqrt[۳]{۲۵}$ استفاده می‌کنیم.**

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشهٔ سوم ۲۵ حاصل می‌شود.

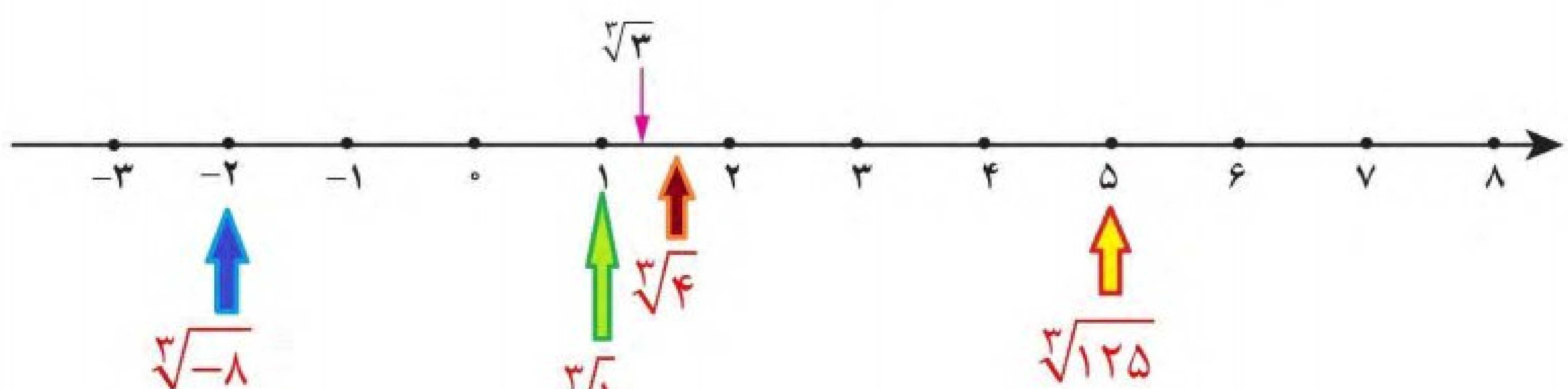
$\sqrt[۳]{۲۵}$ برای نمایش مقدار دقیق ریشهٔ سوم ۲۵ به‌کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند ۲/۹، ۲/۹۲ و ۲/۹۲۴ کار می‌کنیم.

ریشهٔ عددها را می‌توانیم به‌طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



۲ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

$\sqrt[۳]{-۸} = -۲$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۴} \simeq ۱/۵۸۷$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۳} \simeq ۱/۴$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۱} = ۱$



۳ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است :

الف) چون $36 > 30 > 25$ پس $6 > \sqrt{30} > 5$. همچنین چون $8 > 5 > 1$ پس $2 > \sqrt[3]{5} > 1$.

ب) $4<7<9 \Rightarrow \boxed{2}<\sqrt{7}<\boxed{3}$

پ) $9<10<16 \Rightarrow \boxed{3}<\sqrt{10}<\boxed{4}$

ت) $-27<-17<-8 \Rightarrow \boxed{-3}<\sqrt[3]{-17}<\boxed{-2}$

ث) $8<20<27 \Rightarrow \boxed{2}<\sqrt[3]{20}<\boxed{3}$

۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $5 > \sqrt{\ \ } > 4$ ⟸ زیر رادیکال می توان تمام اعداد بزرگتر از ۱۶ و کوچکتر از ۲۵ را نوشت

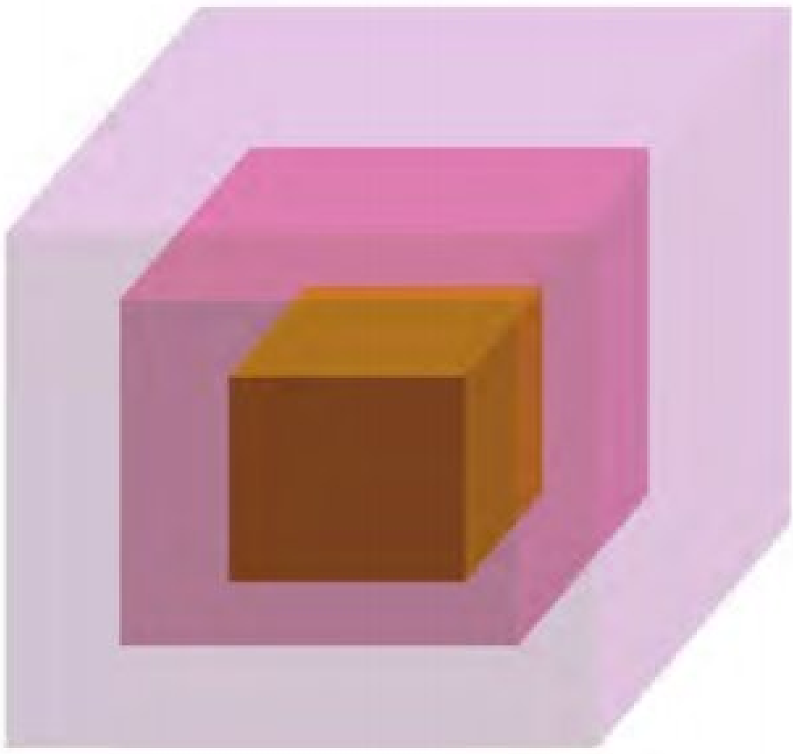
به توان ۲

۲۵ ، ۱۶

ب) $10 > \sqrt[3]{\ \ } > 9$ ⟸ زیر رادیکال می توان تمام اعداد بزرگتر از ۷۲۹ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را نوشت

به توان ۳

۱۰۰۰ ، ۷۲۹



۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

طول ضلع مکعب بیرونی ۴ و طول ضلع مکعب داخلی ۳ می باشد. بنابراین طول ضلع مکعب میانی می تواند هر یک از اعداد بین ۳ و ۴ باشد. به طور مثال می تواند ۳/۱ یا ۳/۵ یا ۳/۹ باشد.

فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هرتساویِ توانی یک تساوی رادیکالی داریم :

$5^4=625$ ، $(-5)^4=625$ $\Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۶۲۵ ← ۵ و ۵-

$2^4=16$ ، $(-2)^4=16$ $\Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۱۶ ← ۲ و ۲-

$\sqrt[4]{625}$ عددی مثبت و برابر است با ریشهٔ چهارم مثبت عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[4]{625}=5$. همچنین $-\sqrt[4]{625}$ عددی منفی است و برابر است با ریشهٔ چهارم منفی عدد ۶۲۵؛ یعنی $-\sqrt[4]{625}=-5$.

آیا ۱۶- ریشهٔ چهارم دارد؟ خیر آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶- شود؟ خیر

اکنون عبارت را کامل کنید.

> هر عدد مثبت دارای ...دو... ریشهٔ چهارم است که ...قرینه ی... یکدیگرند.
> عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

صفر فقط یک ریشه ی چهارم دارد و آن هم خود صفر می باشد.

کار در کلاس

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰،۰۰۰		۳۱۲۵		۸۱	
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	۱۰	-۱۰	$5\sqrt[4]{5}$	$-5\sqrt[4]{5}$	۳	-۳

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	-۱۰۰۰۰۰	۱۹	۱۰۲۴
ریشه پنجم	-۲	۵	$\sqrt[5]{71}$	-۳	-۱	-۱۰	$\sqrt[5]{19}$	۴

۳ ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟ ۱ و ۰ و ۱-

۴ محاسبه کنید.

$\sqrt[5]{-32} = -2$

$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$

$\sqrt[5]{-0/00032} = -0/2$

$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای ... یک ... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن ... منفی ... است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$-6 < -\sqrt{35} < -5$ $4 < \sqrt{20} < 5$ $\sqrt{16} = 4$

$2 < \sqrt[3]{20} < 3$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ $8 < \sqrt{75} < 9$

$\sqrt[4]{16} = 2$ $6 < \sqrt[3]{250} < 7$ $-5 < \sqrt[3]{-90} < -4$

$4 < \sqrt[4]{400} < 5$ $-4 < -\sqrt[4]{120} < -3$ $-3 < -\sqrt[4]{20} < -2$

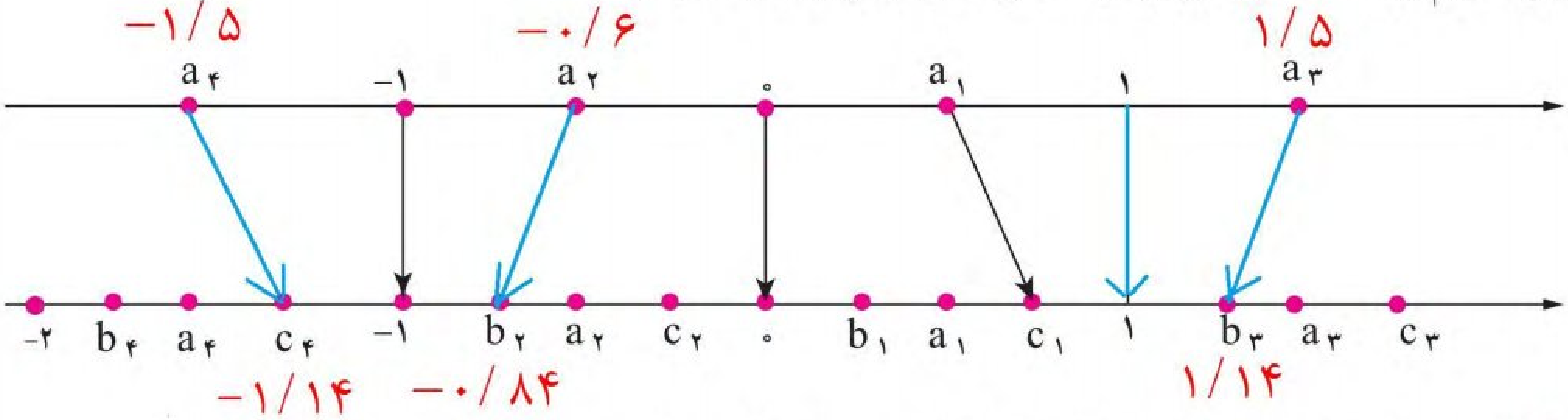
$3 < \sqrt[5]{400} < 4$ $\sqrt[5]{-32} = -2$ $\sqrt[5]{1} = 1$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

$\sqrt[3]{۷/۲۵} = ۱/۹$ $\sqrt[3]{۲۵} = ۲/۹$ $\sqrt{۱۰} = ۳/۱$

$\sqrt[4]{۹۰} = ۳/۰$ $\sqrt[5]{۶۴} = ۲/۲$ $\sqrt[5]{۱۶} = ۱/۷$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید.).



۴ با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. a چه عددی می‌تواند باشد؟ می تواند هر عددی بین صفر و یک باشد .

ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ ۱ یا صفر یا ۱-

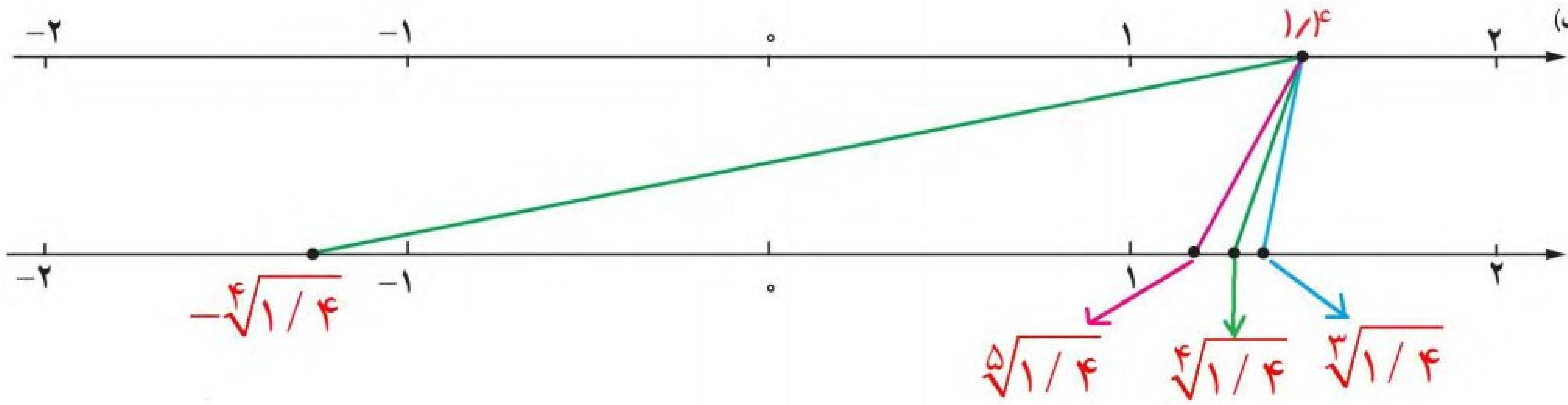
پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ حتماً عددی بزرگتر از یک خواهد بود

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

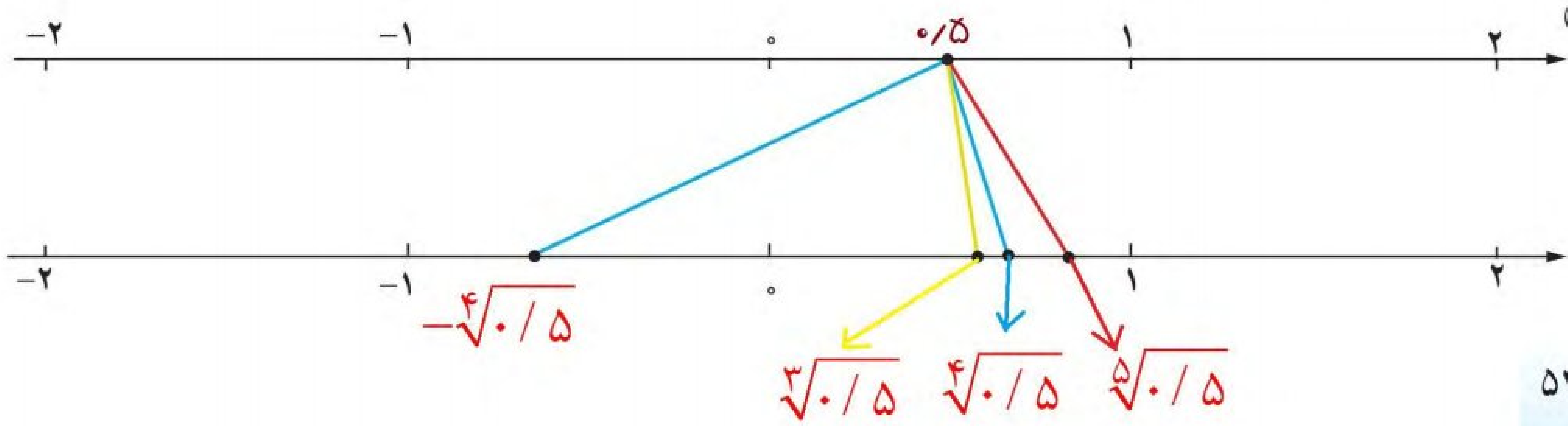
در حالت الف : حتماً آن عدد کمتر از ۱- است . در حالت پ : حتماً آن عدد بین ۱- و صفر است .

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

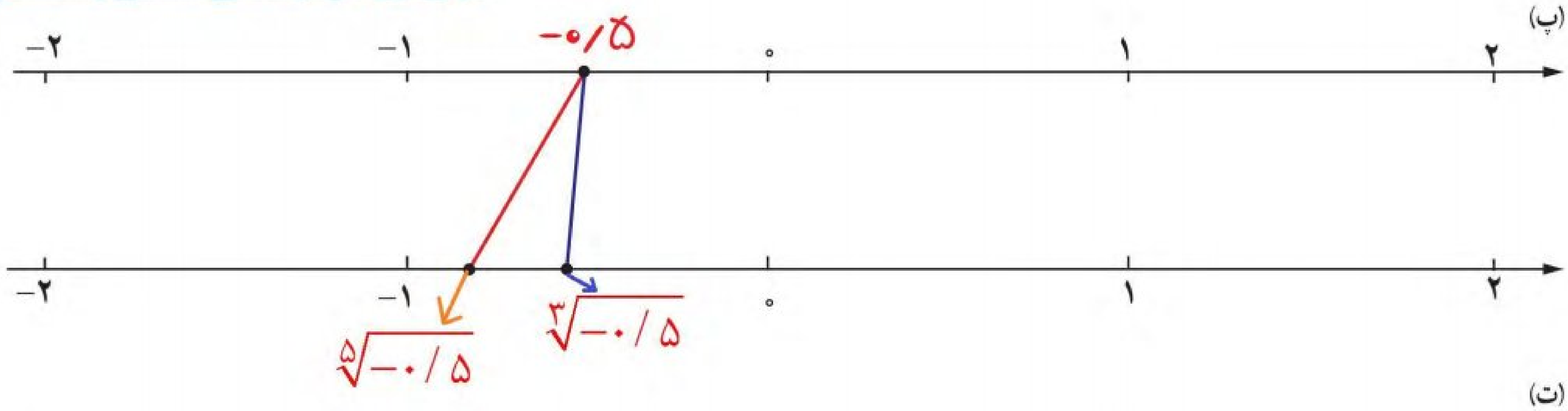
(الف)



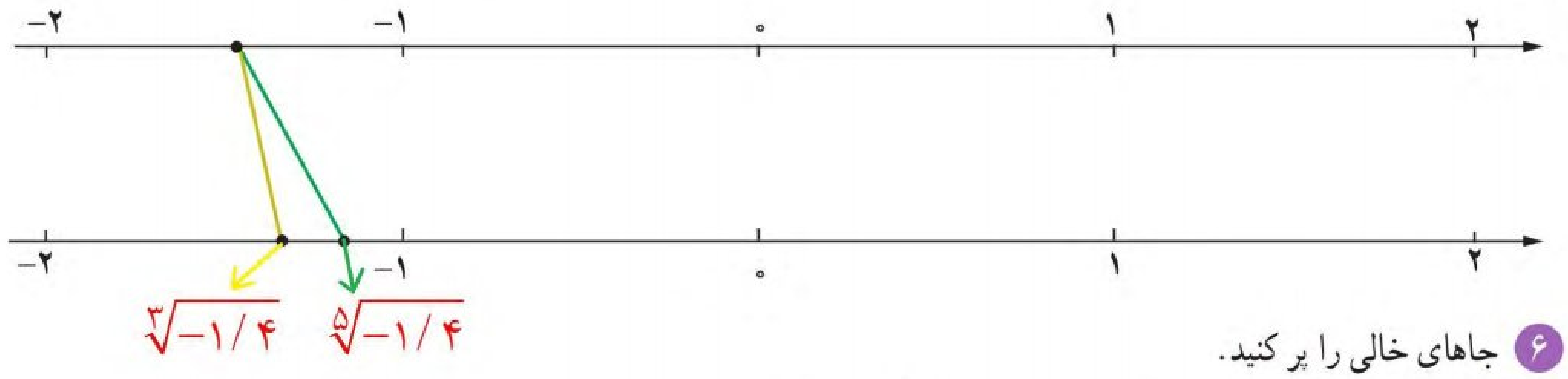
(ب)



(پ)



(ت)



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ....-۳.... ریشه‌های چهارم عدد ....۸۱.... می‌باشند.

ب) اگر $a=\sqrt[۴]{۱۶}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^۳+۵$ را بیابید. $a=۲ \Rightarrow a^۳+۵=۸+۵=۱۳$

۷ می‌دانیم $۱۱=\sqrt[۵]{۱۶۱۰۵۱}$ ، $\sqrt[۵]{۱۷۰۰۰۰}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ بین دو عدد ۱۱ و ۱۲ واقع است.

۸ در جاهای خالی یکی از علامت‌های « > » ، « < » یا « = » را قرار دهید.

$۲^۵ > ۲^۲$	$(۰/۱)^۵ < (۰/۱)^۳$	$(-۰/۱)^۵ > (-۰/۱)^۳$
$\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱} = ۰/۱$	$(-۲)^۵ < (-۲)^۳$	$(-۲)^۵ < (-۲)^۴$

۹ قرار دهید $\square=\sqrt[۵]{a}$. اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید $\square^۵$ برابر چه عددی است؟ a بنابراین داریم $(\sqrt[۵]{a})^۵=$ ...a... دربارهٔ $(\sqrt[۴]{a})^۴$ چه می‌توان گفت؟ برابر a است.

خواندنی

حنا ـ نخستین بزغاله شبیه‌سازی شده خاورمیانه

بنیا ـ نخستین گوساله شبیه‌سازی شده خاورمیانه

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت‌های بدن است. هر بافت سلول‌های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می‌تواند به سلول‌های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول‌ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول‌های بدن را دارد. دانشمندان می‌گویند این سلول‌ها می‌توانند امکان معالجه بیماری‌هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان‌های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول‌های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست‌شناسی و پزشکی است. این سلول‌ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می‌شود. پیشرفت در زمینه سلول‌های بنیادی تنها متکی بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول‌های بنیادی پیشرفت‌های چشمگیری داشته‌اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول‌های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می‌شود.

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: ریشه nام

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشهٔ ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
$-\sqrt[8]{64}$ و $\sqrt[8]{64}$	$\sqrt[7]{64}$	$-\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt{64}=8$ و $-\sqrt{64}=-8$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان ۲ و ۲- هستند؛ زیرا $64=2^6$ و $64=(-2)^6$

دربارهٔ ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟ دارای یک ریشه ی هفتم و دو ریشه ی هشتم است.

به طور کلی اگر $n\in\mathbb{N}$، دربارهٔ ریشهٔ nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه مثبت و منفی است که با هم قرینه اند.

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n\in\mathbb{N}$، دربارهٔ تعداد ریشه‌های n ام a چه می‌توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴ گوییم:

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه ی مثبت و منفی است که با هم قرینه اند.

۲ جدول زیر را که دربارهٔ ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه‌هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌ششم	ریشه پنجم	ریشه‌چهارم	ریشه سوم	ریشه دوم
وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64}=-4$	وجود ندارد

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان عددی زوج برسد و مساوی ۶۴- شود.

دربارهٔ ریشه‌های nام ۶۴- ($n\in\mathbb{N}$) بحث کنید. اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر a یک عدد منفی و $n\in\mathbb{N}$ باشد، دربارهٔ ریشه nام a چه می‌توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴- گوییم:

اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر $n\geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ n ام عدد a می‌نامیم. هرگاه: $b^n=a$

۳ جدول زیر را کامل کنید.

$a>0$	n زوج	a دارای دو ریشهٔ n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a=81$ $n=4$	۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم $3=\sqrt[4]{81}$ و $-3=-\sqrt[4]{81}$ است
	n فرد	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است .	$a=27$ $n=3$	۲۷ دارای یک ریشه ی سوم $\sqrt[3]{27}=3$ است .
$a<0$	n زوج	ریشهٔ n ام وجود ندارد	$a=-1$ $n=2$	برای ۱- ریشه ی دوم وجود ندارد .
	n فرد	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است .	$a=-32$ $n=5$	۳۲- دارای یک ریشه ی پنجم $-2=\sqrt[5]{-32}$ است .

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:

$\sqrt[8]{256}=2$ $\quad\sqrt[7]{128}=2$ $\quad\sqrt[5]{-32}=-2$ $\quad\sqrt[3]{125}=5$

$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=-\frac{1}{2}$ $\quad-\sqrt[4]{16}=-2$ $\quad\sqrt[4]{625}=5$ $\quad\sqrt[9]{-1}=-1$

$\sqrt[6]{0}=0$ $\quad-\sqrt{1}=-1$ $\quad\sqrt[3]{-0/001}=-0/1$ $\quad\sqrt[7]{-128}=-2$

۲ الف) می‌دانید که $\sqrt{x^2}=|x|$ دربارهٔ $\sqrt[4]{x^4}$ چه حدسی می‌زنید؟ $\sqrt[4]{x^4}=|x|$ درستی حدس خود را دربارهٔ چند عدد آزمایش کنید.

$\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{(3)^4}=\sqrt[4]{81}=3\\ |3|=3\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[4]{(3)^4}=|3|$ $\qquad\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{16}=2\\ |-2|=2\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$\sqrt[6]{(-2)^6}=-2$ غلط $\quad\sqrt[5]{3^5}=3$ صحیح $\quad\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$ غلط

$\sqrt[6]{(-2)^6}=2$ صحیح $\quad\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$ صحیح $\quad\sqrt[4]{(-3)^4}=3$ صحیح

پ) به‌طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n}=|a|$؛ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n}=a$.

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$\sqrt[n]{a^n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)^4}\neq\left(\sqrt[4]{-2}\right)^4$ وجود ندارد

ث) در قسمت (ت) تساوی به‌ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟ اگر a عددی مثبت باشد ، برای هر عدد طبیعی n تساوی برقرار است ، اما در صورتی که a عددی منفی باشد ، فقط به ازای n های طبیعی فرد ، تساوی برقرار است .

فعالیت

در سال نهم دیدید که:

برای هر دو عدد مثبت a و b: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $\qquad$ برای هر دو عدد a و b: $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می‌باشد؟ مثال بزنید. بله در صورتی که هر دو عدد نامنفی باشند ، تساوی برقرار است .

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{81}=2\times3=6\\ \sqrt[4]{16\times81}=\sqrt[4]{1296}=6\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{16\times81}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b ......نامنفی... باشند.

$\sqrt[4]{۱۶}\times\sqrt[4]{۸۱}=\sqrt[4]{..۱۲۹۶..}=۶$ $\qquad$ $\sqrt[4]{۱۶}\times\sqrt[4]{۸۱}=۲\times۳=....۶....$

دربارهٔ $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\times\sqrt[5]{b}$ چه می‌توان گفت؟ در این مورد نیز تساوی برقرار است.

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ خیر لازم نیست

مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{۳۲}\times\sqrt[5]{۲۴۳}=۲\times۳=۶\\ \sqrt[5]{۳۲\times۲۴۳}=\sqrt[5]{۷۷۷۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[5]{۳۲}\times\sqrt[5]{۲۴۳}=\sqrt[5]{۳۲\times۲۴۳}$$

به‌طور کلی داریم :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab} & a,b>۰ \text{ و } n \text{ زوج}\\ \sqrt[n]{ab} & a,b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد}\end{cases}$$

قرارداد : به‌طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم :

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه $\sqrt{x}$ نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x\geq۰$ است.

تساوی‌های فوق را می‌توان به‌صورت مقابل نمایش داد :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

۱ آیا $\left(\sqrt[3]{۲}\right)^5$ و $\sqrt[3]{۲^5}$ با هم برابرند؟ بله با هم برابرند. زیرا: $\left(\sqrt[3]{۲}\right)^5=\sqrt[3]{۲}\times\sqrt[3]{۲}\times\sqrt[3]{۲}\times\sqrt[3]{۲}\times\sqrt[3]{۲}=\sqrt[3]{۲\times۲\times۲\times۲\times۲}=\sqrt[3]{۲^5}$

دربارهٔ $\left(\sqrt[4]{-۲}\right)^4$ و $\sqrt[4]{(-۲)^4}$ چه می‌توان گفت؟

$\left(\sqrt[4]{-۲}\right)^4$ تعریف نشده است. ولی: $\sqrt[4]{(-۲)^4}=|-۲|=۲$

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\left(\sqrt[5]{۲}\right)^3=\sqrt[5]{۲}\times\sqrt[5]{۲}\times\sqrt[5]{۲}$$
$$=\sqrt[5]{۲^3}$$

۳ درستی رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m}=\left(\sqrt[k]{a}\right)^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به m،k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$(\sqrt[4]{۲})^3=\sqrt[4]{۲}\times\sqrt[4]{۲}\times\sqrt[4]{۲}=\sqrt[4]{۲\times۲\times۲}=\sqrt[4]{۲^3}$

$(\sqrt[3]{۷})^4=\sqrt[3]{۷}\times\sqrt[3]{۷}\times\sqrt[3]{۷}\times\sqrt[3]{۷}=\sqrt[3]{۷\times۷\times۷\times۷}=\sqrt[3]{۷^4}$

$(\sqrt[5]{-۲})^3=\sqrt[5]{-۲}\times\sqrt[5]{-۲}\times\sqrt[5]{-۲}=\sqrt[5]{(-۲)(-۲)(-۲)}=\sqrt[5]{(-۲)^3}$

$(\sqrt[5]{-۲})^4=\sqrt[5]{-۲}\times\sqrt[5]{-۲}\times\sqrt[5]{-۲}\times\sqrt[5]{-۲}=\sqrt[5]{(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)}=\sqrt[5]{(-۲)^4}$

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	n زوج	$a > ۰$	$n = ۴$ $a = ۲$	$\sqrt[۴]{۲^۴} = ۲ \qquad (۲ = \|۲\|)$
		$a < ۰$	$n = ۴$ $a = -۲$	$\sqrt[۴]{(-۲)^۴} = ۲ \qquad (۲ = \|-۲\|)$
	n فرد	$a > ۰$	$n = ۳$ $a = ۲$	$\sqrt[۳]{۲^۳} = ۲$
		$a < ۰$	$n = ۳$ $a = -۲$	$\sqrt[۳]{(-۲)^۳} = -۲$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می گیرید؟

در صورتی که n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$ است. اما اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ است.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	n زوج	$a > ۰$	$n = ۴$ $a = ۱۶$	$(\sqrt[۴]{۱۶})^۴ = ۲^۴ = ۱۶$
		$a < ۰$	$n = ۴$ $a = -۱۶$	$(\sqrt[۴]{-۱۶})^۴ \rightarrow$ تعریف‌نشده
	n فرد	$a > ۰$	$n = ۳$ $a = ۸$	$(\sqrt[۳]{۸})^۳ = ۲^۳ = ۸$
		$a < ۰$	$n = ۳$ $a = -۸$	$(\sqrt[۳]{-۸})^۳ = (-۲)^۳ = -۸$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می گیرید؟ همواره $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ است، فقط در حالتی که n زوج است، a نمی تواند منفی باشد.

تمرین

۱ الف) یکی از علامت‌های > یا < را در □ قرار دهید.

$\sqrt{0/25}\ \boxed{<}\ \sqrt[3]{0/25}$ ← ۰/۱۲۵ اصلاح شد به ۰/۲۵

$(0/5)^2\ \boxed{>}\ (0/5)^3$

ب) وقتی $0<a<1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید.

$\sqrt{a}\ \boxed{<}\ \sqrt[3]{a}$

$a^2\ \boxed{>}\ a^3$

۲ فرض کنیم $a=-1$ است، در □ علامت مناسب را قرار دهید.

$\sqrt[5]{a}\ \boxed{=}\ \sqrt[11]{a}$

$\sqrt[3]{a}\ \boxed{=}\ \sqrt[5]{a}$

$a^3\ \boxed{=}\ a^5$

$a^2\ \boxed{>}\ a^3$

۳ با توجه به تعریف ریشهٔ (اگر $b^n=a$ آنگاه $\sqrt[n]{a}=b$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به‌شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=b^n=a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۴،۳ یا ۵ بگیرید و به‌جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{-1}+\sqrt[5]{-32}=-1+(-2)=-3\\ \sqrt[5]{-1+(-32)}=\sqrt[5]{-33}\simeq -2/01\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[5]{-1}+\sqrt[5]{-32}\neq\sqrt[5]{-1+(-32)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{8}=1+2=3\\ \sqrt[3]{1+8}=\sqrt[3]{9}\simeq 2/08\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{8}\neq\sqrt[3]{1+8}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{81}=1+3=4\\ \sqrt[4]{1+81}=\sqrt[4]{82}\simeq 3/009\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{81}\neq\sqrt[4]{1+81}$$

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\left(\frac{1}{5}\right)^3 \to \sqrt[3]{5^{-3}}=\frac{1}{5}$$

$\frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^7\Rightarrow\sqrt[7]{\frac{1}{128}}=\frac{1}{2}$ و $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\left(\frac{1}{3}\right)^4\Rightarrow\sqrt[4]{3^{-4}}=\frac{1}{3}$ و $2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5\Rightarrow\sqrt[5]{2^{-5}}=\frac{1}{2}$

۶ به‌جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری که :

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{2}{3}\\ \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$$

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو ~~مثبت~~ منفی‌اند).

$\sqrt[4]{\frac{-16}{-81}}=\sqrt[4]{\left(\frac{-2}{-3}\right)^4}=\frac{2}{3}$ است در حالی که $\frac{\sqrt[4]{-16}}{\sqrt[4]{-81}}$ تعریف نشده است.

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت

پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. وزن باکتری‌ها در لحظهٔ شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت nام برابر ۲^n گرم می‌شود :

$۱, ۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, \ldots\ldots, ۲^n$

محمد از پدرش پرسید : «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت : تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

محمد گفت : حدس می‌زنم وزن آنها $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{۱}{۲}$ است.

پدرش گفت : $۲^{\frac{۱}{۲}}$ چقدر است؟

محمد گفت : نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم‌ساعت وزن باکتری‌ها b برابر شود، در این‌صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^۲$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $۲ = b^۲$؛ یعنی $b = \sqrt{۲}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجهٔ جالبی است! $۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف کنیم : $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$ ، $۲^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۲}$ ؛ همچنین برای عددهای دیگر $۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۵}$. می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < ۰$ در این صورت $a^{\frac{۱}{n}}$ تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۲)^{\frac{۲}{۴}}$ تعریف نمی‌شوند.

فعالیت

۱ توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$۴^{\frac{1}{۴}} = \sqrt[۴]{۴}$ $\quad$ $۳^{\frac{1}{۲}} = \sqrt{۳}$ $\quad$ $۲^{\frac{1}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$

$(-۳)^{\frac{1}{۵}} =$ تعریف نمی‌شود $\quad$ $۵^{\frac{1}{۲}} = \sqrt{۵}$ $\quad$ $۵^{\frac{1}{۷}} = \sqrt[۷]{۵}$

$(-۵)^{\frac{1}{۴}} =$ تعریف نمی‌شود $\quad$ $۸۱^{\frac{1}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱}$ $\quad$ $۶^{\frac{1}{۴}} = \sqrt[۴]{۶}$

۲ کدام درست است؟

ب) $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$ صحیح $\quad$ الف) $(-۳۲)^{\frac{1}{۵}} = -۲$ غلط

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > ۰$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

(قاعده ضرب توان) $\quad$ $۲^۶ = ۲^{۲\times۳} = (۲^۲)^۳$

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$۵^{\frac{۸}{۳}} = ۵^{۸\times\frac{1}{۳}} = (۵^۸)^{\frac{1}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^۸}$ $\quad$ $۲^{\frac{۲}{۳}} = ۲^{۲\times\frac{1}{۳}} = (۲^۲)^{\frac{1}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^۲}$

به‌طور کلی:

هرگاه $a > ۰$ برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیرصحیحِ $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان‌دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

الف) $۵^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۵^۲}$ $\quad$ ب) $۳^{\frac{۲}{۷}} = \sqrt[۷]{۳^۲}$ $\quad$ پ) $۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۲]{۲^۳}$

ت) $(-۶)^{\frac{۲}{۷}}$ تعریف نشده $\quad$ ث) $۱۶^{\frac{1}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۶}$ $\quad$ ج) $(-۳)^{\frac{۲}{۳}}$ تعریف نشده

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a > ۰$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s = a^{rs}$

۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقهٔ دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البتّه عملاً چنین اتّفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیای از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

کار در کلاس

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به‌صورت رادیکالی بنویسید.

$3^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{3^5}=\sqrt[4]{3^4\times 3}=\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[4]{3}=3\sqrt[4]{3}$ $\qquad 3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}$

$4^{\frac{7}{5}}=4^{1+\frac{2}{5}}=4\times 4^{\frac{2}{5}}=4\sqrt[5]{4^2}$

روش دوم $\boxed{4^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{4^7}=\sqrt[5]{4^5\times 4^2}=\sqrt[5]{4^5}\times\sqrt[5]{4^2}=4\sqrt[5]{4^2}}$

$2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=2^{\frac{13}{6}}=2^{2+\frac{1}{6}}=2^2\times 2^{\frac{1}{6}}=4\sqrt[6]{2}$ $\qquad 4^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{4}$

$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$ $\qquad 5^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3\times 5}=\sqrt[3]{5^3}\times\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$ $\qquad (4\times 2)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$

$5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=5^{\frac{3}{3}}=5$ $\qquad 6^{\frac{3}{8}}=\sqrt[8]{6^3}$

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$\sqrt[3]{-1}=-1$ $\qquad \sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$ $\qquad \sqrt{2^5}=2^{\frac{5}{2}}$ $\qquad \sqrt[7]{3^2}=3^{\frac{2}{7}}$

$\sqrt[5]{2^5}=2^{\frac{5}{5}}$ $\qquad \sqrt[3]{-27}=-3$ $\qquad \sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$ $\qquad \sqrt[5]{19}=19^{\frac{1}{5}}$

۳ جدول‌های زیر را کامل کنید:

$a>0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a=5$	5^3	$\frac{1}{5^3}$	5^0	$5^{\frac{1}{2}}$	$5^{\frac{2}{3}}$

$a<0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{6}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a=-5$	$(-5)^3$	$\frac{1}{(-5)^3}$	$(-5)^0$	تعریف نمی‌شود	$(-5)^2=25$	$(-5)^{\frac{2}{3}}$

فعالیت

۱ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ است. تساوی را کامل کنید $(a>0)$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

۲ دبیر: به‌خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجهٔ زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81}=3$

به‌علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به‌دست آورید.

نسترن: اگر جای توان‌ها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دبیر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4}=\left[(-3)^4\right]^{\frac{1}{4}}=\left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^4=(-3)^{\frac{1}{4}\times 4}=(-3)^1=-3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم $(-3)^{\frac{1}{4}}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دبیر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده: بهتر است اول $(-3)^4$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{81}=3$$

دبیر : آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانید، همان‌گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$$

۳ با توجه به فعالیت ۱ در صفحهٔ قبل تساوی‌ها را کامل کنید.

الف) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}}=\sqrt[3\times2]{5}=5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$

ب) $(4^{\frac{1}{7}})^{\frac{1}{5}}=(\sqrt[7]{4})^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\sqrt[7]{4}}=\sqrt[5\times7]{4}=4^{\frac{1}{35}}=4^{\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}$

پ) اکنون برای هر عدد $a>0$، به ازای هر دو عدد گویای غیرصحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s=a^{rs}$ را برای $r=\frac{1}{4}$ و $s=\frac{1}{3}$، تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=(\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[12]{a}=a^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}$$

تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال بنویسید.

$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}$ $\quad 4^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{4^3}$ $\quad 5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ $\quad 3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=\sqrt[3]{3^3}$ $\quad 16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}$

$32^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{32^2}$ $\quad 17^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{17})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{17}}$ $\quad 4^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4^2}$ $\quad 32^{-\frac{1}{5}}=(\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}}$ $\quad 3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ $\quad a^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{a^2}$

۲ هر یک از رادیکال‌ها را به‌صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایهٔ عدد مثبت باشد.

در این تمرین با فرض مثبت بودن a پاسخ ها نوشته شده اند.

$\sqrt[5]{2^{10}}=a^{\frac{10}{5}}=a^2$ $\quad \sqrt[n]{a^2}=a^{\frac{2}{n}}$ $\quad \sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$ $\quad \sqrt[7]{a}=a^{\frac{1}{7}}$ $\quad \sqrt[5]{a^4}=a^{\frac{4}{5}}$ $\quad \sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$

۳ می‌دانیم $\quad \sqrt[12]{a^4}=(a^4)^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{4}{12}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$ $\quad \sqrt[6]{a^2}=a^{\frac{2}{6}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a>0$؛ n، m و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند.

بله این تساوی برای اعداد مثبت a همواره برقرار است.

$$\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[2\times2]{2^{2\times1}}=\sqrt[2]{2^1}=\sqrt{2} \qquad \sqrt[6]{2^3}=\sqrt[3\times2]{2^{3\times1}}=\sqrt[2]{2^1}=\sqrt{2}$$

۴ فرض کنیم $a=64$، $r=\frac{1}{2}$ و $s=\frac{1}{3}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^r}{a^s}&=\frac{1024^{\frac{1}{2}}}{1024^{\frac{1}{5}}}=\frac{\sqrt{1024}}{\sqrt[5]{1024}}=\frac{32}{4}=8\\ a^{r-s}&=1024^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}=1024^{\frac{3}{10}}=(2^{10})^{\frac{3}{10}}=2^3=8\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^r}{a^s}&=\frac{729^{\frac{1}{2}}}{729^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{729}}{\sqrt[3]{729}}=\frac{27}{9}=3\\ a^{r-s}&=729^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=729^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{729}=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^r}{a^s}&=\frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{8}{4}=2\\ a^{r-s}&=64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=64^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

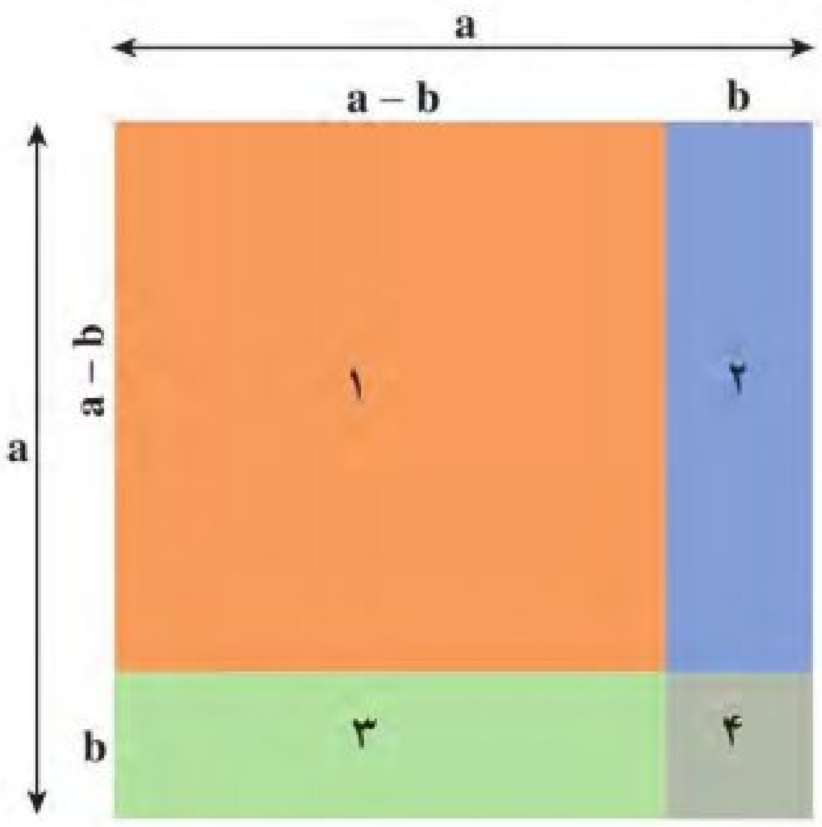
۵ حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3$ $\quad \sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt{5}}=\sqrt[6]{5}$

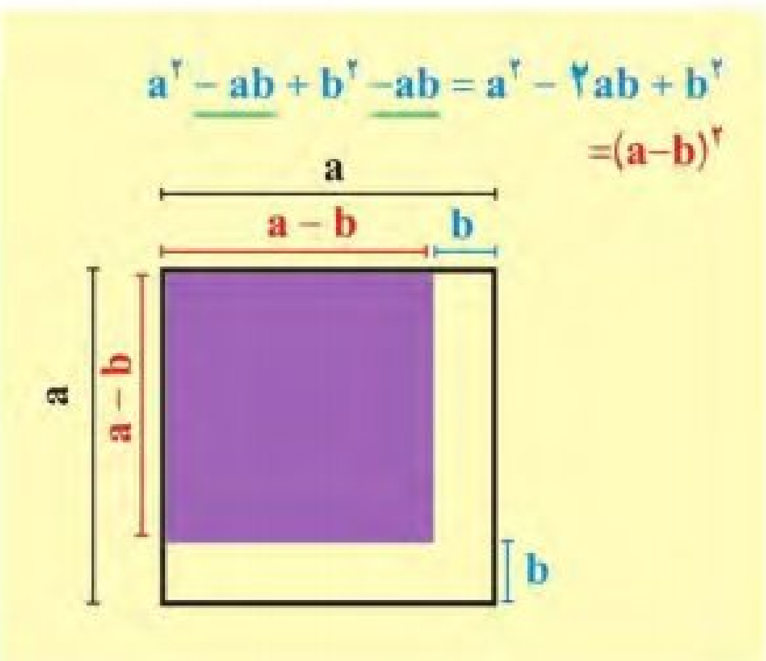
تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس چهارم: عبارت‌های جبری



$$S_1 = (a-b)^2$$
$$S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$$
$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$
$$(1) \text{ و } (2) \Longrightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



فعالیت

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$

اتحاد گفته می‌شود؟

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به‌دست آورد. برای مثال اگر $a = \frac{1}{5}$ و $b=3$ اختیار شود.

$$(\frac{1}{5}+3)^2 = (\frac{1}{5})^2 + 2\times\frac{1}{5}\times 3 + 3^2$$

$$(\frac{16}{5})^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطهٔ (۱) به جای b، b– قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (۱) و (۲) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به‌دست آورید.

۱ با محاسبهٔ $(a+b)^3$ اتحاد دیگری به‌دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$=(a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به‌صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به b– تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به‌دست آوریم:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شمارهٔ (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)$$
$$=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانهٔ فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)(a-b)(a-b) \qquad (4)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ را به حاصل‌ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند.
تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+2ab+c^2+2bc+2ca$

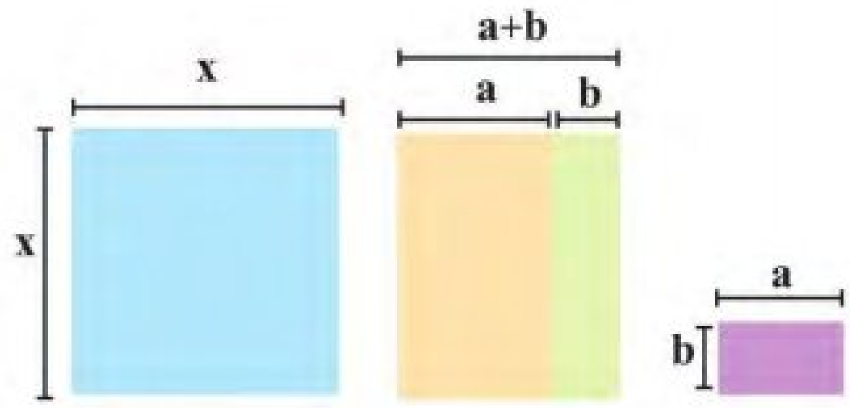
$(a+x)(a+y)=a^2+(x+y)a+xy$

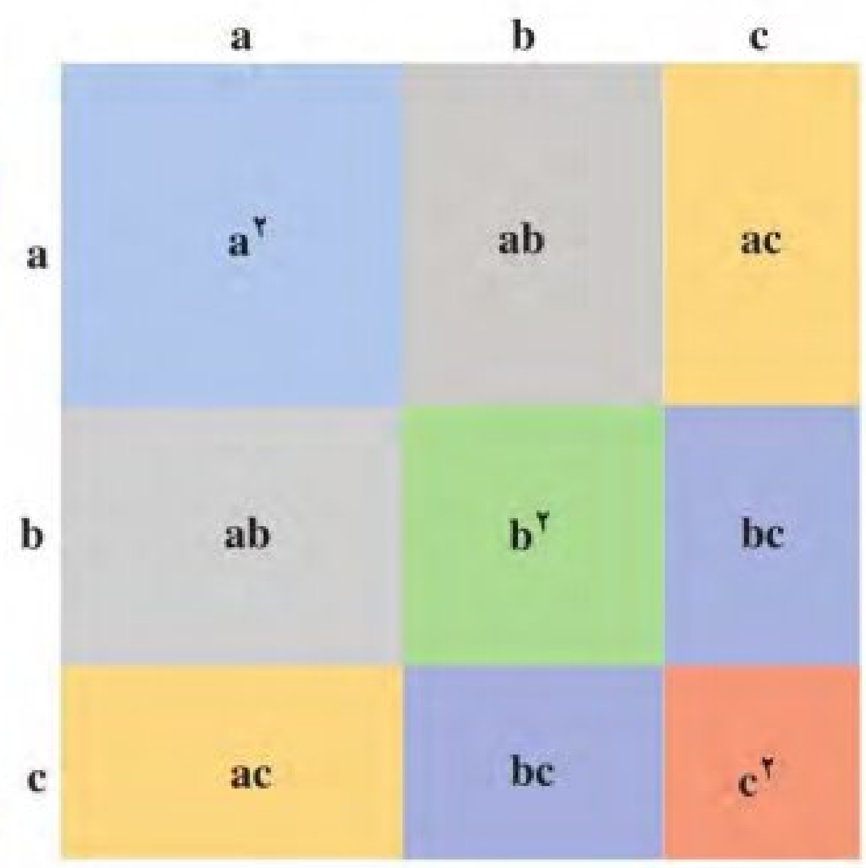
مثال ۱

عبارت $2x^2+3x+1$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم :

$$2x^2+3x+1=x^2+2x+1+x^2+x$$
$$=(x+1)^2+x(x+1)$$
$$=(x+1)(x+1+x)=(x+1)(2x+1)$$





مثال ۲

عبارت $a^3-2ab+a^2b-2b^2$ را تجزیه کنید :

$$a^3-2ab+a^2b-2b^2=a^2(a+b)-2b(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-2b)$$

کار در کلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-a^2b+b^3=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های a^3+b^3 و a^3-b^3 را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به‌دست آورید.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

اتحادهای چاق و لاغر

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

۳ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

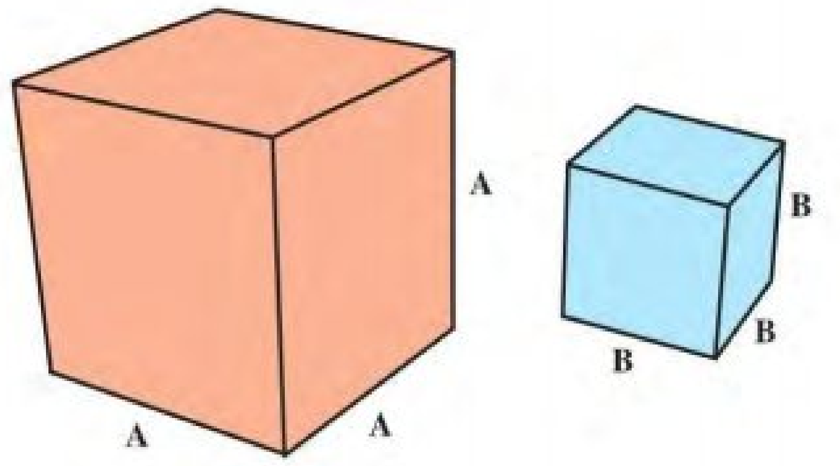
$$8x^3-27=(2x)^3-3^3$$
$$=(2x-3)[(2x)^2+2x\times 3+3^2]$$
$$=(2x-3)(4x^2+6x+9)$$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

$x^3-125=(x-5)(x^2+5x+25)$

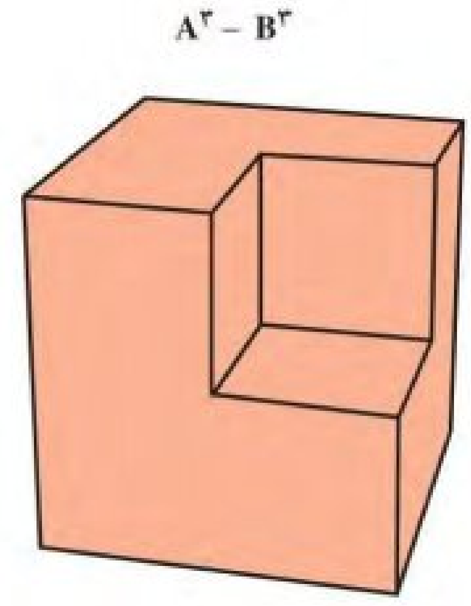
$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$



فعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به‌خاطر دارید:

$12=3\times 4$

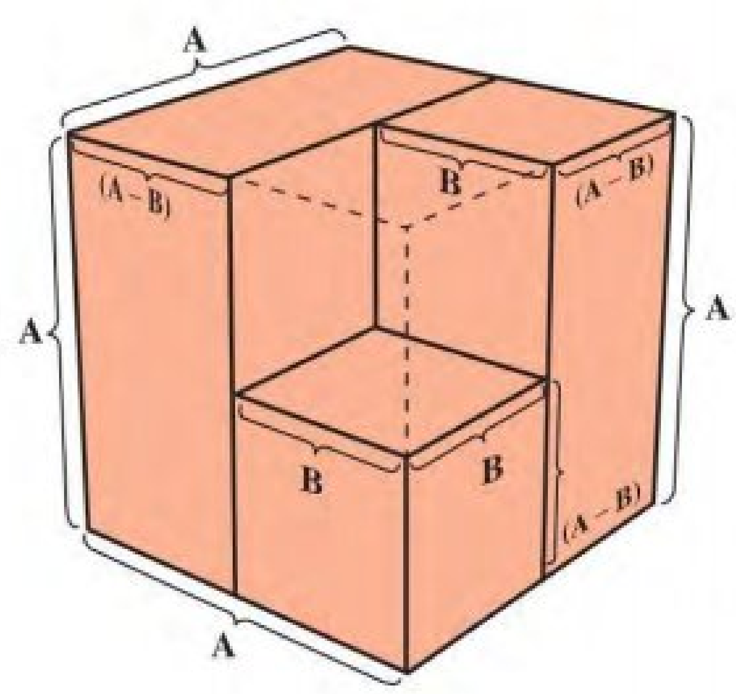


هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک **شمارندهٔ** عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و ... .

مشابه این در اتحاد مزدوج $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارندهٔ a^2-b^2 است. همچنین a^2-b^2 هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

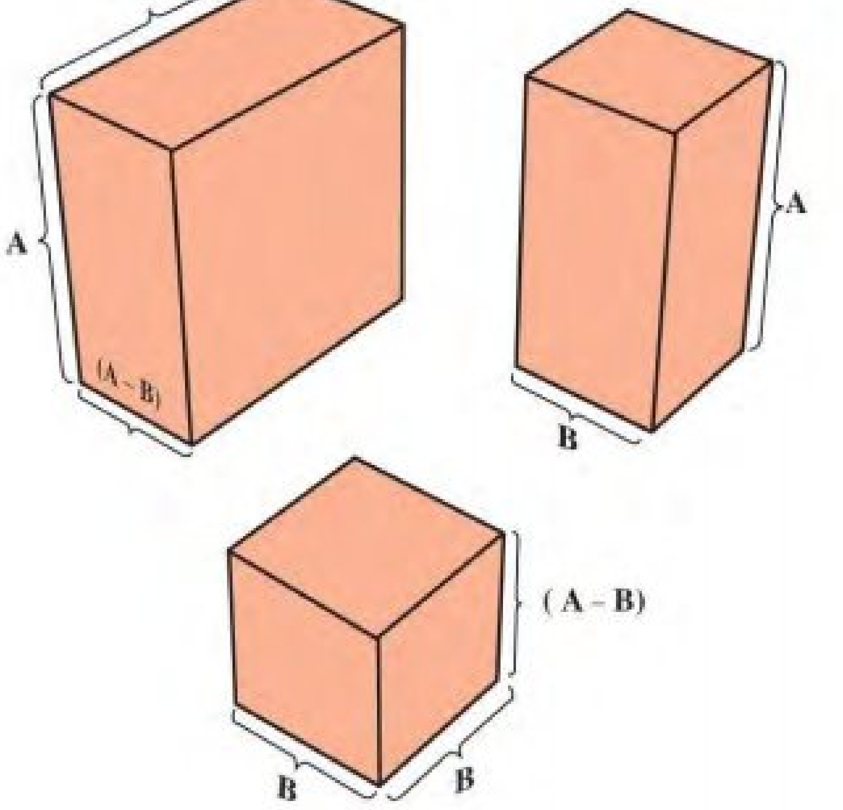


۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به‌دست می‌آیند:

بعضی از مضرب‌های $a+b$: $a+b$ و $2(a+b)$ و $(a+b)(a+b)$ و $(a+b)^2$ و $-4(a+b)$ و $(a+b)(a-b)$ و...

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

$3(a-b)\,,\,(a-b)(a^2+ab+7)\,,\,(a-b)(x+y-z)\,,\cdots$



۲ دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

در این مورد می توان دو اتحاد را مثال زد:

اتحاد چاق و لاغر: a^3-b^3 اتحاد مربع دو جمله ای: $(a-b)^2$

۳ عبارت $27a^3-1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a-1$ ب) $3a-1$ پ) $9a^2+3a+1$ ت) $3a+1$

با توجه به تجزیه ی آن -طبق اتحاد چاق و لاغر- یعنی: $(3a-1)(9a^2+3a+1)$

هر دو گزینه ی ب و پ صحیح هستند.

نکته: عبارت $\sqrt{3}\,(a+b)$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

یاد آوری: به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند. (ریاضی نهم صفحه ی ۱۱۴)

گزینه های الف و ب عبارت گویا هستند ولی گزینه های پ و ت گویا نیستند.

الف) $\frac{3x-\sqrt{7}}{x^2}$ ب) $\frac{x^3-1}{x^3+1}$ پ) $\sqrt[3]{x}-1$ ت) $\sqrt[3]{x^2}+x-1$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ ، $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ و $x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \rightarrow$ جواب ندارد

بنابراین به ازای ۱- و ۱ تعریف نمی شود.

۶ حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

الف) با توجه به این که می دانیم $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=x-1$ ، عبارت $x-1$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1+2(\sqrt{x}-1)+3}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$$

ب) با توجه به این که می دانیم $(x-1)(x+1)=x^2-1$ ، عبارت $(x^2-1)(x^2+1)$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+1)+(x-1)(x^2+1)-(x^2+1)+(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{x^3+x+\cancel{x^2}+\cancel{1}+x^3+x-\cancel{x^2}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-1+\cancel{x^2}-1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{2x^3+2x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

مثال

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{((\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1)}+\frac{1}{x-1}=\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}+1}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3-1^3}+\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{((\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}+1)+(x+1)}{(x^2-1)}=\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+x+2}{x^2-1}$$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

ب) $\frac{x^3-1}{(x-1)^3}=\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{(x-1)^{\cancel{3}\,2}}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

الف) $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}=\frac{\cancel{(x^2+1)}(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^{\cancel{2}}}=\frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$

پ) $\frac{x^2+1}{x^4-1}=\frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}=\frac{1}{x^2-1}$

ت) $\frac{y^7-y}{y^3+y^2+y}=\frac{\cancel{y}(y^6-1)}{\cancel{y}(y^2+y+1)}=\frac{(y^3-1)(y^3+1)}{y^2+y+1}=\frac{(y-1)\cancel{(y^2+y+1)}(y^3+1)}{\cancel{y^2+y+1}}=(y-1)(y^3+1)$

ث) $\frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y}=\frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)}=\frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)}=\frac{\cancel{y}(y-2)\cancel{(y+2)}(y^2+3)}{8\cancel{y}\cancel{(y+2)}}=\frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$

۲ در اتحاد $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$ قرار دهید $a=\sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2})^3+1=(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1)$$

$$x^2+1=(\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1)$$

۳ **گویا کردن مخرج‌های گنگ** : صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارت‌هایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}=\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1}{(\sqrt[3]{x^2}+1)((\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}+1)}=\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

تمرین

۱ هر یک از عبارت‌ها را تا حد ممکن (به‌عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^6-y^6=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

ب) $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

پ) x^2+y^2 تجزیه پذیر نیست

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{x-8}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}-\frac{5x}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}+\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}-\frac{5x}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}$

۳ بعضی از ضرب‌های عددی را با استفاده از اتحادها می‌توان به‌صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب‌ها را ذهنی انجام دهید.

الف) $16\times14=(15+1)(15-1)=15^2-1=224$

ب) $105^2=(100+5)^2=100^2+2\times100\times5+5^2=10000+1000+25=11025$

پ) $1007^2=(1000+7)^2=1000^2+2\times1000\times7+7^2=1000000+14000+49=1014049$

ت) $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2=10000-200+1=9801$

۴ کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$

ابتدا تک تک کسرها را گویا کرده سپس جایگزین می کنیم :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}\times\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}=\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}\times\frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[8]{x}+1}=\frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1}\times\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}=\frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$\Longrightarrow$ عبارت $=\frac{1+(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

۵ عبارت $a^6-2b^6+2a^3b^3$ را تجزیه کنید با اجازه ی مولف سوال را به شکل زیر اصلاح کرده و تجزیه می کنم:

$$a^6-3b^6+2a^3b^3=\underline{a^6-a^3b^3}+\underline{3a^3b^3-3b^6}=a^3(a^3-b^3)+3b^3(a^3-b^3)=(a^3-b^3)(a^3+3b^3)$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3+3b^3)$$

خواندنی

❋ سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$5^2=4^2+3^2$

یک سه تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این‌گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

❋ (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد :

$(1/01)^{365}=37/8$

$(0/99)^{365}=0/03$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/01)^{730}$ و $(0/99)^{730}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

❋ (مثلث خیام)

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

ضرایب موجود در بسط $(a+b)^n$ همان اعداد داده شده در سطر $n+1$ مثلث خیام است.

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$

$$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۴

معادله‌ها و نامعادله‌ها


سد دز، خوزستان

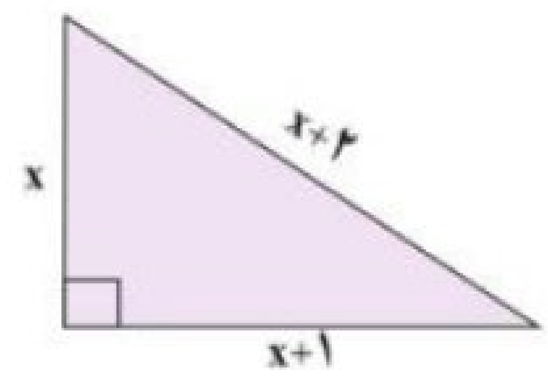
سدهای قوسی، سازه‌هایی هستند که هزینهٔ ساخت بسیار بالایی دارند. کاهش هزینه‌ها معمولاً با بهینه‌سازی‌هایی روی منحنی‌هایی انجام می‌شود که سهمی یکی از معروف‌ترین آنهاست.

درس اوّل: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئلهٔ هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئلهٔ او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟).

زیرا رابطه فیثاغورس در مورد آن صدق می کند: $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$

از خواهر بزرگ‌تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویهٔ دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x، یعنی x+۱ و x+۲ در نظر گرفت و به کمک رابطهٔ فیثاغورس، رابطهٔ زیر را بین سه ضلع مثلث به‌دست آورد :



$$x^۲ + (x+۱)^۲ = (x+۲)^۲$$

اکنون او می‌خواست معادلهٔ به‌دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این کار معادلهٔ بالا را ساده کرد و آن را به شکل $x^۲-۲x-۳=۰$ نوشت.

هر معادله به این صورت را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم می نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \quad , \quad (a \neq ۰)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می نامیم.

در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

می‌دانیم که تجزیهٔ یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل‌ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از :

۱) فاکتورگیری :
$ax^2 + bx = x(ax + b)$

۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج :
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:
$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، درنظر بگیرید.

۱ با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$$(x+1)(x-3)=0$$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی :

$AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$

۲ از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x+1=0$ یا $x-3=0 \Rightarrow x=-1$ یا $x=3$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$x=3$	$x=-1$
$x^2-2x-3=0$	$x^2-2x-3=0$
$3^2-2(3)-3 \overset{?}{=} 0$	$(-1)^2-2(-1)-3 \overset{?}{=} 0$
$9-6-3 \overset{?}{=} 0$	$1+2-3 \overset{?}{=} 0$
$0=0$ ✓	$0=0$ ✓

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً دربارهٔ آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

خیر - اضلاع مثلث نمی توانند مقدار منفی داشته باشند پس فقط جواب $x=3$ قابل قبول است.

کار در کلاس

معادله‌های درجهٔ دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^2-3x=10$

$$x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x^2-3x=10 \xrightarrow{x=5} 5^2-15=10 \Rightarrow 25-15=10 \Rightarrow 10=10 ✓$$

$$x^2-3x=10 \xrightarrow{x=-2} (-2)^2-3(-2)=10 \Rightarrow 4+6=10 \Rightarrow 10=10 ✓$$

ب) $3t^2-t=0$

$$3t^2-t=0 \Rightarrow t(3t-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3t^2-t=0 \xrightarrow{t=0} 3(0)^2-0=0 \Rightarrow 0=0 ✓$$

$$3t^2-t=0 \xrightarrow{t=\frac{1}{3}} 3(\tfrac{1}{3})^2-\tfrac{1}{3}=0 \Rightarrow \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}=0 \Rightarrow 0=0 ✓$$

حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^۲=۲۵$ را درنظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به‌دست آورید. $x^۲-۲۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=-۵ \end{cases}$

۲ از دو طرف معادلهٔ $x^۲= ۲۵$، ریشه‌های دوم را محاسبه می‌کنیم و این معادله را به شکل $x = \pm ۵$ می‌نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به‌دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

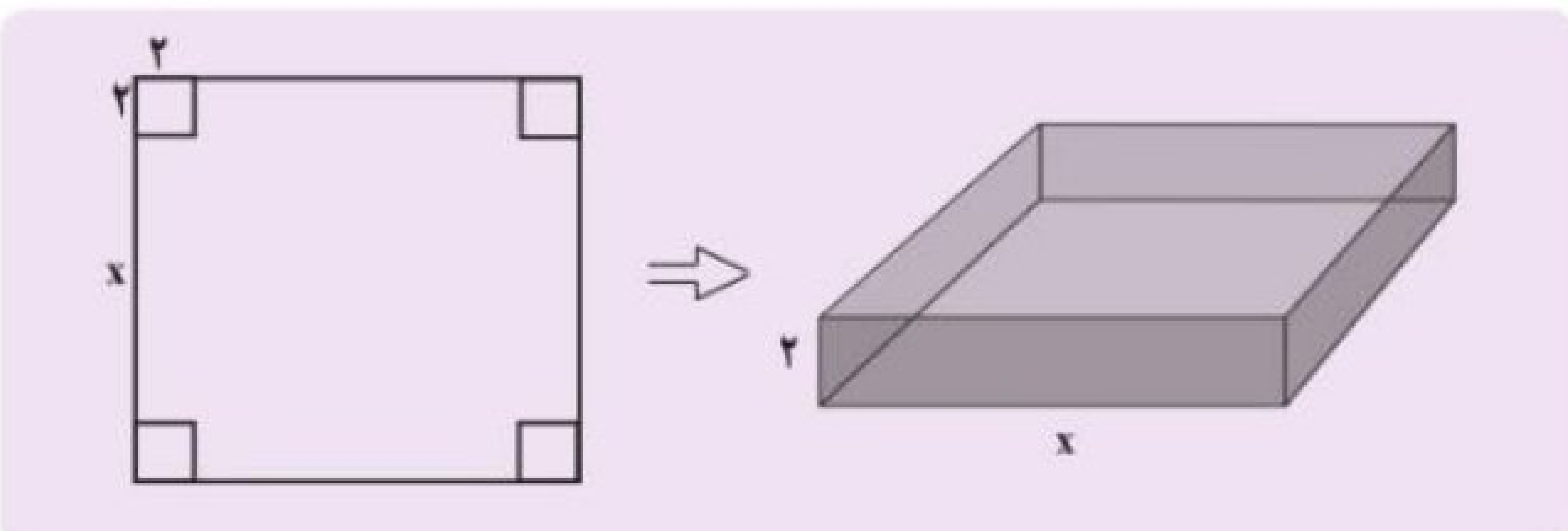
۳ اگر $x^۲= a$ یک معادلهٔ درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به‌صورت $x = \pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی(بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲= a$ عبارت‌اند از :

$x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحهٔ مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل : از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به‌دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$طول \times عرض \times ارتفاع = (x)\,(x)\,(۲) = ۲x^۲$$

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باید باشد، داریم: $۲x^۲=۲۰۰$. بنابراین $x^۲=۱۰۰$ و با محاسبهٔ ریشه های دوم این معادله، جواب‌های $x=\pm۱۰$ به‌دست می‌آید.
و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها $x=۱۰$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $x+۴=۱۰+۴=۱۴$ سانتی‌متر است.

کار در کلاس

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $۵x^۲=۲۰$

$\xrightarrow{\div ۵} x^۲=۴$

$\Rightarrow x=\pm۲$

ب) $t^۲+۷=۰$

$\Rightarrow t^۲=-۷$

که این غیر ممکن است و معادله جواب ندارد.

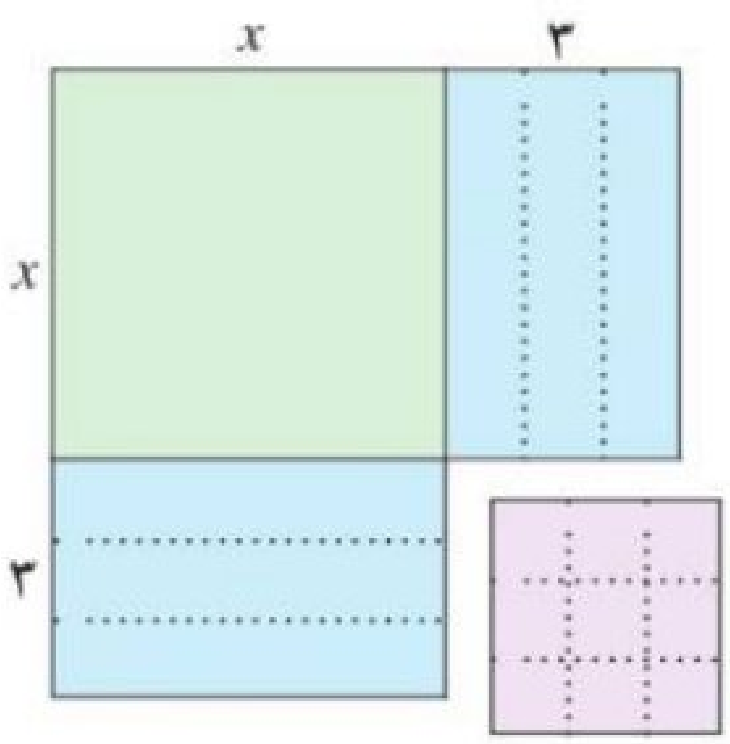
پ) $(r-۲)^۲=۱۶$

$\Rightarrow r-۲=\pm۴$

$\Rightarrow \begin{cases} r-۲=۴ \Rightarrow r=۶ \\ r-۲=-۴ \Rightarrow r=-۲ \end{cases}$

حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت

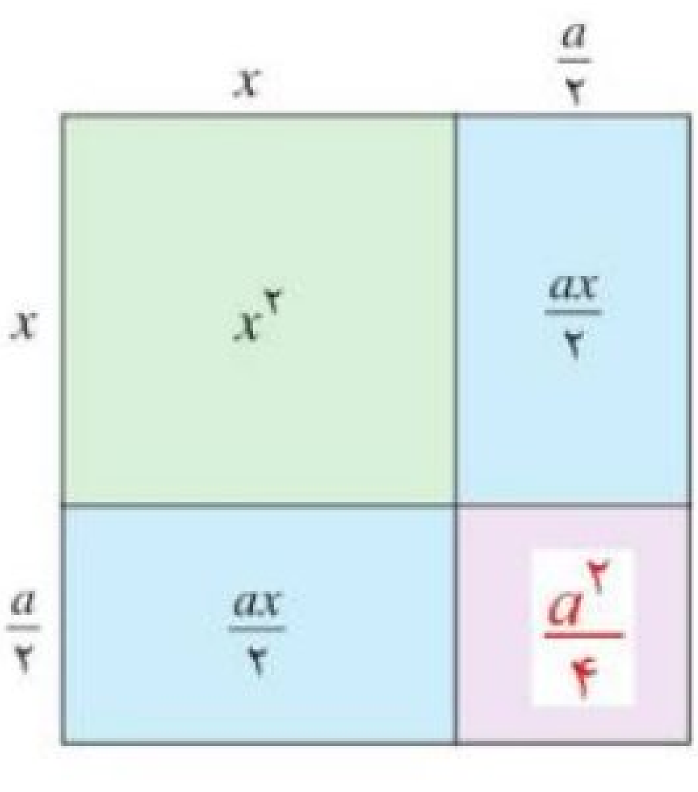


۱ دو جمله‌ای $x^۲+۶x$ را درنظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چند جمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^۲+۶x+۹=(x+۳)^۲$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید، چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟

قطعه ی جدا شده در شکل ۹ قسمت دارد یعنی مربع ۳، و در تساوی فوق ۳ را درون پرانتز و مربع آن یعنی ۹ را در سمت چپ نوشته ایم.



۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای $x^۲+ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}=(x+\frac{a}{۲})^۲$$

مثال

معادلهٔ $x^۲-۶x+۴=۰$ را به روش مربع کامل حل می کنیم.

معادلهٔ درجه دوم	$x^۲-۶x+۴=۰$
به دو طرف معادله، ۴- را اضافه کرده‌ایم	$x^۲-۶x=-۴$
به دو طرف معادله ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود	$x^۲-۶x+۹=-۴+۹$
سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم	$(x-۳)^۲=۵$
از دوطرف معادله، ریشهٔ دوم می‌گیریم	$x-۳=\pm\sqrt{۵}$
به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده‌ایم	$x=۳\pm\sqrt{۵}$

بنابراین جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از $۳+\sqrt{۵}$ و $۳-\sqrt{۵}$.

کار در کلاس

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^۲+۲x=۲۴$

$x^۲+۲x+۱=۲۵$

$\Rightarrow (x+۱)^۲=۲۵$

$\Rightarrow x+۱=\pm ۵$

$\Rightarrow x=۴ \quad , \quad x=-۶$

ب) $t^۲+۳t=۳$

$t^۲+۳t+\frac{۹}{۴}=۳+\frac{۹}{۴}$

$\Rightarrow (t+\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۲۱}{۴}$

$\Rightarrow t+\frac{۳}{۲}=\pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$

$\Rightarrow x=\frac{-۳+\sqrt{۲۱}}{۲}$

$, \quad x=\frac{-۳-\sqrt{۲۱}}{۲}$

پ) $n^۲-۴n+۵=۰$

$n^۲-۴n=-۵$

$\Rightarrow n^۲-۴n+۴=-۵+۴$

$\Rightarrow (n-۲)^۲=-۱$

$\Rightarrow$ غیر ممکن است

معادله جواب حقیقی ندارد

ت) $۲r^۲+r-۲=۰$

$۲r^۲+r=۲$

$\xrightarrow{\div ۲} r^۲+\frac{۱}{۲}r=۱$

$\Rightarrow r^۲+\frac{۱}{۲}r+\frac{۱}{۱۶}=۱+\frac{۱}{۱۶}$

$\Rightarrow (r+\frac{۱}{۴})^۲=\frac{۱۷}{۱۶}$

$\Rightarrow r+\frac{۱}{۴}=\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$

$\Rightarrow r=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۴}$

حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش فرمول کلی

فعالیت

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن $a\neq ۰$ است، پیدا کنیم.

دانش‌آموز: آیا با روش مربع کامل می توان هر معادلهٔ درجه دوم را حل کرد؟

معلم: بله. برای حل معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ با این روش مراحل زیر را انجام می دهیم:

$$ax^۲+bx+c=۰$$

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$$ دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$$x^۲+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$ به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده‌ایم

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=-\frac{c}{a}+\frac{b^۲}{۴a^۲}$$ به دو طرف معادله، $\frac{b^۲}{۴a^۲}$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$$(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$$ دو طرف را ساده کرده‌ایم

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta=b^۲-۴ac$؛ پس: $(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{\Delta}{۴a^۲}$.

آیا می‌توانید با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به‌دست آورید؟

دانش‌آموز: اگر $\Delta<۰$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشهٔ دوم گرفت.

معلم: آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta>۰$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به‌دست آورید؟

دانش‌آموز: بله. کافی است از دو طرف معادلهٔ $(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{\Delta}{۴a^۲}$ ریشهٔ دوم بگیریم:

$$x+\frac{b}{۲a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

دانش‌آموز : اگر $\Delta = 0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟

معلم : بله و این ریشه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad (x+\frac{b}{2a})^2=0 \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

دانش‌آموز : پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.

معلم : این ریشه از معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=(x+\frac{b}{2a})(x+\frac{b}{2a})=0$ به‌دست آمده است و چون هر دو معادلهٔ $x+\frac{b}{2a}=0$ و $x+\frac{b}{2a}=0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشهٔ مضاعف یا ریشه مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم.

کار در کلاس

۱) با توجّه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow$ $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta > 0$: معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد : $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = ...$: معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد : $x=-\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$: معادله جواب حقیقی ندارد

شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

۲) معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2-x+1=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3 \Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

ب) $-2x^2+x+3=0$

$\Delta=1^2-4(-2)\times3=25 \Rightarrow x=\frac{-1\pm5}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-1 \end{cases}$

پ) $-x^2+4x-4=0$

$\Delta=16-16=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm0}{-2}=2$

مثال

از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰ متر است، پس $۲(s+t)=۵۰$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t=۲۵$ می رسیم؛ بنابراین $t=۲۵-s$.

از سوی دیگر $st=۱۴۴$. با جای‌گذاری t برحسب s در این معادله به شکل $s(۲۵-s)=۱۴۴$ می رسیم که بعد از ساده شدن، معادلهٔ درجه دوم $s^۲-۲۵s+۱۴۴=۰$ به‌دست می‌آید.

در این معادله $a=۱\ ,\ b=-۲۵\ ,\ c=۱۴۴$ ؛ بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۵)^۲-۴(۱)(۱۴۴)=۶۲۵-۵۷۶=۴۹$$

پس $\Delta>۰$ و معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_۱=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۲۵+۷}{۲}=\dfrac{۳۲}{۲}=۱۶ \\ s_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۲۵-۷}{۲}=\dfrac{۱۸}{۲}=۹ \end{cases}$$

و چون $t=۲۵-s$، پس برای t نیز دو جواب به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_۱=۱۶\Rightarrow t_۱=۲۵-۱۶=۹ \\ s_۲=۹\Rightarrow t_۲=۲۵-۹=۱۶ \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی‌متر به‌دست می‌آید.

تمرین

۱ معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^۲-۱۱x=-۱۰\Rightarrow x^۲-۱۱x+۱۰=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۱۰)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۱۰\end{cases}$

۲) $۵t^۲=۲۰\Rightarrow ۵t^۲-۲۰=۰\Rightarrow ۵(t-۲)(t+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t-۲=۰\Rightarrow t=۲\\t+۲=۰\Rightarrow t=-۲\end{cases}$

۳) $۵a^۲-۷a=۲a(a-۳)\Rightarrow ۵a^۲-۷a=۲a^۲-۶a\Rightarrow ۳a^۲-a=۰\Rightarrow a(۳a-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\۳a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}\end{cases}$

۴) $۴k^۲-۱۲k+۸=۰\Rightarrow ۴(k-۱)(k-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}k-۱=۰\Rightarrow k=۱\\k-۲=۰\Rightarrow k=۲\end{cases}$

۲ هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^۲-۲=۲۶\Rightarrow n^۲=۲۸\Rightarrow n=\pm\sqrt{۲۸}=\pm۲\sqrt{۷}$

۲) $x^۲+۱۲=۳\Rightarrow x^۲=-۹\Rightarrow$ غیر ممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $(۳t-۲)^۲=۴\Rightarrow ۳t-۲=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}۳t-۲=۲\Rightarrow t=\frac{۴}{۳}\\۳t-۲=-۲\Rightarrow t=۰\end{cases}$

۴) $۳-۳k=۳k(۲k-۱)\Rightarrow ۳-۳k=۶k^۲-۳k\Rightarrow ۳=۶k^۲$
$\Rightarrow k^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow k=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^۲-۶x=۷$

$x^۲-۶x+۹=۷+۹$

$\Rightarrow(x-۳)^۲=۱۶$

$\Rightarrow x-۳=\pm۴$

$\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۴\Rightarrow x=۷\\x-۳=-۴\Rightarrow x=-۱\end{cases}$

۲) $s^۲-۳s+۳=۰$

$s^۲-۳s=-۳$

$\Rightarrow s^۲-۳s+\frac{۹}{۴}=-۳+\frac{۹}{۴}$

$\Rightarrow(s-\frac{۳}{۲})^۲=-\frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow$ غیر ممکن است

$\Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $r^۲+۴r+۴=۰$

$\Rightarrow(r+۲)^۲=۰$

$\Rightarrow r+۲=۰$

$\Rightarrow r=-۲$

۴) $۲a^۲+۵a-۳=۰$

$\xrightarrow{\div۲}a^۲+\frac{۵}{۲}a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a^۲+\frac{۵}{۲}a+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶}$

$\Rightarrow(a+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۴۹}{۱۶}\Rightarrow a+\frac{۵}{۴}=\pm\frac{۷}{۴}$

$\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\a+\frac{۵}{۴}=-\frac{۷}{۴}\Rightarrow a=-۳\end{cases}$

۴ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $۴x^۲-۱۳x+۳=۰ \xrightarrow{\Delta=۱۶۹-۴۸=۱۲۱} x=\frac{۱۳\pm۱۱}{۸} \Rightarrow x=۳ , x=\frac{۱}{۴}$

۲) $r-r^۲=۳ \Rightarrow r^۲-r+۳=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۱۲=-۱۱$ معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $a^۲+۲\sqrt{۳}a=۹ \Rightarrow a^۲+۲\sqrt{۳}a-۹=۰ \xrightarrow{\Delta=۴۸} a=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm\sqrt{۴۸}}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm۴\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{۳} \\ a=-۳\sqrt{۳} \end{cases}$

۴) $\frac{t^۲}{۳}-\frac{t}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\times۶} ۲t^۲-۳t-۹=۰ \xrightarrow{\Delta=۸۱} t=\frac{۳\pm۹}{۴} \Rightarrow t=۳ \ ، \ t=\frac{-۳}{۲}$

۵ هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $۲x^۲=۲۵۰ \xrightarrow{\div۲} x^۲=۱۲۵ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۲۵}=\pm۵\sqrt{۵}$

۲) $۹-۶z+z^۲=۰ \Rightarrow (z-۳)^۲=۰ \Rightarrow z-۳=۰ \Rightarrow z=۳$

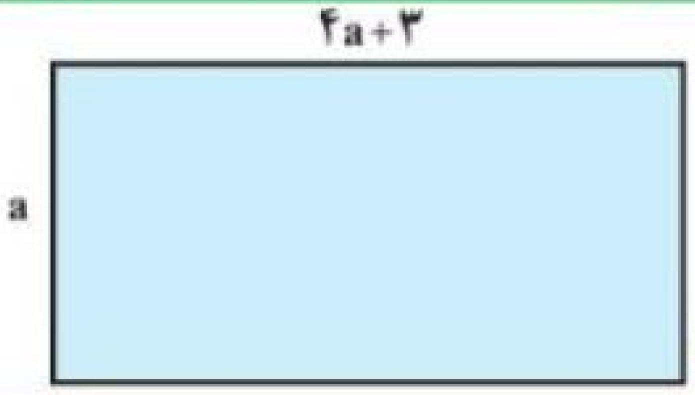
۳) $۴a^۲+۳a=۱ \Rightarrow ۴a^۲+۳a-۱=۰ \xrightarrow{\Delta=۲۵} a=\frac{-۳\pm۵}{۸} \Rightarrow a=\frac{۱}{۴} \ ، \ a=-۱$

۴) $b^۲+\sqrt{۲}b-۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۱۸} b=\frac{-\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۸}}{۲}=\frac{-\sqrt{۲}\pm۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow b=\sqrt{۲} \ ، \ b=-۲\sqrt{۲}$

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید. گیریم آن دو عدد k و $k+۲$ باشند، بنابراین:

$k^۲+(k+۲)^۲=۲۹۰ \Rightarrow k^۲+k^۲+۴k+۴=۲۹۰ \Rightarrow ۲k^۲+۲k-۲۸۶=۰ \xrightarrow{\div۲} k^۲+k-۱۴۳=۰ \Rightarrow (k+۱۳)(k-۱۱)=۰ \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} k=-۱۳ \Rightarrow \text{آن دو عدد فرد عبارتند از ۱۳- و ۱۱-} \\ k=۱۱ \Rightarrow \text{آن دو عدد فرد عبارتند از ۱۱ و ۱۳} \end{cases}$



۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$S=a(۴a+۳)=۴۵ \Rightarrow ۴a^۲+۳a-۴۵=۰ \xrightarrow{\Delta=۷۲۹} a=\frac{-۳\pm۲۷}{۸} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۱۵}{۴} \ \text{غیر قابل قبول} \\ a=۳ \Rightarrow \text{عرض مستطیل ۳ و طول آن ۱۵ است} \end{cases}$

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

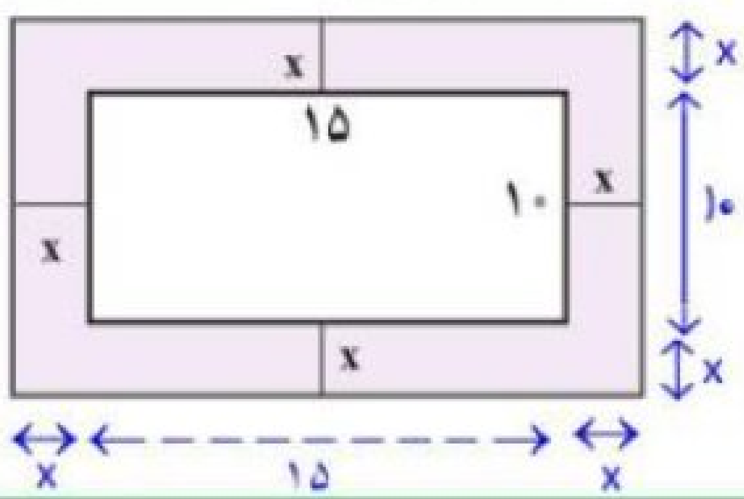
سن برادر کوچک $= x \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} =x+۴$

سن برادر بزرگ $= x+۴ \longrightarrow =x+۸$

$\Rightarrow (x+۴)(x+۸)=۶۰ \Rightarrow x^۲+۱۲x+۳۲=۶۰ \Rightarrow x^۲+۱۲x-۲۸=۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱۴)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-۱۴ \ \text{غیر قابل قبول چون سن منفی نداریم} \\ x=۲ \Rightarrow \text{برادر کوچک ۲ ساله و برادر بزرگ ۶ ساله اند.} \end{cases}$

۹ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید. طبق شکل، طول مستطیل $۲x+۱۵$ و عرض آن $۲x+۱۰$ است. بنابراین طبق فرمول مساحت:



$(۲x+۱۰)(۲x+۱۵)=۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲+۵۰x+۱۵۰=۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲+۵۰x-۱۵۰=۰ \xrightarrow{\div۲} ۲x^۲+۲۵x-۷۵=۰$

$\xrightarrow{\Delta=۱۲۲۵} x=\frac{-۲۵\pm۳۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱۵ \ \text{غیر قابل قبول} \\ x=\frac{۵}{۲} \Rightarrow \text{طول قاب عکس برابر ۲۰ و عرض آن برابر ۱۵ می باشد.} \end{cases}$

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید.

اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

اگر تعداد تیم ها n، هر تیم با $n-۱$ تیم بازی دارد. پس با توجه به اینکه بین هر دو تیم تنها یک بازی صورت میگیرد و اصطلاحاً رفت و برگشتی نیست، تعداد کل بازی ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. بنابراین:

$\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵ \Rightarrow n^۲-n=۹۰ \Rightarrow n^۲-n-۹۰=۰ \Rightarrow (n-۱۰)(n+۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=-۹ \ \text{غیر قابل قبول} \\ n=۱۰ \ \text{تیمگان مورد نظر دارای ۱۰ تیم است} \end{cases}$

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر[۱]، که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطهٔ $P=۰/۰۰۶s^۲-۰/۰۲s+۱۲۰$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

$p=۱۲۵ \Rightarrow ۰/۰۰۶S^۲-۰/۰۲S+۱۲۰=۱۲۵ \Rightarrow ۰/۰۰۶S^۲-۰/۰۲S-۵=۰ \xrightarrow{\Delta=۰/۱۲۰۴} S=\frac{۰/۰۲\pm۰/۳۴۶۹}{۰/۰۱۲}$

$\Rightarrow \begin{cases} S=۳۰/۵۷۵ \ \text{شخص مورد نظر تقریباً ۳۰ سال و ۲۰۷ روز سن داشته است.} \\ S=-۲۷/۲۴۱ \ \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$

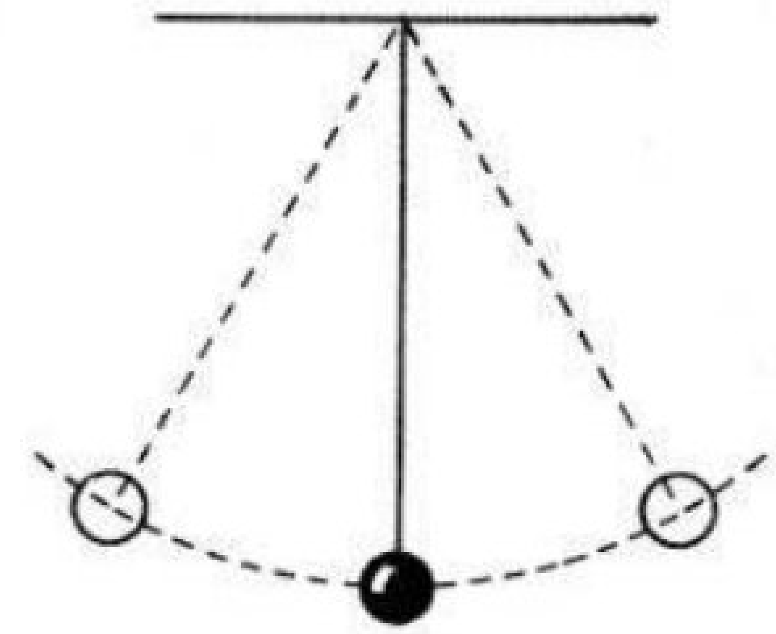
توجه: قرار داد کرده ایم که S بر حسب سال است.

۱ــ منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: سهمی

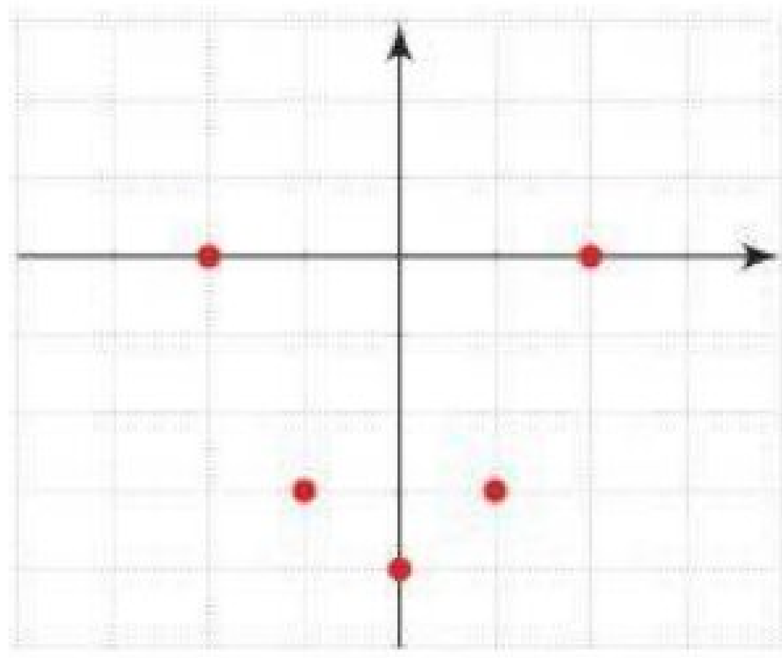
آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقهٔ پرش ارتفاع یا یک گوی آونگ طی می‌کند، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.
مسیر طی شده توسط اسکی باز یا گوی آونگ می‌تواند توسط معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ محاسبه شود که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a\neq ۰$ است.



فعالیت

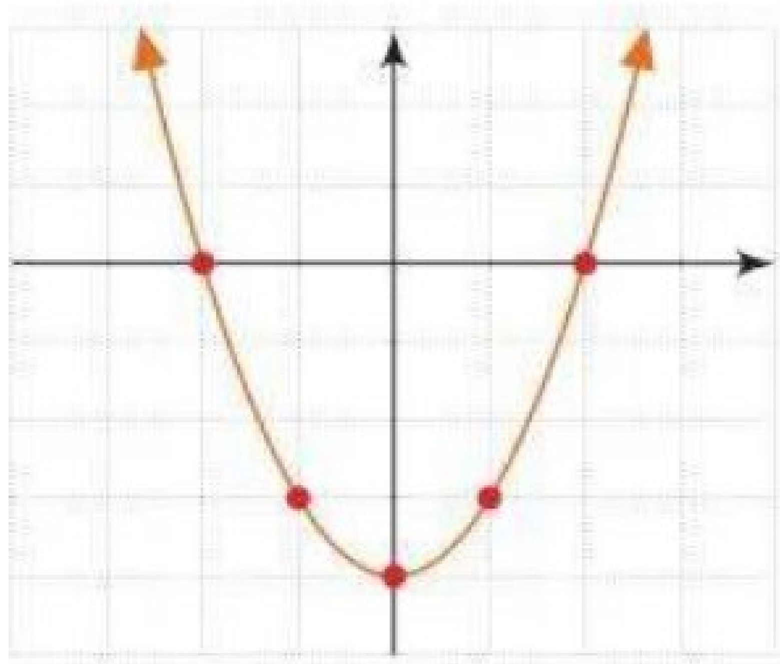
معادلهٔ $y=x^{۲}-۴$ را درنظر بگیرید.
الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

x	$y=x^{۲}-۴$	(x,y)
−۲	$y=(-۲)^{۲}-۴=۴-۴=۰$	(−۲,۰)
−۱	$y=(-۱)^{۲}-۴=۱-۴=-۳$	(−۱,−۳)
۰	$y=(۰)^{۲}-۴=۰-۴=-۴$	(۰,−۴)
۱	$y=(۱)^{۲}-۴=۱-۴=-۳$	(۱,−۳)
۲	$y=(۲)^{۲}-۴=۴-۴=۰$	(۲,۰)



نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).
ب) پایین‌ترین نقطهٔ این نمودار چه نقطه‌ای است؟ (۰,−۴)

آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟ محور yها محور تقارن این شکل است.



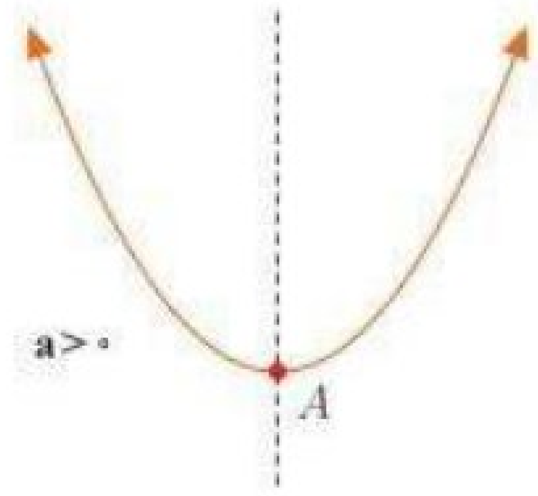
پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ ۵ نقطه

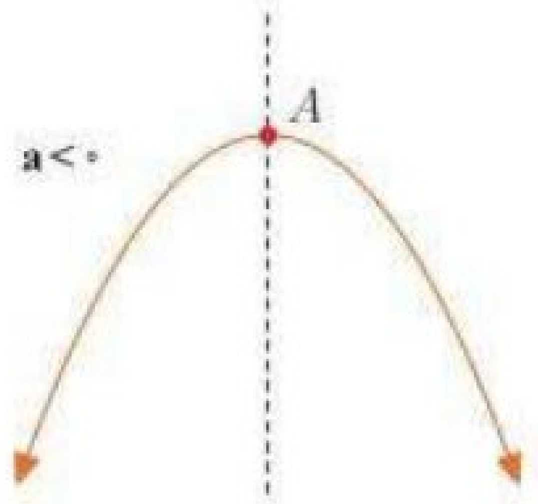
آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟ بله با سه نقطه نیز امکان پذیر است

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور xها در چه نقاطی است؟

طبق شکل در نقاط (۲,۰) و (−۲,۰) منحنی با محور xها برخورد دارد.

نمودار هر معادله به شکل $y = ax^۲ + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq ۰$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است :





محور تقارن

نقطهٔ A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.
اگر $a>۰$ باشد، A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و اگر $a<۰$ باشد، A بالاترین نقطهٔ سهمی است.
همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

فعالیت

معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $y = x^۲ - ۴x + ۵$ است.

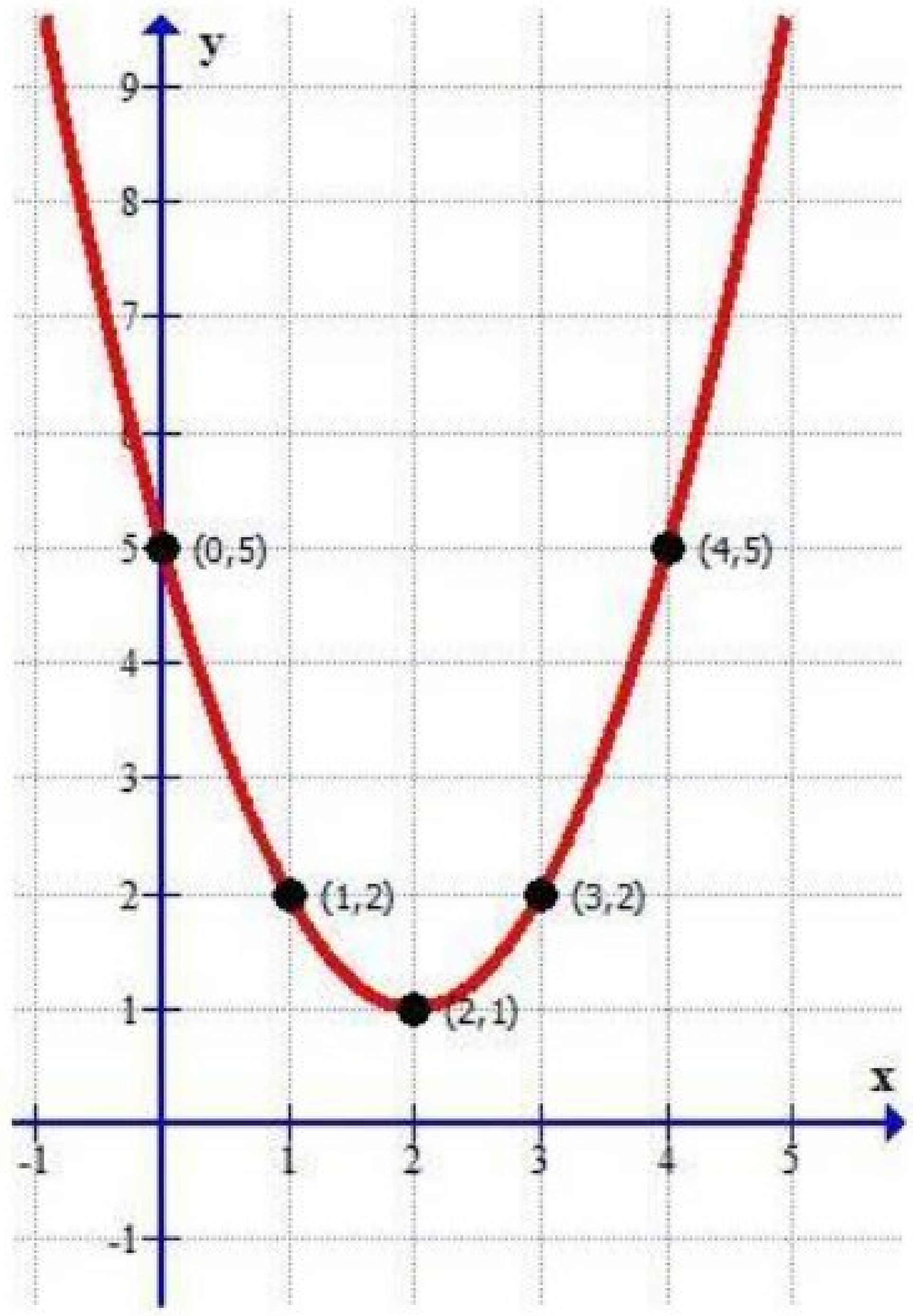
الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$y = x^۲ - ۴x + ۵ \Rightarrow y = (x-۲)^۲ + ۱$

ب ریشهٔ عبارت داخل پرانتز را به‌دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

x	$y=x^۲-۴x+۵$	(x,y)
۰	$y = ۰^۲ - ۴\times۰ + ۵ = ۵$	(۰,۵)
۱	$y = ۱^۲ - ۴\times۱ + ۵ = ۲$	(۱,۲)
۲	$y = ۲^۲ - ۴\times۲ + ۵ = ۱$	(۲,۱)
۳	$y = ۳^۲ - ۴\times۳ + ۵ = ۲$	(۳,۲)
۴	$y = ۴^۲ - ۴\times۴ + ۵ = ۵$	(۴,۵)



پ پنج نقطهٔ حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت آیا می‌توانید پایین ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل $y=(x-۲)^۲+۱$ به‌دست آورید؟

طول این نقطه ریشه عبارت درون پرانتز است یعنی ۲

و عرض آن همان عدد تنهای بیرون پرانتز است یعنی ۱

هر سهمی به‌صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a\neq 0$ است ، رأسی به مختصات (h , k) و خط تقارنی با معادلهٔ $x = h$ دارد .

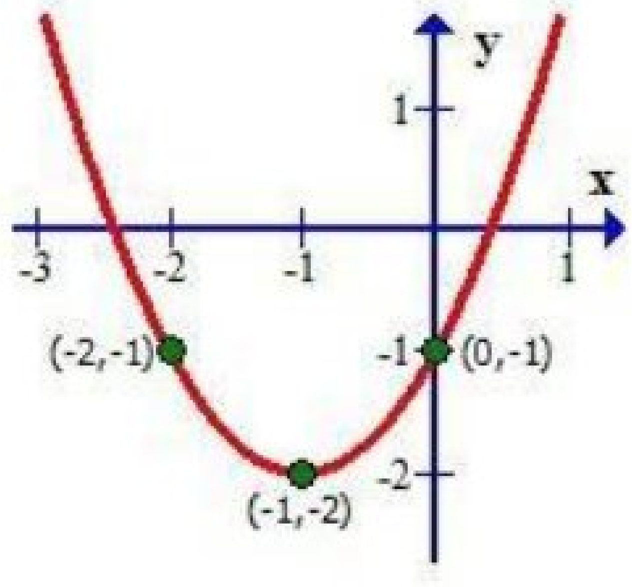
کار در کلاس

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y = (x+1)^2-2$

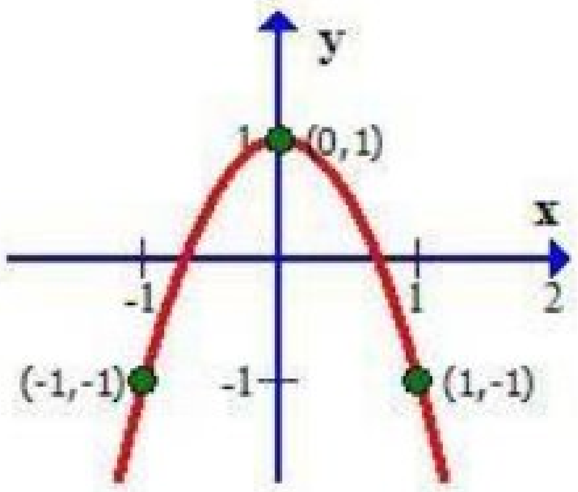
راس سهمی نقطه ی (۲-و۱-) است

x	۲-	۱-	۰
y	۱-	۲-	۱-



ب) $y = -2x^2+1$ راس سهمی نقطه ی(۱و۰) است .

x	y
۱	۱-
۰	۱
۱-	۱-



فعالیت

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید. الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید :

$$y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a\left[(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c\Rightarrow y=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c$$

$$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

ب با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ و خط تقارن آن نیز $x=-\frac{b}{2a}$ است.[1]

$y=a(x-(-\frac{b}{2a}))^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن، $S(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ راس سهمی

مثال

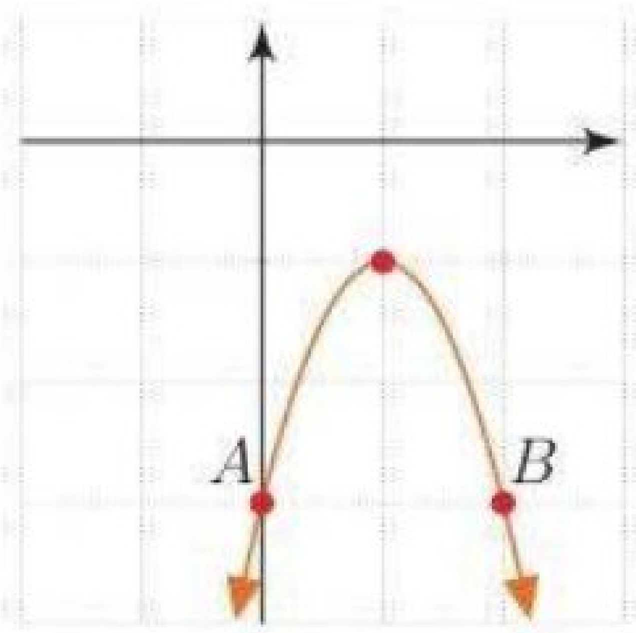
سهمی $y = -2x^2+4x-3$ را رسم می‌کنیم.

در این سهمی $a = -2$، $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم.

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{-4}=1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.

x	$y=-2x^2+4x-3$	(x,y)
۰	$-2(0)^2+4(0)-3=-3$	$(0,-3)$
۱	$-2(1)^2+4(1)-3=-1$	$(1,-1)$
۲	$-2(2)^2+4(2)-3=-3$	$(2,-3)$

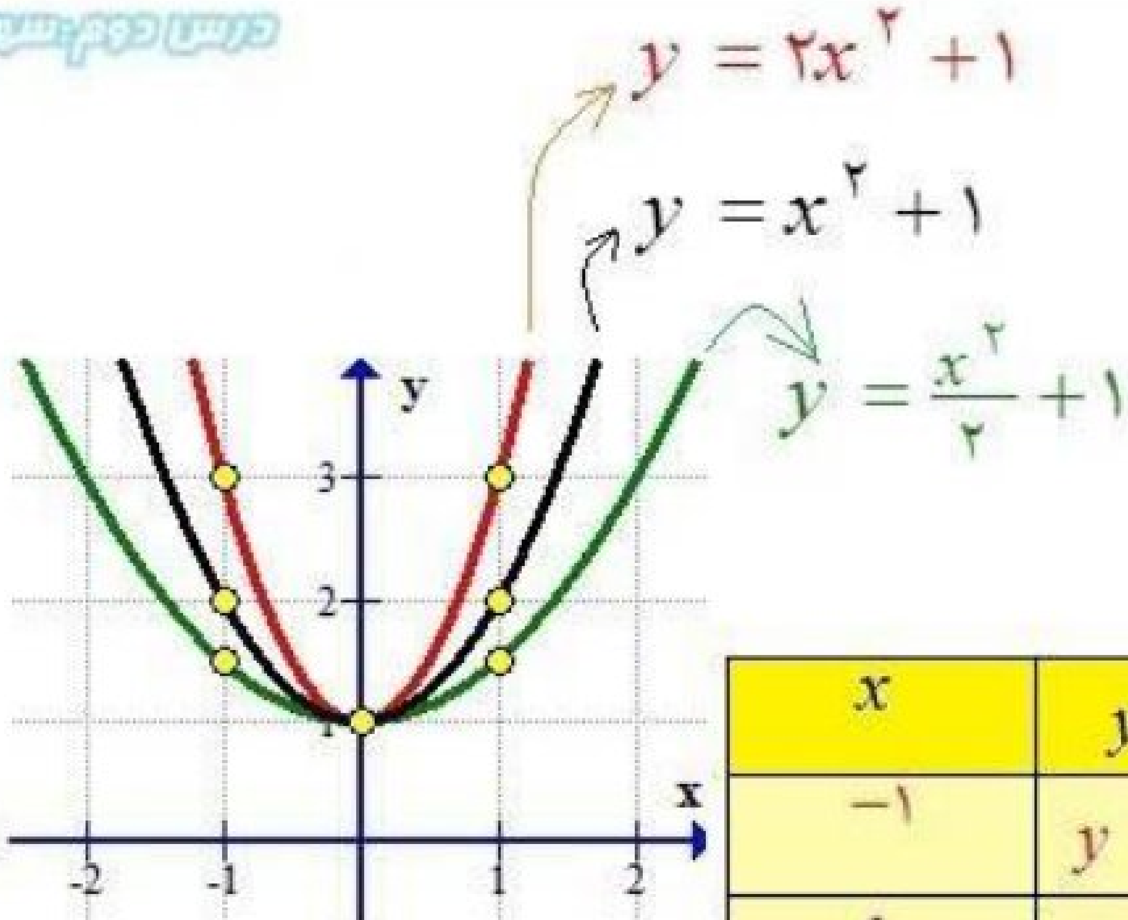


بنابراین نمودار این سهمی به‌صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x=1$ قرینه‌اند.

۱ــ عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac-b^2}{4a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x=-\frac{b}{2a}$ در معادلهٔ سهمی به‌دست آورید.

فعالیت



معادلهٔ دو سهمی به‌صورت $y = \frac{x^2}{2} + 1$ و $y = 2x^2 + 1$ است.

الف مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطهٔ $A(0,1)$ است.

x	$y = \frac{x^2}{2} + 1$	(x, y)
-1	$y = \frac{(-1)^2}{2} + 1$	$(-1, \frac{3}{2})$
0	$y = \frac{(0)^2}{2} + 1$	$(0, 1)$
1	$y = \frac{(1)^2}{2} + 1$	$(1, \frac{3}{2})$

x	$y = 2x^2 + 1$	(x, y)
-1	$y = 2(-1)^2 + 1$	$(-1, 3)$
0	$y = 2(0)^2 + 1$	$(0, 1)$
1	$y = 2(1)^2 + 1$	$(1, 3)$

ب معادلهٔ سهمی دیگری را که نقطهٔ A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

$y = x^2 + 1$

x	-1	0	1
y	2	1	2

پ ضرایب x^2 در معادلات سهمی‌هایی که رسم شده‌اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

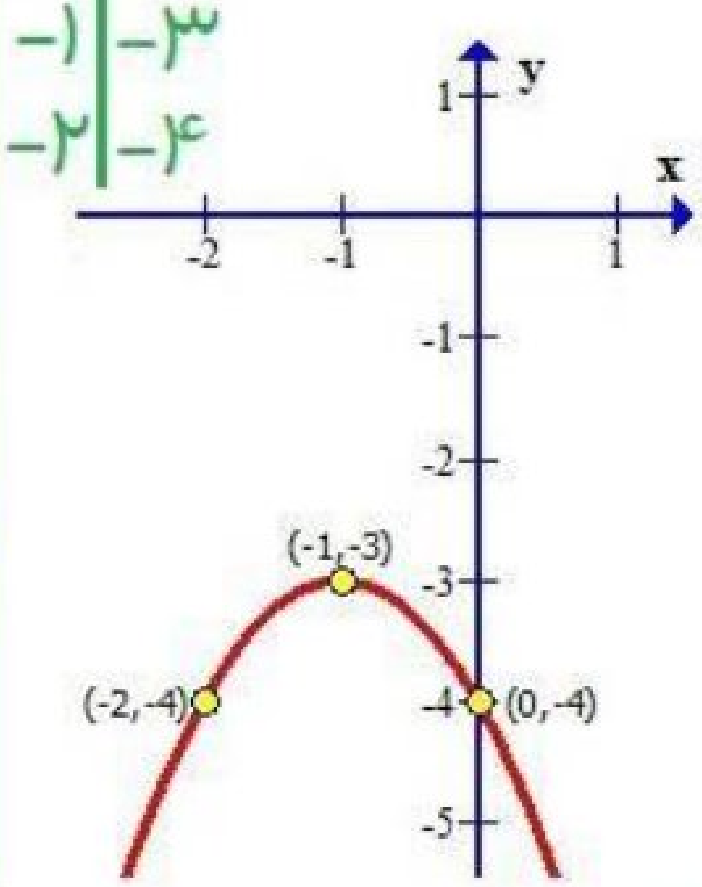
اگر ضریب x^2 مثبت باشد، با زیاد شدن آن دهانه ی سهمی تنگ تر می شود.

تمرین

۱ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

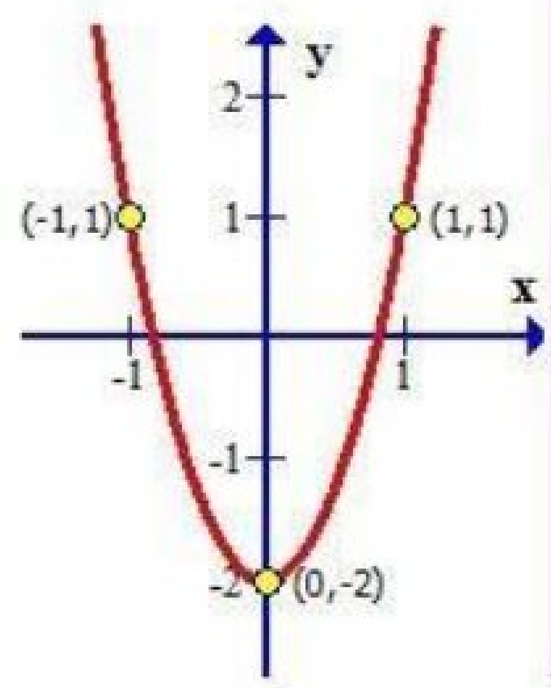
الف) $y = -(x+1)^2 - 3$

x	y
0	-4
-1	-3
-2	-4



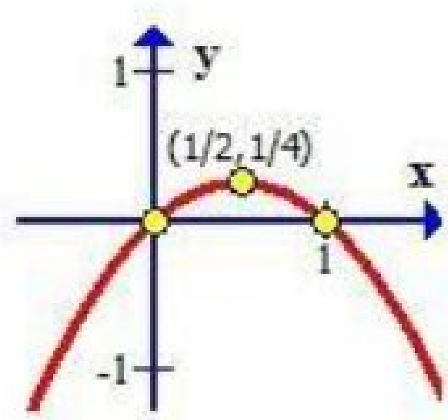
ب) $y = 3x^2 - 2$

x	-1	0	1
y	1	-2	1



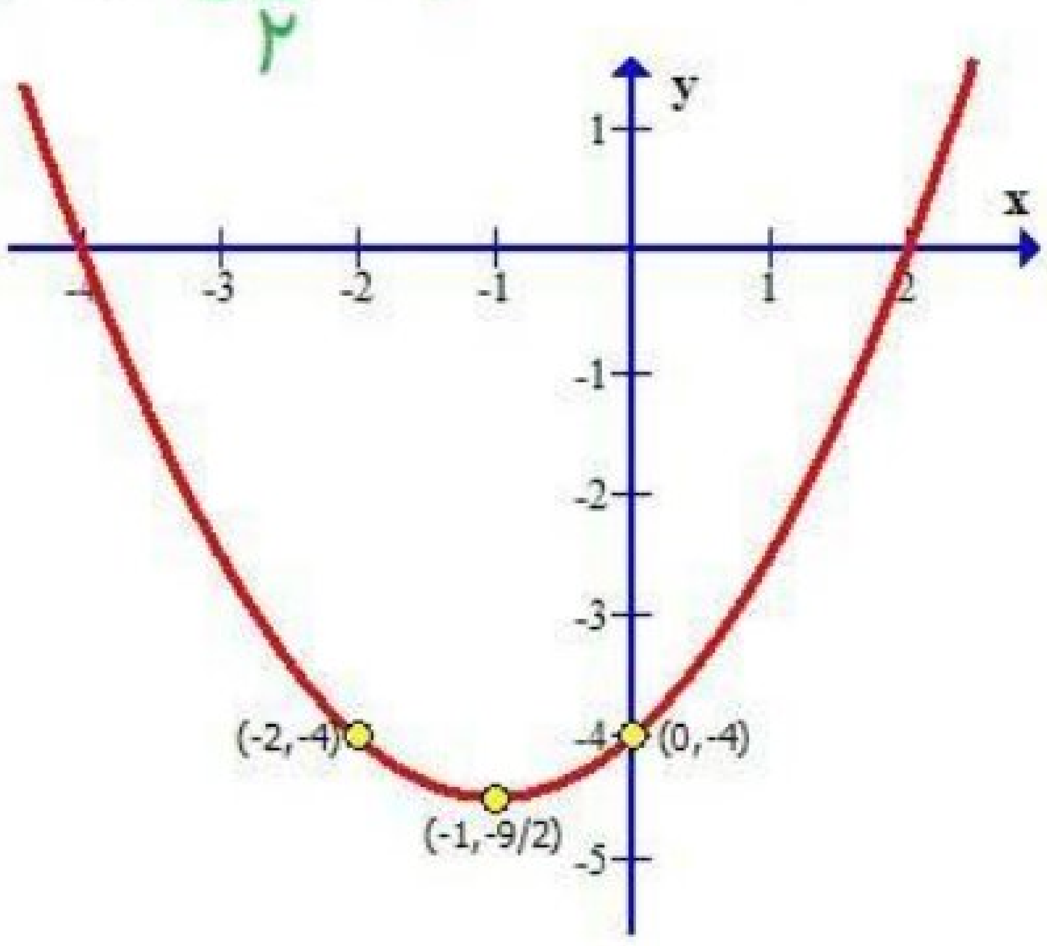
پ) $y = x - x^2$

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	0



ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$

x	-2	-1	0
y	-4	$-\frac{9}{2}$	-4



۲ اگر $(-2,5)$ و $(0,5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به‌دست آورید.

با توجه به اینکه عرض نقاط یکسان است این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی قرینه ی یکدیگرند ، به عبارت دیگر محور تقارن از وسط طول های این دو نقطه می گذرد $x = \frac{-2+0}{2} \Rightarrow x = -1$ معادله خط تقارن

۳ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاط به‌طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

$(0,2) \Rightarrow 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 2}$

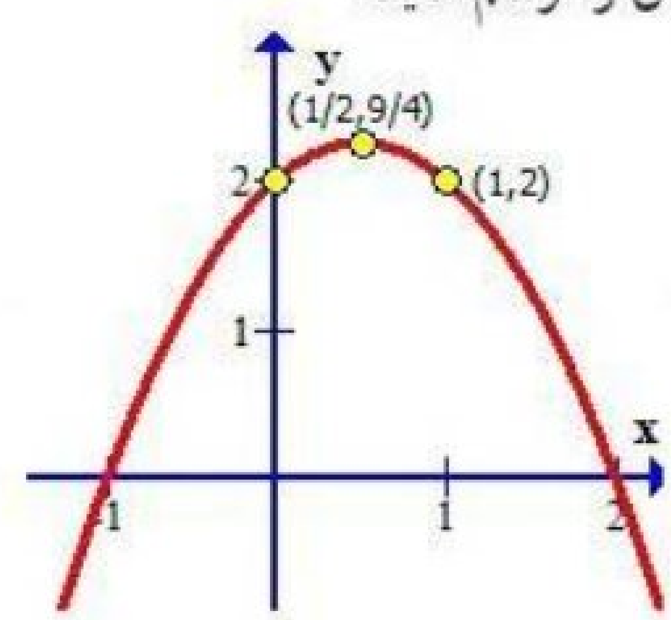
$(-1,0) \Rightarrow 0 = a - b + 2 \Rightarrow a - b = -2$

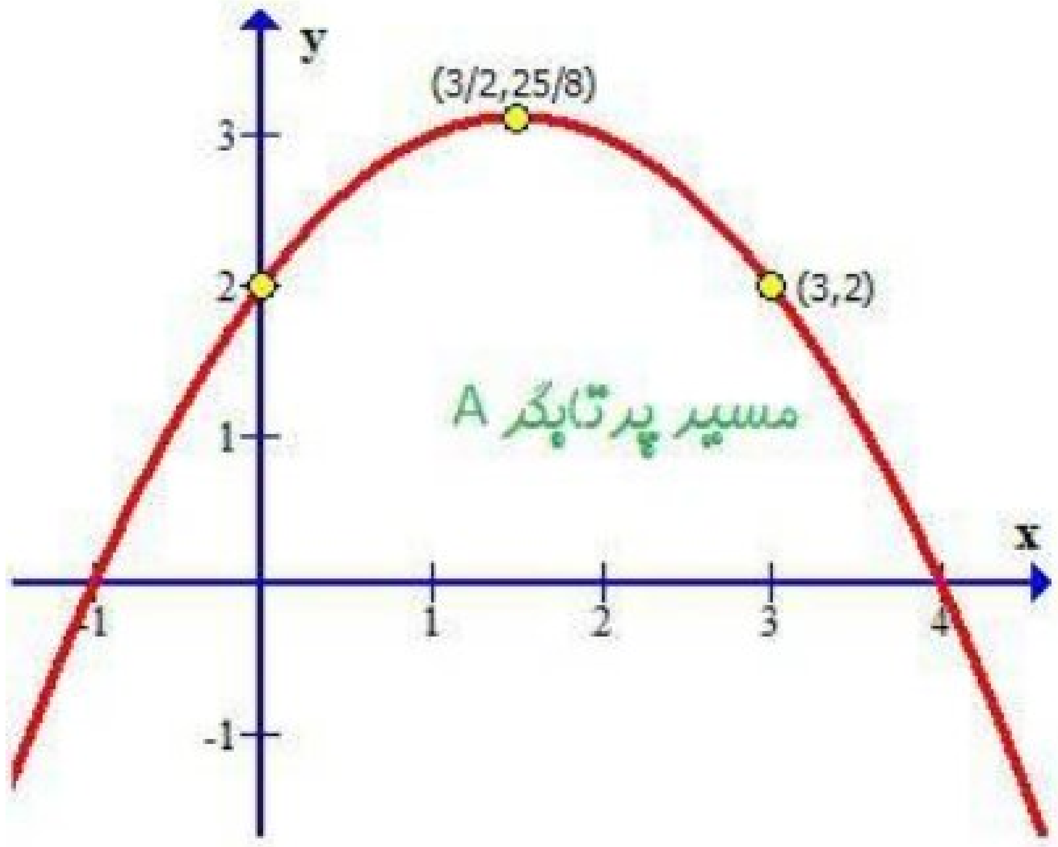
$(2,0) \Rightarrow 0 = 4a + 2b + 2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \cancel{b} = -2 \\ 2a + \cancel{b} = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow -2 + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$\Rightarrow$ معادله سهمی: $y = -x^2 + x + 2$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	2	$\frac{9}{4}$	2



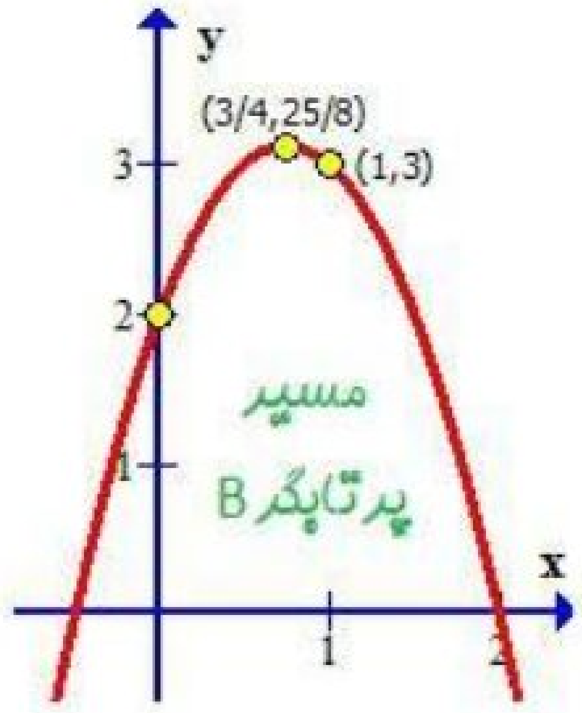


۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -\frac{x^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}x + ۲$ به‌دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -۲x^۲ + ۳x + ۲$ به‌دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها درچه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازهٔ آنها را مشخص کنید.



ب) $-\frac{x^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} -x^۲ + ۳x + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۲۵} x = -۱ , x = ۴$

محل برخورد وزنه A با زمین در نقاط ۱- و ۴ بوده یعنی ۵ متر مسافت پیموده است

$-۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۲۵} x = -\frac{۱}{۲} , x = ۲$

محل برخورد وزنه B با زمین در نقاط $\frac{۱}{۲}$- و ۲ بوده یعنی $\frac{۵}{۲}$ مسافت پیموده است

بنابراین پرتابگر A مسافت بیشتری پیموده است.

پ) میزان ارتفاع، همان عرض نقطه ی راس سهمی است که در این مورد هر دو عرض یکسان است پس ارتفاع یکسانی پیموده شده است.

یعنی ارتفاع پیموده شده ی آنها $\frac{۲۵}{۸}$ است.


طوف سی‌سخت ــ کهگیلویه و بویراحمد

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: تعیین علامت

در یک شرکت تولیدی، سود حاصل از رابطهٔ $P(x) = ۵x - ۲۰۰$ به‌دست می‌آید که در آن x تعداد کالای تولید شده است. جدول زیر، سود این شرکت را به ازای چند مقدار x نشان می‌دهد.

تعداد کالای تولید شده (x)	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰	۱۰۰
سود حاصله $P(x) = ۵x - ۲۰۰$	۱۵۰-	۱۰۰-	۰	۵۰	۳۰۰

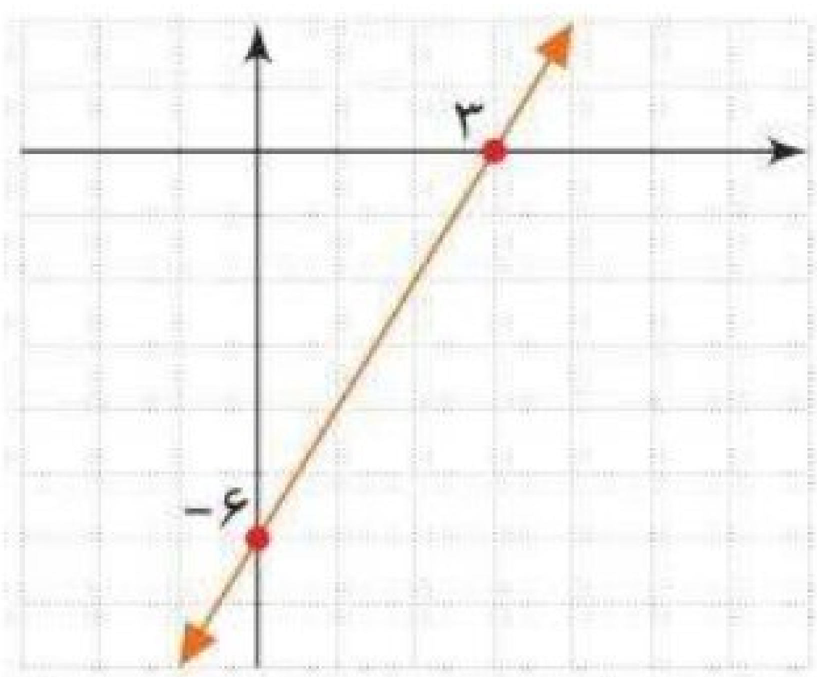
همان‌طور که از این جدول استنباط می‌شود، با تولید ۴۰ کالا، این شرکت هیچ سودی نخواهد داشت و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید شود، شرکت به سوددهی می‌رسد؛ در حالی که با تولید کمتر از این تعدادکالا، این شرکت، سود منفی (زیان) خواهد داشت. علامت $P(x)$ برای xهای مختلف از جدول زیر به‌دست می‌آید.

x	$x < ۴۰$	۴۰	$x > ۴۰$
$P(x)$	−	۰	+

حل بسیاری از مسائل، نیازمند یافتن علامت یک عبارت خاص است که باید آن را تعیین علامت کرد.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ اول

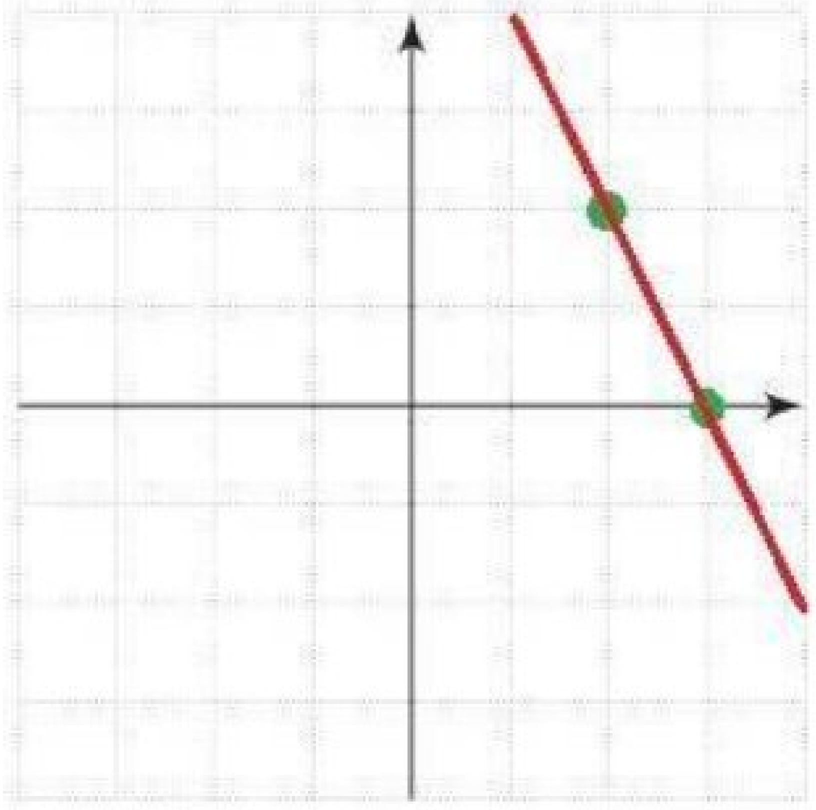
فعالیت



۱ نمودار خط $y = ۲x - ۶$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$y=۲x-۶$	−	۰	+

۲ نمودار خط $y = -۲x + ۶$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.



x	۳ > x	۳	۳ < x
y=−۲x+۶	+	۰	−

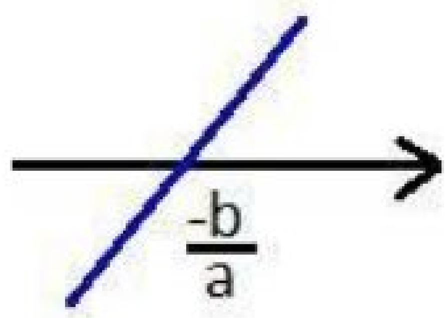
x	y
۲	۲
۳	۰

۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

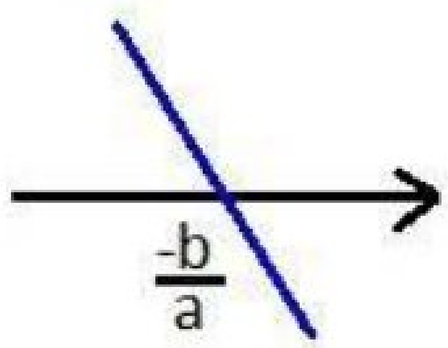
اگر ضریب x مثبت باشد علامت قبل از ریشه منفی و بعد از آن مثبت است

اگر ضریب x منفی شود، علامت ها عکس خواهد شد، یعنی قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی است.

۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.



اگر a مثبت باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابل) با توجه به شکل، قبل از ریشه منفی و بعد از آن مثبت است یعنی قبل از ریشه مخالف علامت a و بعد از آن موافق علامت a است.



اگر a منفی باشد نمودار حالتی از این نوع دارد (شکل مقابل) با توجه به شکل، قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی است یعنی قبل از ریشه مخالف علامت a و بعد از آن موافق علامت a است.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
y = ax+b	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال

عبارت $y = ۵x - ۲$ را تعیین علامت می‌کنیم.

ریشهٔ عبارت $۵x-۲$ از معادلهٔ $۵x-۲=۰$ به دست می‌آید که برابر $x = \frac{۲}{۵}$ است.

با توجه به اینکه علامت ضریب x ؛ یعنی $a = ۵$ ، مثبت است، طبق جدول بالا، جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است:

x	$x < \frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$x > \frac{۲}{۵}$
y = ۵x −۲	−	۰	+

مقدار y را برای $x = ۳$ و $x = -۱$ به‌دست آورید و صحت علامت اعداد به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$$x = -۱ \Rightarrow y = ۵(-۱) - ۲ = -۷ \rightarrow \text{منفی}$$

$$x = ۳ \Rightarrow y = ۵(۳) - ۲ = ۱۳ \rightarrow \text{مثبت}$$

مثال علامت عبارت $A=(۲x-۱)(۳-x)$ را برای xهای مختلف تعیین می‌کنیم. جدول تعیین علامت برای هرکدام از عبارت‌های $x-۳$ و $۲x-۱$ به‌صورت زیراست :

x	$x<\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$x>\frac{۱}{۲}$
$۲x-۱$	−	۰	+

x	$x<۳$	۳	$x>۳$
$۳-x$	+	۰	−

اطلاعات این دو جدول را در یک جدول به‌صورت زیر می‌نویسیم :

x	$x>\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}<x<۳$	۳	$x>۳$
$۲x-۱$	−	۰	+		+
$۳-x$	+		+	۰	−

بنابراین در سه ناحیهٔ بالا که با رنگ‌های مختلف نشان داده شده، علامت هرکدام از این دو عبارت مشخص شده است. مثلاً برای $x>۳$، عبارت $۲x-۱$، مثبت است؛ ولی $x-۳$ منفی می‌باشد، پس علامت عبارت حاصل‌ضرب آنها، منفی خواهد بود. با بحث مشابه، برای دو ناحیهٔ دیگر، جدول تعیین علامت $A=(۲x-۱)(۳-x)$ به‌صورت زیر است[۱].

x		$\frac{۱}{۲}$		۳	
$۲x-۱$	−	۰	+		+
$۳-x$	+		+	۰	−
A	−	۰	+	۰	−

دقت کنید که روی ستون‌ها نیزقاعدهٔ ضرب انجام شده است.

مقدار A را برای $x=۴$ و $x=۰$ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

$x=۴ \Rightarrow y=(۸-۱)(۳-۴)=-۷ \rightarrow$ منفی

$x=۰ \Rightarrow y=(۰-۱)(۳-۰)=-۳ \rightarrow$ منفی

کار در کلاس هریک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(۳x+۱)(x-۲)$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۳x+۱$	−	۰	+		+
$x-۲$	−		−	۰	+
A	+	۰	−	۰	+

ب) $B=(۲x-۳)^۲$

x		$\frac{۳}{۲}$	
$B=(۲x-۳)^۲$	+	۰	+

ب) $C=x^۳(۷-x)$

x		۰		۷	
$x^۳$	−	۰	+		+
$۷-x$	+		+	۰	−
C	−	۰	+	۰	−

ت) $D=\frac{x-۱}{۵-۲x}$

x		۱		$\frac{۵}{۲}$	
$x-۱$	−	۰	+		+
$۵-۲x$	+		+	۰	−
D	−	۰	+	ت.ن	−

۱ــ از نوشتن حدود x در جدول تعیین علامت، صرف‌نظر می‌کنیم.

۲ــ تقسیم دو علامت با ضرب آنها نتیجهٔ مشابهی دارد. همچنین حاصل $\frac{a}{۰}$ است، قابل محاسبه نیست و به آن تعریف نشده می‌گوییم. $(a\in\mathbb{R})$

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم

چند جمله‌ای درجه دوم $P(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$ است. برای حل معادلهٔ $P(x)=0$ به شیوهٔ مربع کامل، $P(x)$ را به شکل روبه‌رو می نویسیم.

$$P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

که در آن، $\Delta=b^2-4ac$ و می‌دانیم که تعداد ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=0$ به علامت Δ بستگی دارد. با انجام فعالیت زیر علامت $P(x)$ را در حالت‌های مختلف به‌دست می‌آوریم.

فعالیت

۱ فرض کنید که معادلهٔ $P(x)=0$، دو ریشه متمایز x_1 و x_2 ($x_1<x_2$) داشته و به شکل $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

x		x_1		x_2	
$x-x_1$	−	۰	+		+
$x-x_2$	−		−	۰	+
$(x-x_1)(x-x_2)$	+		−		+
$P(x)$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

۲ اگر معادلهٔ $P(x)=0$ ریشهٔ مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x)=a(x-x_1)^2$ بنویسیم. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

x		x_1	
$(x-x_1)^2$	+	۰	+
$P(x)$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ اکنون فرض کنید $\Delta<0$ باشد، در این صورت معادلهٔ $P(x)=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. با توجه به اینکه $P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ علامت $P(x)$ را در جدول زیر تعیین کنید.

x	برای هر $x\in\mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x\in\mathbb{R}$، مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ $\Delta<0 \quad , \quad a>0$

برای وقتی که $P(x)$ منفی است، نیز علامت a و Δ را تعیین کنید. $\Delta<0 \quad , \quad a<0$

مثال

عبارت $A = ۲x^۲ - x - ۳$ را تعیین علامت می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $A = ۰$ را در صورت وجود، به‌دست می‌آوریم.

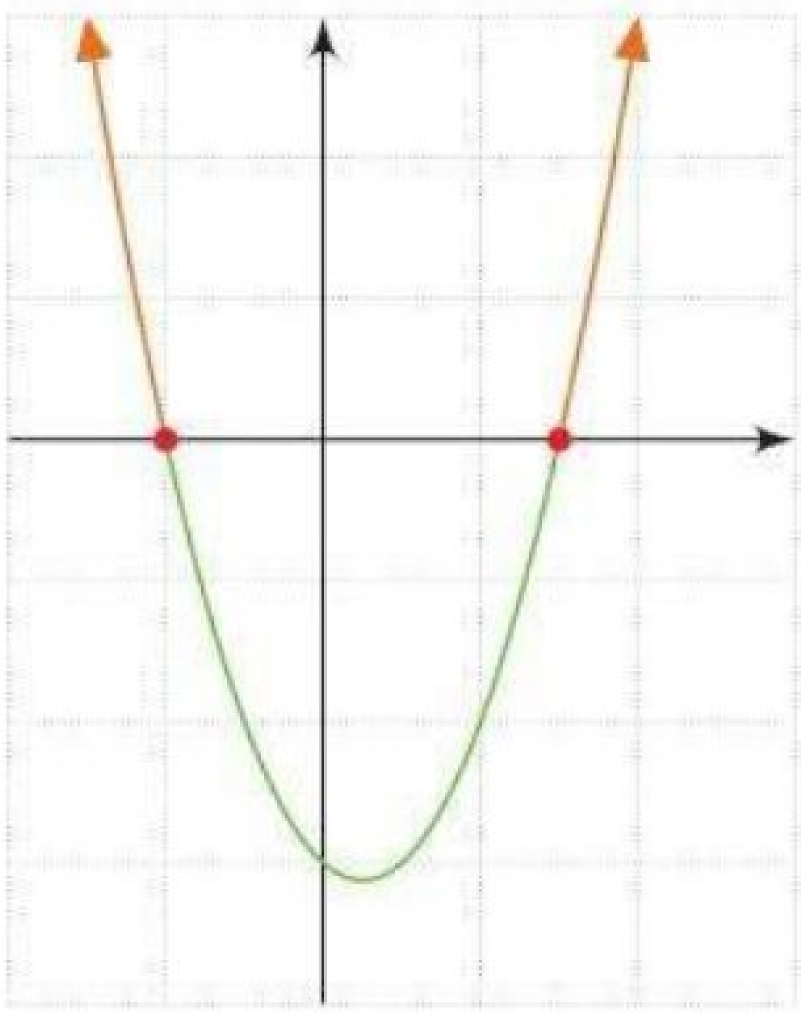
$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۱ + ۲۴ = ۲۵$$

پس معادلهٔ $A = ۰$ دو ریشهٔ متمایز به‌صورت زیر دارد:

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱ + ۵}{۴} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱ - ۵}{۴} = -۱$$

با توجه به اینکه $a = ۲$ است، بنابراین علامت $P(x)$ طبق فعالیت بالا به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

x		-۱		$\frac{۳}{۲}$	
P(x)	+	۰	−	۰	+



نمودار سهمی $y = ۲x^۲ - x - ۳$ در شکل مقابل رسم شده است. به کمک نمودار نیز به سادگی می‌توان علامت y را برای xهای مختلف تعیین کرد. برای $x > \frac{۳}{۲}$ و $x < -۱$، نمودار بالای محور xهاست؛ پس y علامت مثبت دارد و برای $-۱ < x < \frac{۳}{۲}$، نمودار پایین محور xهاست؛ پس علامت y منفی است.

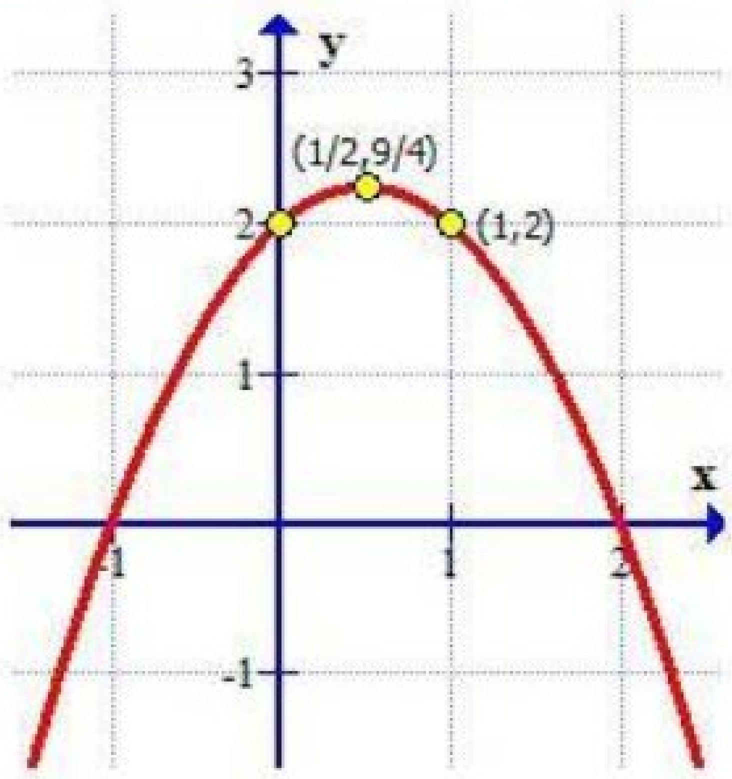
مثال

عبارت $P(x) = \frac{x(x-۳)^۲}{x^۲ + x - ۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

هریک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم.

$$\begin{cases} x = ۰ \\ (x-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = -۲ \text{ یا } x = ۱ \end{cases}$$

x		-۲		۰		۱		۳	
x	−		−	۰	+		+		+
$(x-۳)^۲$	+		+		+		+	۰	+
$x^۲+x-۲$	+	۰	−		−	۰	+		+
P(x)	−		+	۰	−		+	۰	+
		تعریف نشده				تعریف نشده			



کار در کلاس

۱) چندجمله‌ای $y=-x^۲+x+۲$ را با محاسبهٔ ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

$$-x^۲+x+۲=۰$$
$$\xrightarrow{\Delta=۹} x=۲, x=-۱$$

x		-۱		۲	
y	-	۰	+	۰	-

۲) عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=(x^۲-۹)(۳x-۱)$

$$x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=\pm ۳$$
$$۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

		-۳		$\frac{۱}{۳}$		۳	
$x^۲-۹$	+	۰	-		-	۰	+
$۳x-۱$	-		-	۰	+		+
A	-	۰	+	۰	-	۰	+

ب) $B=\dfrac{-x^۲+۶x-۹}{x^۲+x+۳}$

$$-x^۲+۶x-۹=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} x=۳$$
$$x^۲+x+۳=۰ \xrightarrow{\Delta=-۱۱}$$ جواب ندارد

		۳	
$-x^۲+۶x-۹$	-	۰	-
$x^۲+x+۳$	+		+
B	-	۰	-

نامعادله

در سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اید. اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به‌صورت زیرند:

نامعادله	می‌خوانیم
$A<B$	A کوچک‌تر از B است.
$A\leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A>B$	A بزرگ‌تر از B است.
$A\geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱ــ خاصیت جمع:

برای عبارت‌های جبری A، B و C، اگر $A<B$ سپس $A+C<B+C$.

۲ــ خاصیت ضرب

الف) اگر $C>۰$ و $A>B$ سپس $AC>BC$.

ب) اگر $C<۰$ و $A>B$ سپس $AC<BC$.

مثال

نامعادلهٔ $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل می‌کنیم.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

به دو طرف نامعادله، $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

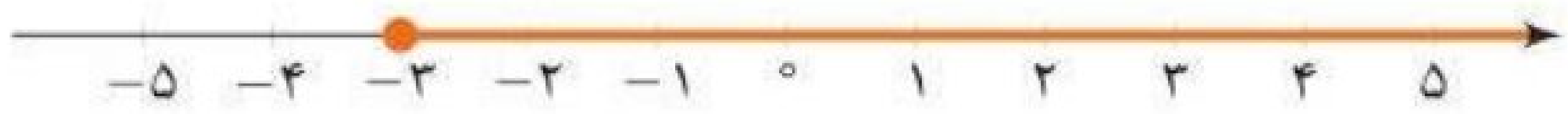
$$2x - 1 \geq -7$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$2x \geq -6$$

$$x \geq -3$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in R \mid x \geq -3\}$ که با نماد بازه به شکل $[-3, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به صورت زیر است :



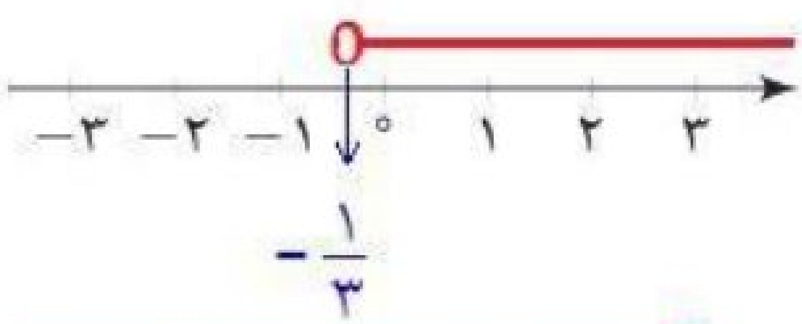
فعالیت

فرض کنید x متغیری باشد که همزمان در دو نامعادلهٔ زیر صدق می‌کند :

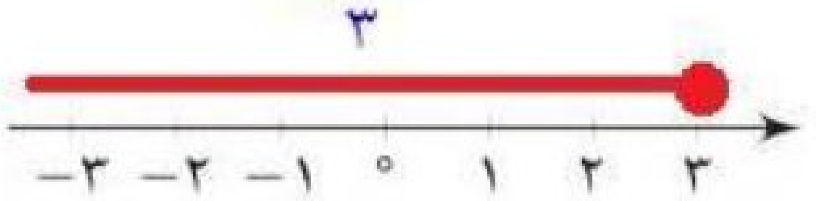
$$-2 < 3x - 1 \ ,\ 3x - 1 \leq 8$$

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را روی محور مقابل آنها رسم کنند.

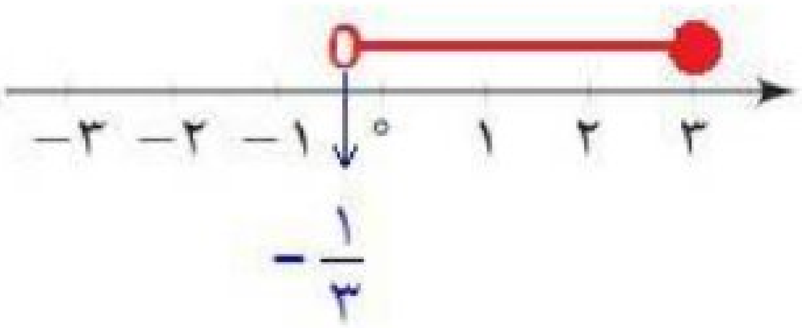
$$-2 < 3x - 1 \xrightarrow{+1} -1 < 3x \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < x$$



$$3x - 1 \leq 8 \xrightarrow{+1} 3x \leq 9 \xrightarrow{\div 3} x \leq 3$$



به‌خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به‌دست آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.



۲ می‌توانیم دو نامعادلهٔ فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادلهٔ دوگانه به‌صورت $-2 < 3x - 1 \leq 8$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادلهٔ دوگانه را حل کنید :

به دو نامعادله $+1$ را اضافه می‌کنیم. $\quad -2 < 3x - 1 \leq 8$

دو نامعادله را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم. $\quad -1 < 3x \leq 9$

$$-\frac{1}{3} < x \leq 3$$

جواب به‌دست آمده از این روش را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

نامعادلهٔ دوگانهٔ فوق را به‌صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نیز نشان می‌دهیم :

$$\begin{cases} 3x - 1 > -2 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجهٔ فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به‌صورت $C=\frac{۵}{۹}(F-۳۲)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را برحسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $۱۵\leq C\leq ۲۵$ ؛ سپس از رابطهٔ داده شده، C را برحسب F بنویسید و نامعادلهٔ دوگانهٔ به‌دست آمده را حل کنید.)

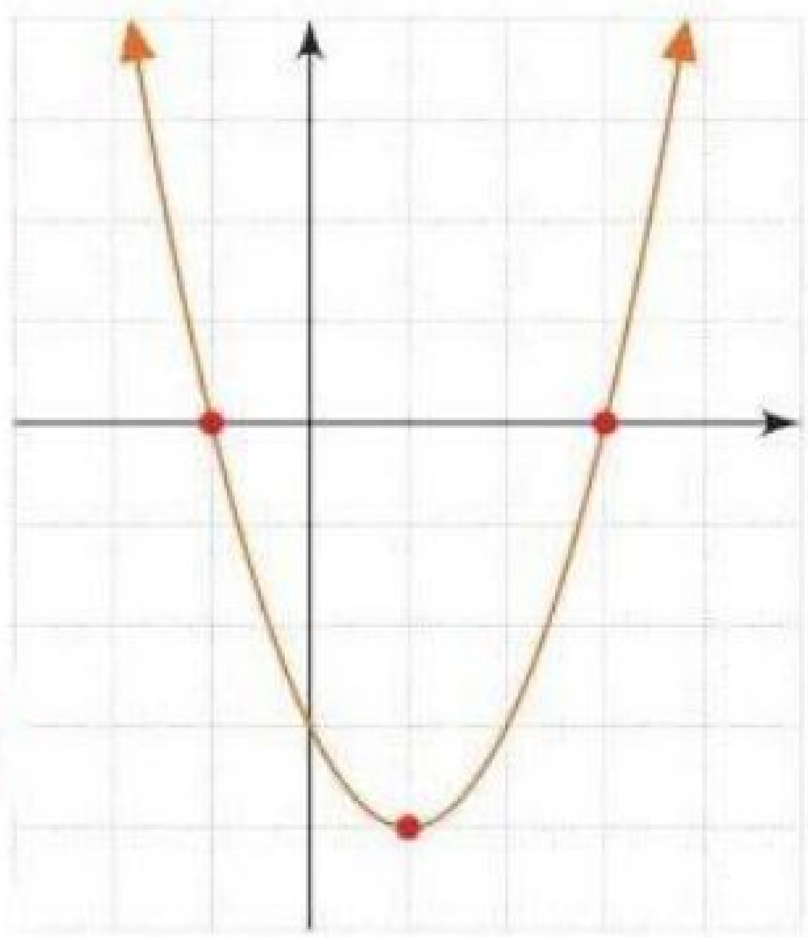
$$۱۵\leq C\leq ۲۵ \Rightarrow ۱۵\leq \frac{۵}{۹}(F-۳۲)\leq ۲۵$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۹}{۵}} ۲۷\leq F-۳۲\leq ۴۵$$

$$\xrightarrow{+۳۲} ۵۹\leq F\leq ۷۷$$

فعالیت

سهمی $y=x^۲-۲x-۳$ را درنظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.



الف) به کمک نمودار رسم شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟ $-۱<x<۳$

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y=x^۲-۲x-۳$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟

$$x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow (x-۳)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۳ \quad , \quad x=-۱$$

x		-۱		۳	
y	+	۰	−	۰	+

به ازای $-۱<x<۳$ ، y منفی است.

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به‌دست آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادلهٔ $x^۲-۲x-۳<۰$ استفاده کرد.

$x^۲-۲x-۳<۰$ یعنی مجموعه مقادیری از x که به ازای آنها $y<۰$ باشد که با توجه به نمودار $-۱<x<۳$ مشخص شده است. همچنین به کمک جدول تعیین علامت نیز به همین جواب رسیدیم.

کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^۲\leq ۴$

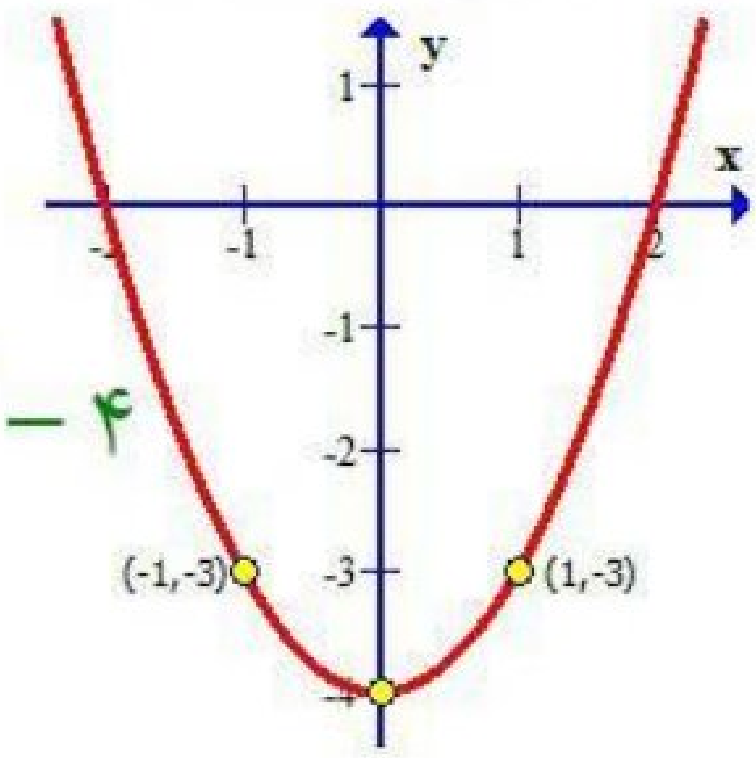
$x^۲-۴\leq ۰ \Leftarrow x^۲\leq ۴$

$x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm ۲$

x		-۲		۲	
y	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$y=x^۲-۴$



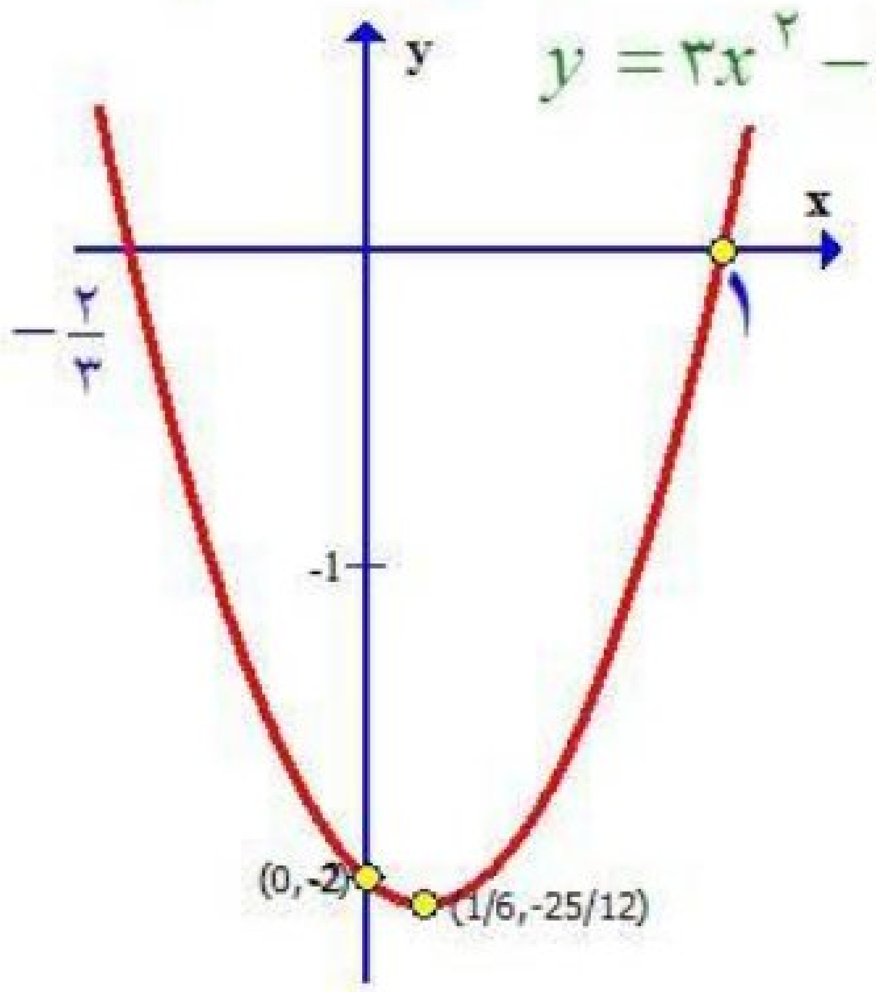
پ) $۳x^۲-x-۲\geq ۰$

$$۳x^۲-x-۲=۰ \xrightarrow{\Delta=۲۵} x=۱ \text{ ، } x=-\frac{۲}{۳}$$

x		$-\frac{۲}{۳}$		۱	
y	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow \left(-\infty,-\frac{۲}{۳}\right]\cup[۱,+\infty)$

$y=۳x^۲-x-۲$



مثال

برای چه مقادیری از m، عبارت $y=x^۲+mx+۱$ همواره مثبت است؟

حل: از درس قبل به یاد داریم، برای اینکه عبارت درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مقدار مثبت داشته باشد، باید $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد. در این عبارت، $a=۱$ و $\Delta=m^۲-۴$ است؛ بنابراین $m^۲-۴<۰$ است.

جدول تعیین علامت، برای $m^۲-۴$ به‌صورت زیر است :

m		-۲		۲	
$m^۲-۴$	+	۰	−	۰	+

بنابراین برای اینکه $m^۲-۴$ منفی باشد، باید $-۲<m<۲$.

مثال

نامعادلهٔ $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}\geq ۰$ را حل می‌کنیم.

برای حل این نامعادله، عبارت $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}$ را تعیین علامت می‌کنیم. برای این کار ریشه‌های صورت و مخرج این کسر را پیدا می‌کنیم. ریشه‌های معادله $x^{۲}-۹=۰$ ، اعداد ±۳ هستند و ریشهٔ معادله $۲x+۱=۰$ ، عدد $-\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین، جدول تعیین علامت این کسر به صورت زیر است.

x		-۳		$-\frac{۱}{۲}$		۳	
$x^{۲}-۹$	+	۰	−		−	۰	+
$۲x+۱$	−		−	۰	+		+
$\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}$	−	۰	+		−	۰	+

تعریف نشده

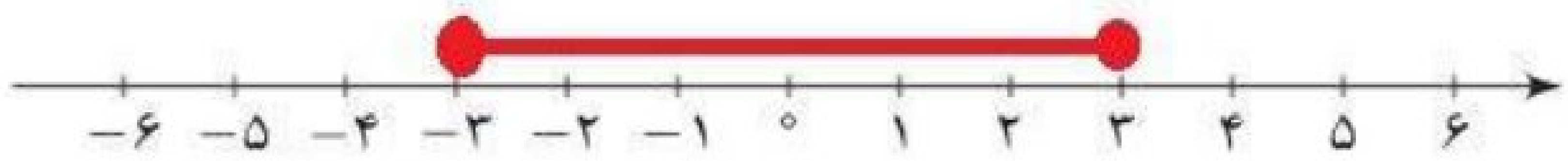
بنابراین اگر $-۳\leq x<-\frac{۱}{۲}$ و یا $x\geq ۳$، عبارت $\frac{x^{۲}-۹}{۲x+۱}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس مجموعه جواب این نامعادله عبارت‌است از: $[-۳,-\frac{۱}{۲})\cup[۳,+\infty)$.

نامعادله‌های قدر مطلقی

می‌دانیم که $|x|$ همان فاصلهٔ x از مبدأ، روی خط اعداد حقیقی است. مثلاً $|۳|=۳$ و $|-۳|=۳$ زیرا فاصلهٔ هردو عدد ۳ و ۳− از مبدأ برابر ۳ است.

فعالیت

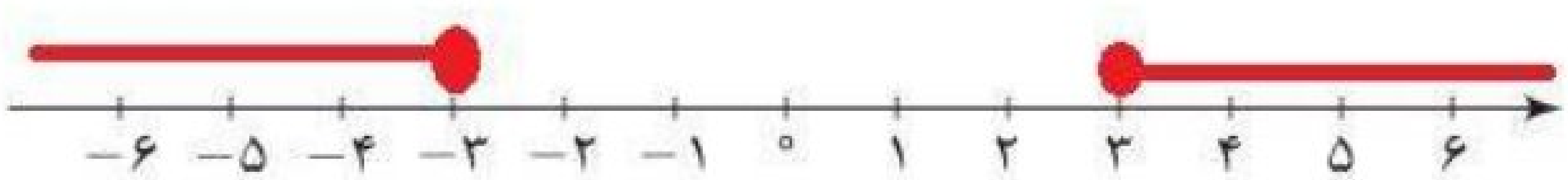
۱ نامعادلهٔ $|x|\leq ۳$ رادرنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید.



مجموعهٔ مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید. $[-۳,۳]$

....

۲ نامعادلهٔ $|x|\geq ۳$ را درنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید.



مجموعهٔ این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید. $(-\infty,-۳] \cup [۳,+\infty)$

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید.

$[-۳,۳]$ = مجموعه جواب (به شکل بازه)

$(-\infty,-۳] \cup [۳,+\infty)$ = مجموعه جواب (به شکل بازه)

$$\begin{cases} |x| \le ۳ \Rightarrow -۳ \le x \le ۳ \Rightarrow \\ |x| \ge ۳ \Rightarrow x \ge ۳ \text{ یا } x \le -۳ \Rightarrow \end{cases}$$

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت[1]

۱ــ اگر $|u| \le a$ سپس $-a \le u \le a$.

۲ــ اگر $|u| \ge a$ سپس $u \ge a$ یا $u \le -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.

الف) $|x-۳| \le ۲$

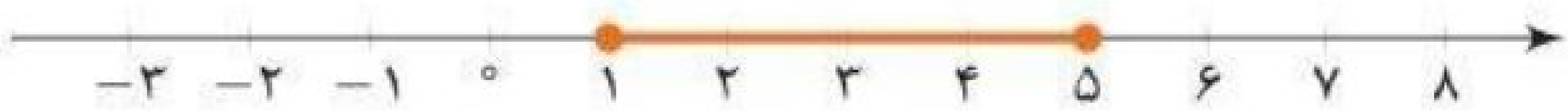
ب) $|۲x-۱| > ۵$

برای حل نامعادلهٔ الف ، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادلهٔ دوگانه تبدیل می کنیم : $-۲ \le x - ۳ \le ۲$

اکنون داریم :

$$-۲ \le x-۳ \le ۲ \Rightarrow ۱ \le x \le ۵.$$

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازهٔ $[۱,۵]$ است و نمایش هندسی آن به‌صورت زیر است.

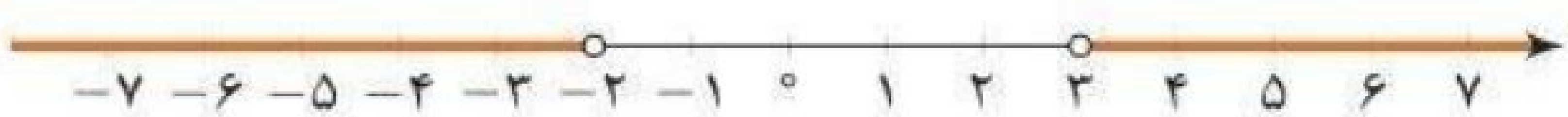


برای حل نامعادلهٔ $|x-۳| \le ۲$ به روش هندسی باید نقاطی مانند x را روی محور پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ۳، حداکثر دو باشد. بنابراین بازه $[۱,۵]$، مطابق شکل زیر به‌دست می‌آید.

برای حل نامعادلهٔ ب نیز از خواص قدر مطلق استفاده می‌کنیم و داریم :

$$|۲x-۱| > ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱ > ۵ \Rightarrow ۲x > ۶ \Rightarrow x > ۳ \\ ۲x-۱ < -۵ \Rightarrow ۲x < -۴ \Rightarrow x < -۲ \end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب این نامعادله عبارت‌است از : $(-\infty,-۲) \cup (۳,+\infty)$ و نمایش هندسی آن جواب نیز به صورت زیر است.



۱ــ در هریک از این نامعادله‌ها، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچ کدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

کار در کلاس

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به‌دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left|\frac{x}{3}+1\right|<\frac{2}{3}$

$$-\frac{2}{3}<\frac{x}{3}+1<\frac{2}{3}\xrightarrow{-1}-\frac{5}{3}<\frac{x}{3}<-\frac{1}{3}\xrightarrow{\times 3}-5<x<-1\Rightarrow(-5,-1)$$

ب) $|5-2x|\geq 1$

$$\Rightarrow\begin{cases}5-2x\geq 1\Rightarrow -2x\geq -4\Rightarrow x\leq 2\\ 5-2x\leq -1\Rightarrow -2x\leq -6\Rightarrow x\geq 3\end{cases}$$

$$\Rightarrow(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$$

۲ یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازهٔ (۱،۹) باشد.

با توجه به این که ۵ وسط بازه ی $(1,9)$ است . این بازه مجموعه نقاطی است که فاصله شان از ۵ کمتر از ۴ می باشد بنابراین $|x-5|<4$ جواب است .

توجه : در حالت کلی،بازه (a,b) را می توان به صورت $\left|x-\frac{b+a}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$ نوشت .

۳ یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$ باشد.

با توجه به این که $\frac{9}{2}$ وسط فاصله $[3,6]$ است ، شکل مجموعه نقاطی است که فاصله شان از $\frac{9}{2}$ بیشتر از $\frac{3}{2}$ می باشد بنابراین $\left|x-\frac{9}{2}\right|\geq\frac{3}{2}$ جواب است .

توجه : در حالت کلی، مجموعه $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ را می توان به صورت $\left|x-\frac{b+a}{2}\right|\geq\frac{b-a}{2}$ نوشت .

تمرین

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1<2x-3\leq 3$

$$\xrightarrow{+3}4<2x\leq 6\xrightarrow{\div 2}2<x\leq 3\Rightarrow(2,3]$$

ب) $x+1\leq 5-x<2x+3$

$$\begin{cases}x+1\leq 5-x\Rightarrow 2x\leq 4\Rightarrow x\leq 2\\ 5-x<2x+3\Rightarrow -3x<-2\Rightarrow x>\frac{2}{3}\end{cases}\xrightarrow{\cap}\left(\frac{2}{3},2\right]$$

پ) $-2<\frac{5-x}{2}<0$

$$\xrightarrow{\times 2}-4<5-x<0\xrightarrow{-5}-9<-x<-5\xrightarrow{\times(-)}9>x>5\Rightarrow(5,9)$$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1}\geq 0$

$x=2\Leftarrow 4-2x=0$

$x=-\frac{1}{3}\Leftarrow 3x+1=0$

	$-\frac{1}{3}$		2	
$4-2x$	+	+	0	−
$3x+1$	−	0 +		+
کسر	−	ت ن +	0	−

مجموعه جواب $=\left(-\frac{1}{3},2\right]$

ث) $x(x^2+4)<0$

$x=0\quad,\; x^2+4=0\Rightarrow$ جواب ندارد

		0	
x	−	0	+
x^2+4	+		+
عبارت	−	0	+

مجموعه جواب $=(-\infty,0)$

ج) $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2}\leq 0\Leftarrow\frac{x(x^2-1)}{x^2-2x+2}\leq 0$

$x=0$

$x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$

$x^2-2x+2=0\xrightarrow{\Delta=-4}$ جواب ندارد

		-1		0		1	
x	−		−	0	+		+
x^2-1	+	0	−		−	0	+
x^2-2x+2	+		+		+		+
کسر	−	0	+	0	−	0	+

مجموعه جواب $=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

چ) $|7-2x|<1$

$$-1<7-2x<1\xrightarrow{-7}-8<-2x<-6$$

$$\xrightarrow{\div -2}4>x>3\Rightarrow$$ مجموعه جواب $=(3,4)$

ح) $\left|\frac{x-1}{2}-1\right|\geq 3$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{2}-1\geq 3\xrightarrow{+1}\frac{x-1}{2}\geq 4\xrightarrow{\times 2}x-1\geq 8\xrightarrow{+1}x\geq 9\\ \frac{x-1}{2}-1\leq -3\xrightarrow{+1}\frac{x-1}{2}\leq -2\xrightarrow{\times 2}x-1\leq -4\xrightarrow{+1}x\leq -3\end{cases}$$

مجموعه جواب $=(-\infty,-3]\cup[9,+\infty)$

۲ به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A=x^۲+۳x+k$ همواره مثبت است؟

با توجه به مثبت بودن a کافیست دلتا منفی باشد.

$$\Delta<۰\Rightarrow ۹-۴k<۰\Rightarrow -۴k<-۹\Rightarrow k>\frac{۹}{۴}$$

۳ به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y=mx^۲-mx-۱$ همواره پایین محور xهاست؟

از فرض سوال نتیجه می شود که باید عبارت همواره منفی باشد پس باید دلتا منفی و a منفی باشند.

$$\Delta<۰\Rightarrow m^۲+۴m<۰$$

		-۴		۰	
$m^۲+۴m$	+	۰	-	۰	+

$\Rightarrow -۴<m<۰$

از طرفی a منفی باشد: $m<۰$

$\Rightarrow -۴<m<۰$

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-۵t^۲+۱۸t+۱۳$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

$$h>۱۳\Rightarrow -۵t^۲+۱۸t+۱۳>۱۳\Rightarrow -۵t^۲+۱۸t>۰$$

		۰		$\frac{۱۸}{۵}$	
$-۵t^۲+۱۸t$	−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow (۰,\frac{۱۸}{۵})$

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده قابل قبول‌اند؟

$$\Rightarrow \frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۲۰۰>۱۱۰\Rightarrow \frac{۱۵}{۸}x^۲-۳۰x+۹۰>۰\xrightarrow{\times ۸}۱۵x^۲-۲۴۰x+۷۲۰>۰$$

$$۱۵x^۲-۲۴۰x+۷۲۰=۰\xrightarrow{\Delta=۱۴۴۰۰}x=۱۲\,,\,x=۴$$

		۴		۱۲	
$۱۵x^۲-۲۴۰x+۷۲۰$	+	۰	-	۰	+

$\Rightarrow x<۴$ یا $x>۱۲$

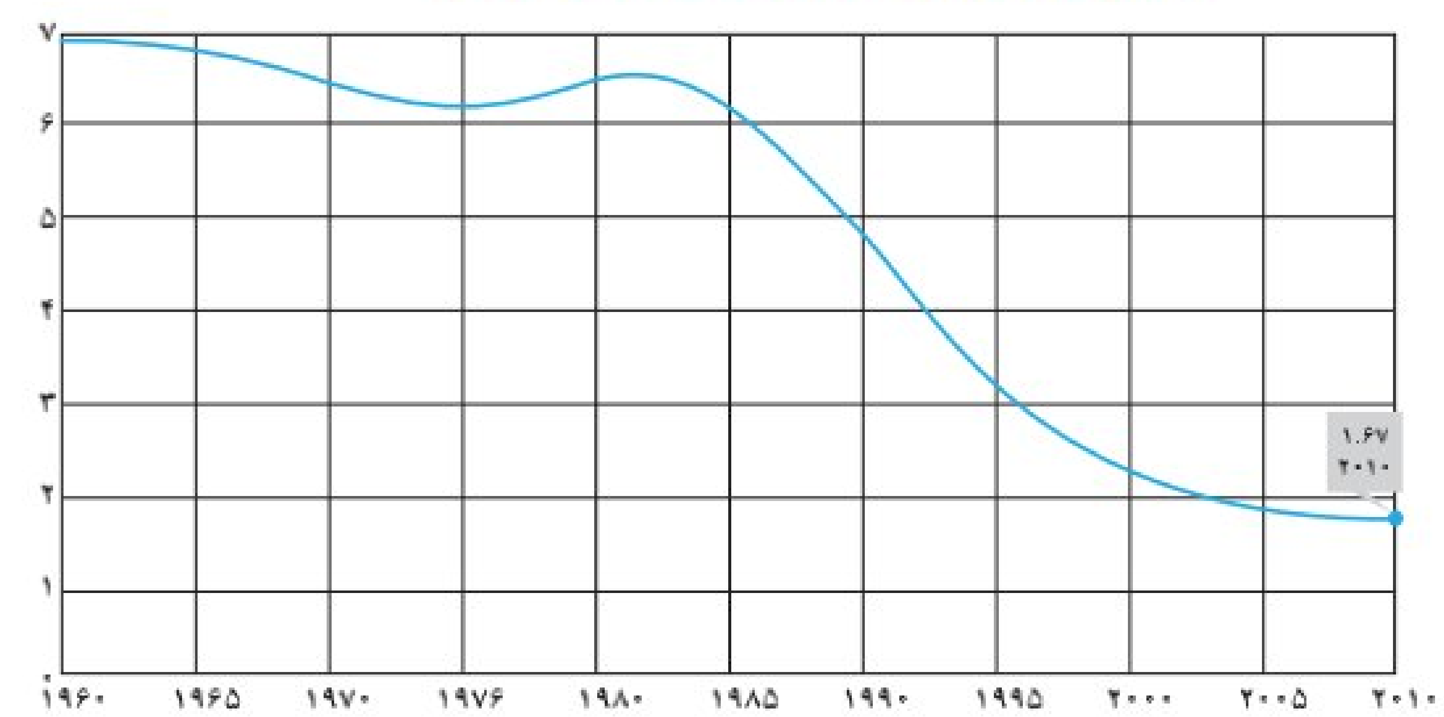
از بین جواب های بدست آمده آنهایی که مثبت هستند قابل قبول اند. واضح هست که جواب های صفر و منفی قابل قبول نیستند

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

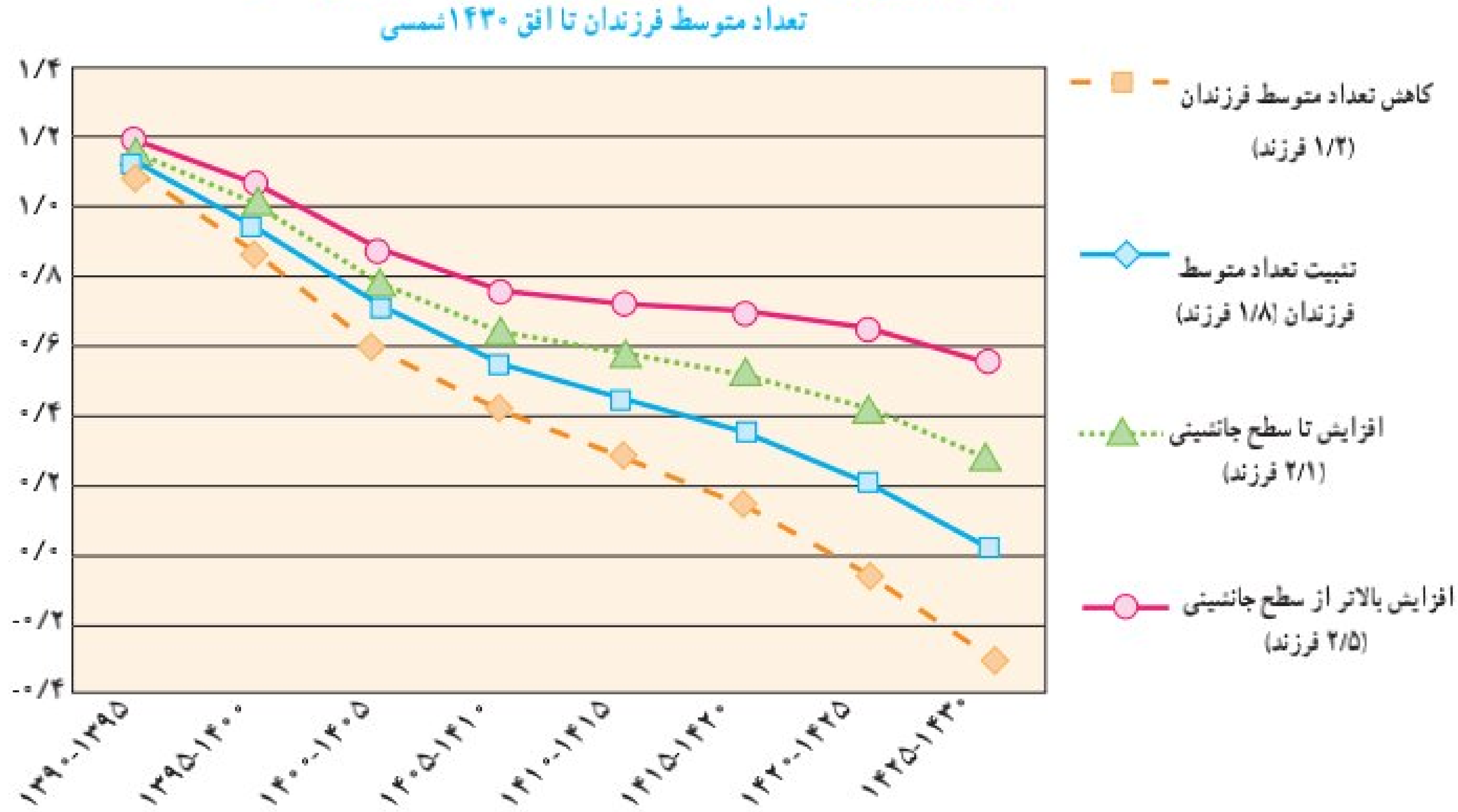
فصل ۵
تابع

تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارای کاربردهای فراوانی است. توابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهاست. موضوعات متفاوتی به وسیله تابع قابل مدل‌سازی است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمند شدن می‌باشد. به‌طوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی باشد در آن موقع، حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۳۹۴جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت، پیامدهای ناگواری را در پی دارد.

نمودار روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در ایران



نمودار پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در دوره‌های پنج ساله در چهار وضعیت مختلف تعداد متوسط فرزندان تا افق ۱۴۳۰ شمسی



درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

بسیاری از پدیده‌های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید :

دمایی که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می‌شود.

قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می‌شود.

نمره‌هایی که به یک دانش‌آموز در دروس مختلف تعلق می‌گیرد.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می‌شود.

فعالیت ۱

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقهٔ خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد.

دربارهٔ بقیهٔ جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸	

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط‌کش	
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	

به یک کالای معین فقط یک قیمت را می توان نسبت داد.

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات	
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸	

به یک درس مشخص فقط یک نمره را می توان نسبت داد.

فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار	
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه	

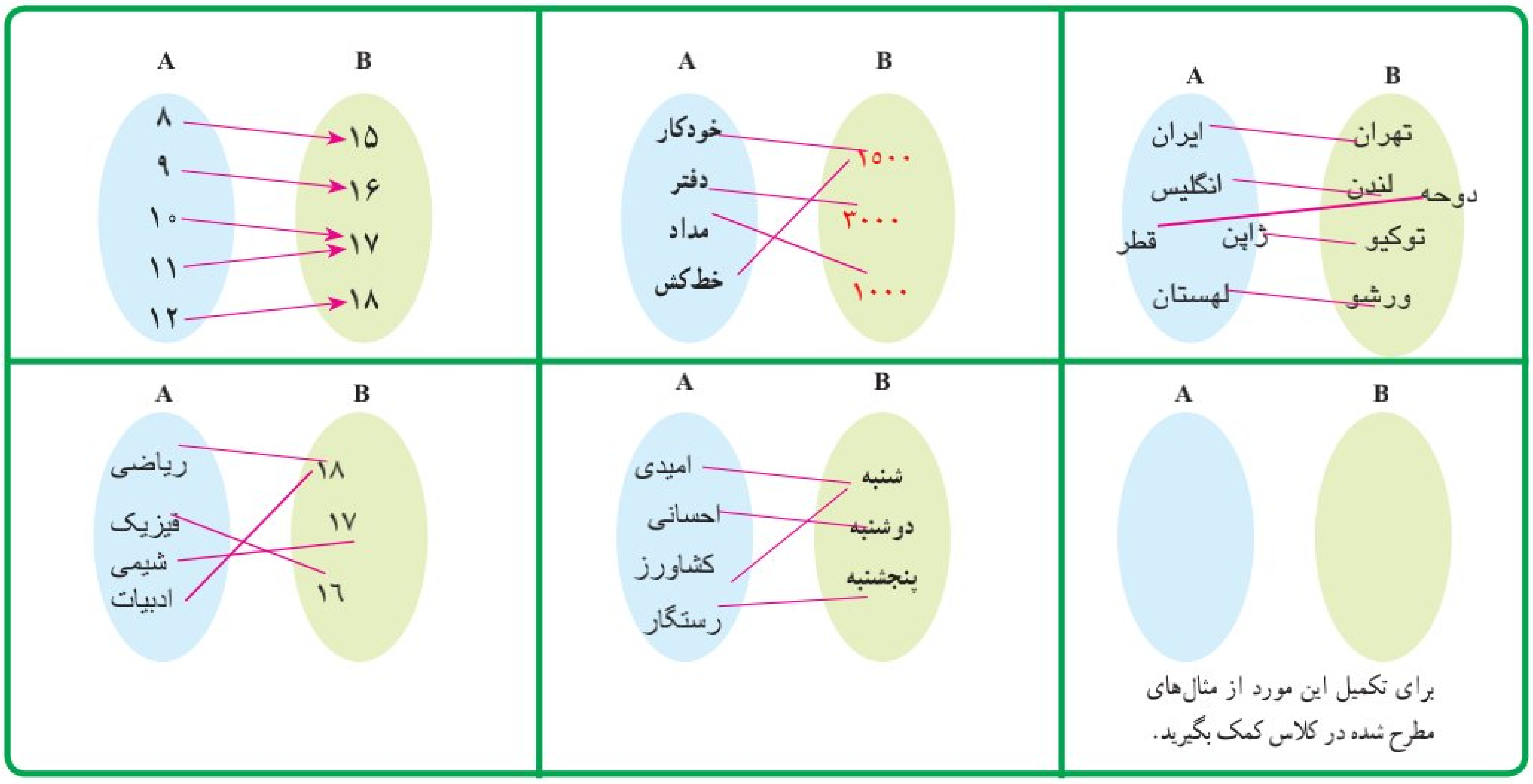
یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

کشور	ایران	انگلیس	ژاپن	قطر	لهستان
پایتخت	تهران	لندن	توکیو	دوحه	ورشو

به یک کشور مشخص فقط یک شهر را به عنوان پایتخت نسبت داد یا هر مثالی که چنین رابطه ای در آن وجود داشته باشد.

فعالیت ۲

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوهٔ نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



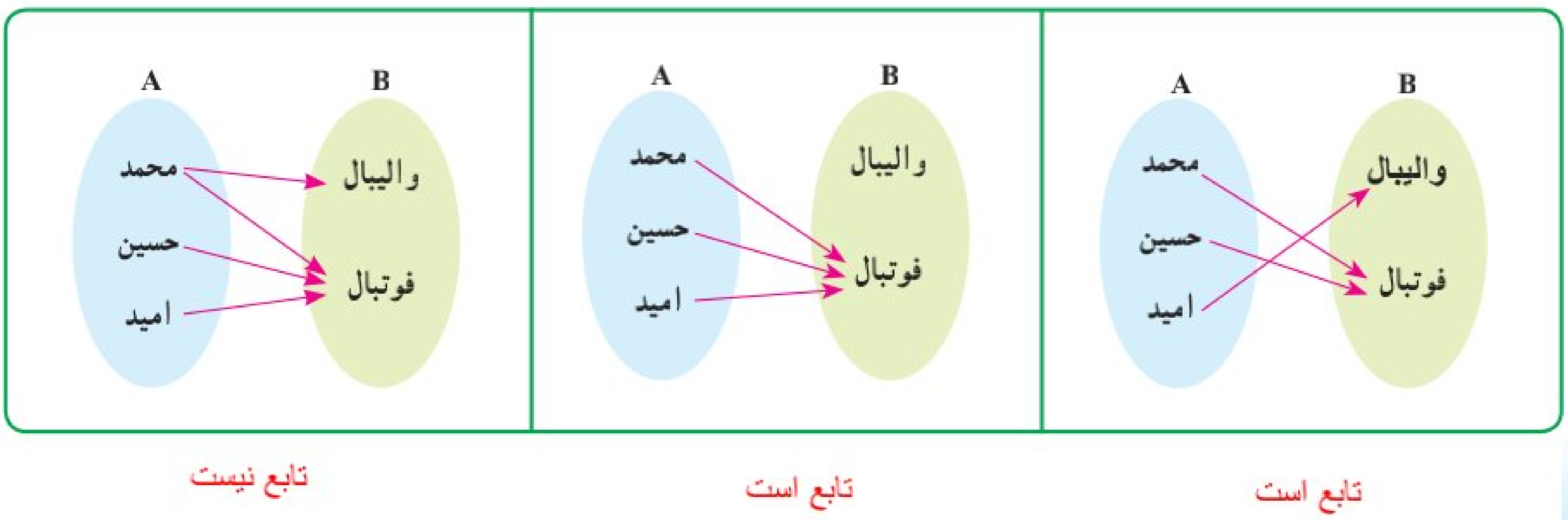
توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این‌گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

> یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

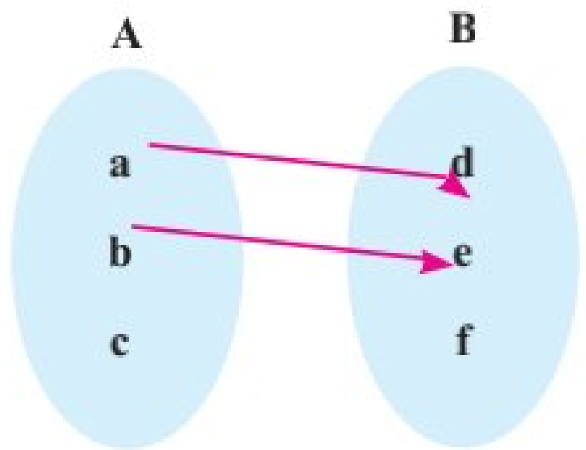
در فعالیت ۱، همهٔ مثال‌های ارائه شده تابع‌هایی هستند که به‌صورت جدول نمایش داده شده‌اند.

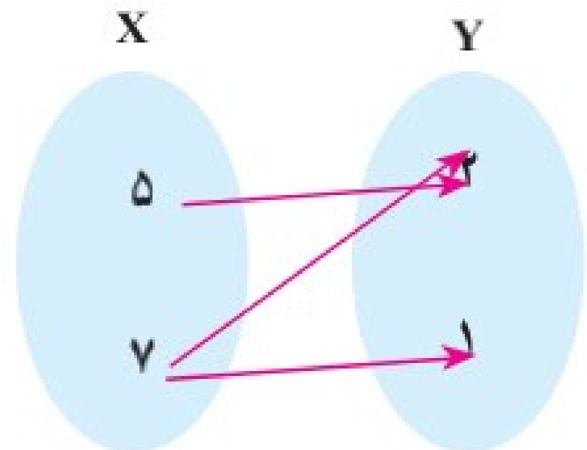
کار در کلاس

۱ مجموعهٔ A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعهٔ B شامل دو رشتهٔ ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟



۲ از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y این کار را به‌گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.





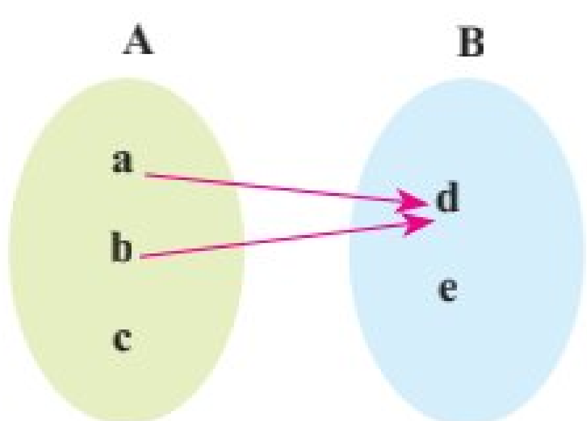
بله در یک زمان مشخص ، افراد دارای سن مشخص و وزن مشخص می باشند.

۳ الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟

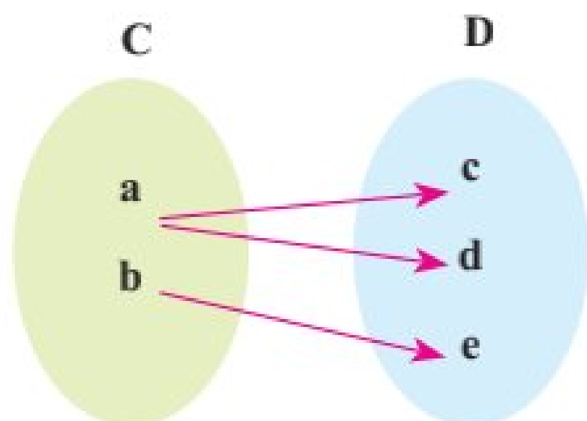
ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقهٔ آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.

خیر زیرا ممکن است یک فرد چند نوع غذا را دوست داشته باشد.

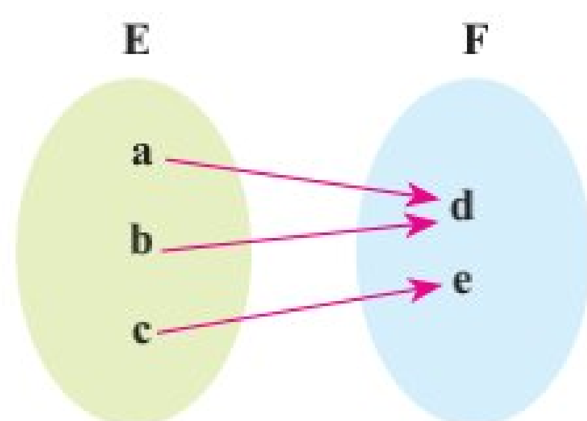
۴ کدام‌یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



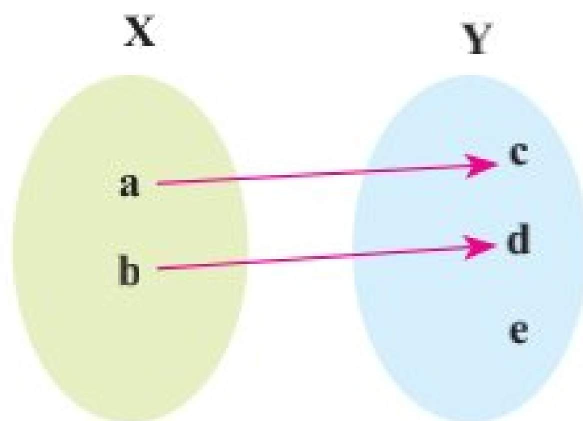
تابع نیست



تابع نیست



تابع است



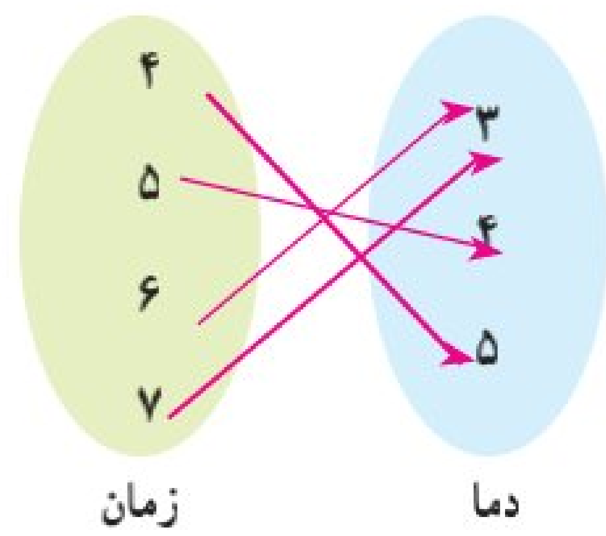
تابع است

فعالیت

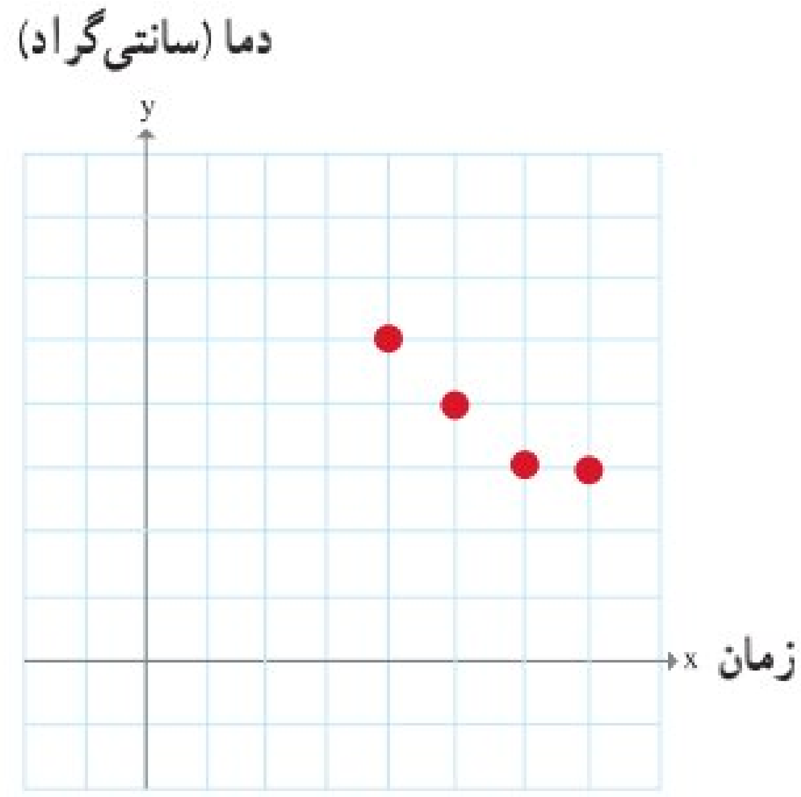
نمایش تابع به‌صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد.

رابطهٔ بین زمان و دما را به‌صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴	۳	۳




گردنه حیران ـ اردبیل

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض درنظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به‌صورت زیر نمایش داد :

(۴ , ۵) , (۵ , ۴) , (۶ , ۳) , (۷ , ۳)

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های (۵ , ۴) و (۴ , ۵) برابر نیستند و دو نقطهٔ متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «زوج مرتب» می‌گوییم.

اگر همهٔ زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطهٔ ارائه شده بین زمان و دما به‌دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام‌گذاری این مجموعهٔ جدید از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.

$f=\{(۴,۵) , (۵,۴) , (۶,۳) , (۷,۳)\}$

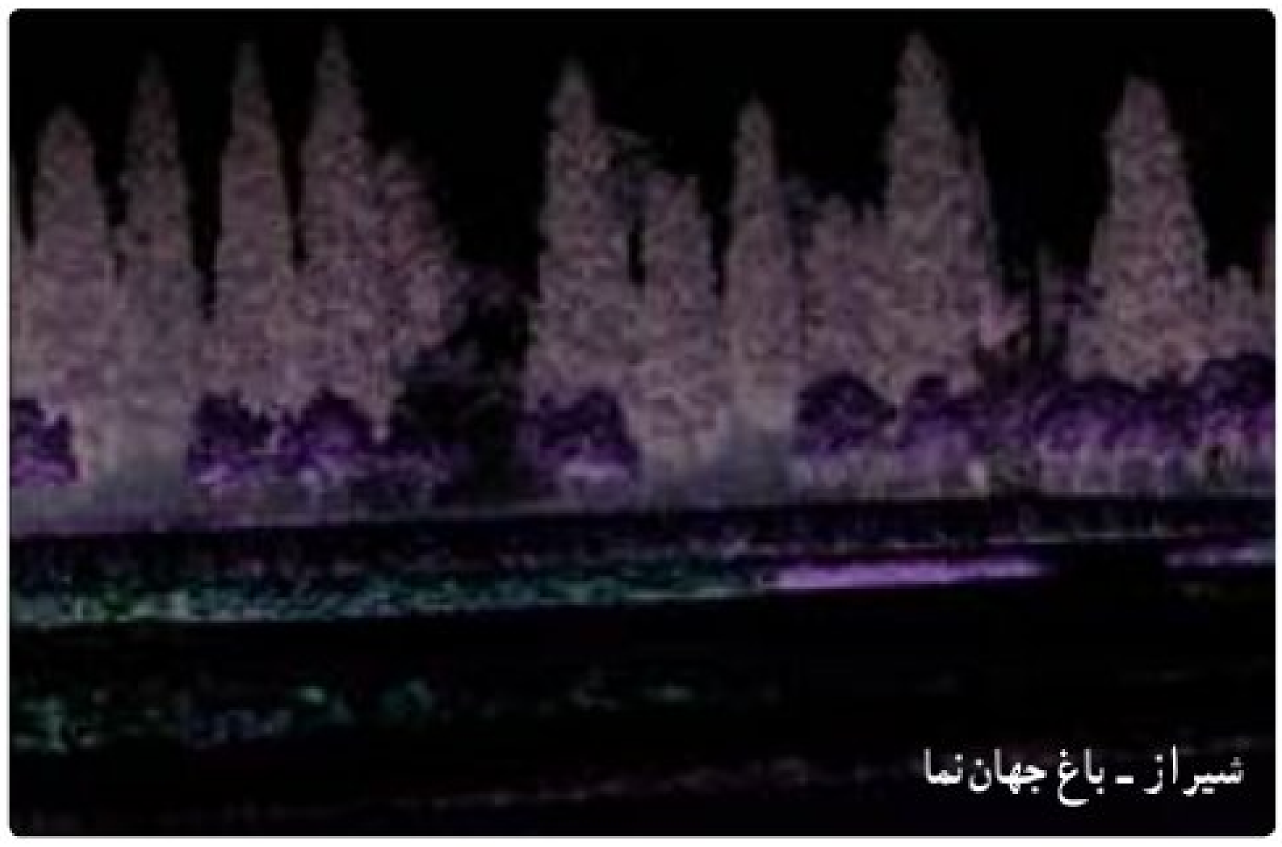
در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفه اول» و عضو دوم را «مؤلفه دوم» می نامیم. به طور مثال در زوج مرتب (۳ و ۶)، مؤلفهٔ اول ۶ و مؤلفه دوم ۳ است. مجموعهٔ f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به‌صورت زوج مرتب نمایش دهید.

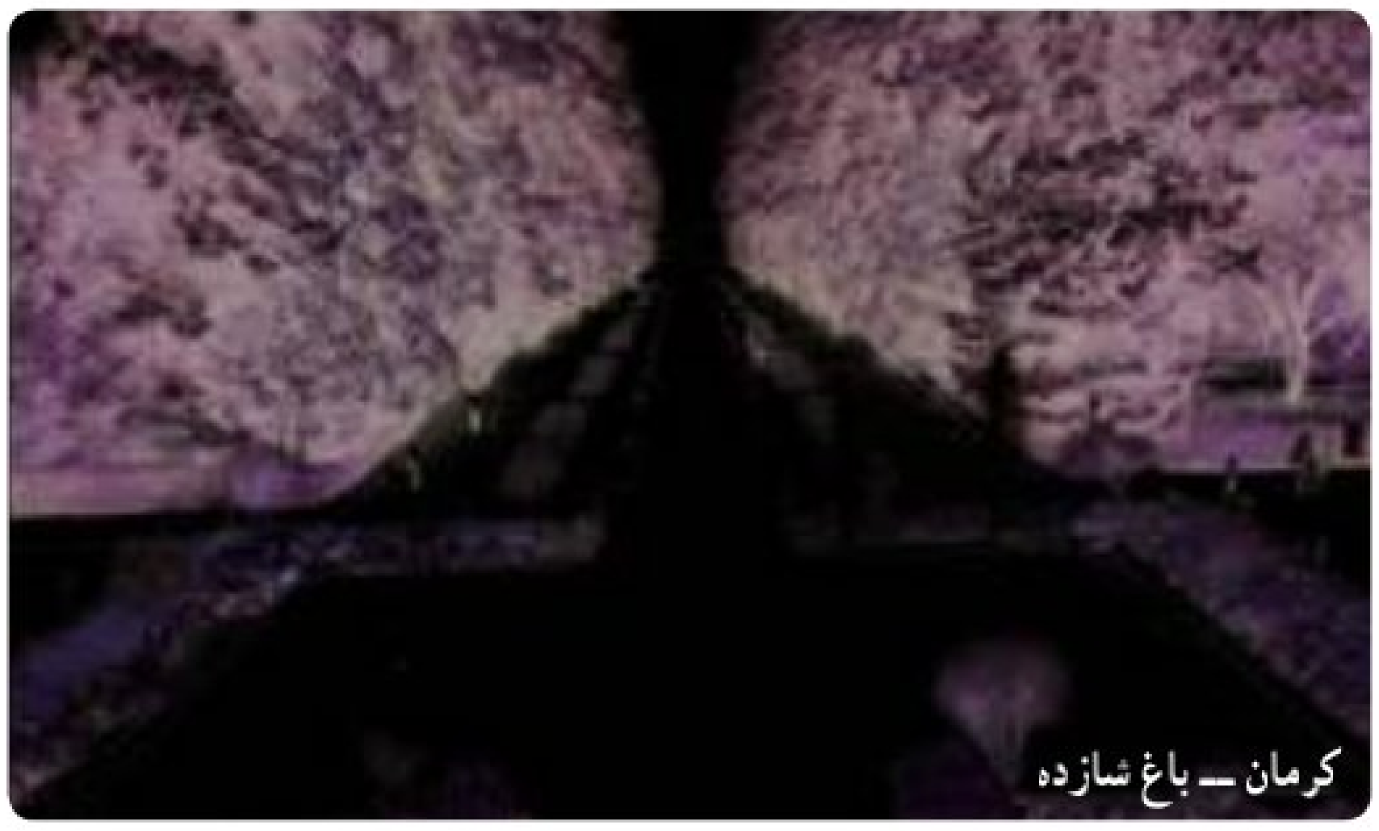
کار در کلاس

۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به‌طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

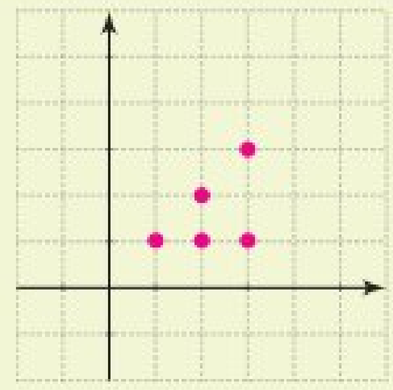
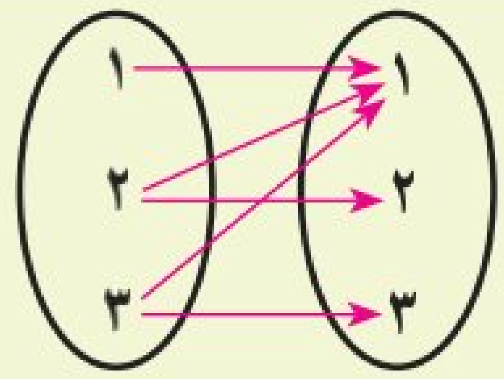
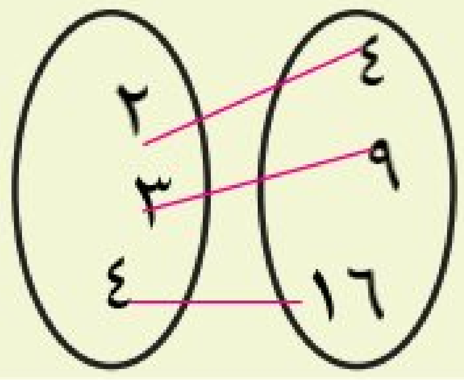
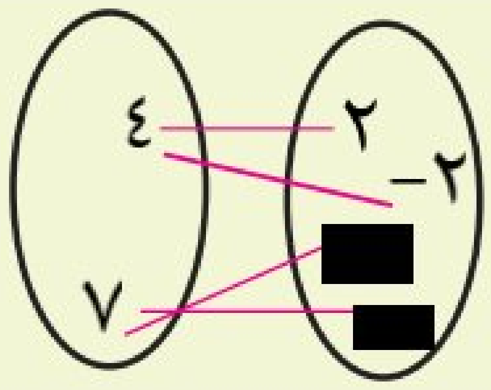
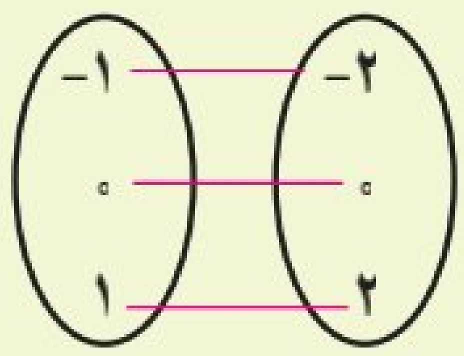
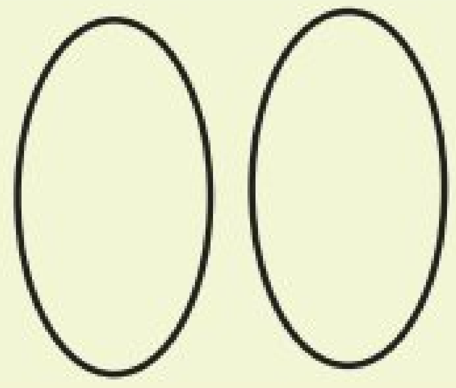
کرمان	اهواز	تبریز	شیراز	اصفهان	مشهد	تهران	شهر
۵۰۰۰۰۰	۱۱۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰	۱۷۰۰۰۰۰	۲۷۰۰۰۰۰	۸۰۰۰۰۰۰	**جمعیت**

رابطهٔ بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟ بله تابع است.


شیراز ـ باغ جهان‌نما


کرمان ــ باغ شازده

۲ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
		{(۱,۱) , (۲,۱) , (۲,۲) , (۳,۱) , (۳,۳)}	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
مانند نمونه رسم شود.		{(۲,۴) , (۳,۹) , (۴,۱۶)}	به اعداد ۲ و ۳ و ٤، مربع آنها را نسبت می دهد.
مانند نمونه رسم شود.		$\{(۴,۲),(۴,-۲),(۷,\sqrt{۷}),(۷,-\sqrt{۷})\}$	به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.
مانند نمونه رسم شود.		$\{(-۱,-۲),(۰,۰),(۱,۲)\}$	به اعداد ۱- و ۰ و ۱ ، دو برابر آنها را نسبت می دهد.
			مثال دلخواه

۳ الف) کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ gتابع نیست زیرا در آن عدد ۲به دو عدد ۹و ۵ نظیر شده است . fتابع است.

g={(۱,۵) , (۲,۹) , (۲,۵) , (۳,۱۰)}

f={(۱,۵) , (۲,۹) , (۳,۱۰)}

ب) با تکمیل جملهٔ زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به‌صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به‌دست آورید :

> اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مولفه های اول یکسان نباشند.

۱ کدام‌یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

هـ) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد.

-۱

الف) تابع است؛ به ضلع یک مربع فقط یک محیط را می‌توان نسبت داد.

ب) تابع است؛ در یک زمان معین به هر فرد فقط می‌توان یک دمای بدن را نسبت داد.

ج) تابع است ؛ چون به هر فرد فقط یک گروه خونی می‌توان نسبت داد.

د) تابع نیست ؛ ممکن است دانش‌آموزی بیش از یک دوست داشته باشد.

ه) تابع نیست؛ اعداد مثبت دارای دو ریشه‌ی دوّم هستند.

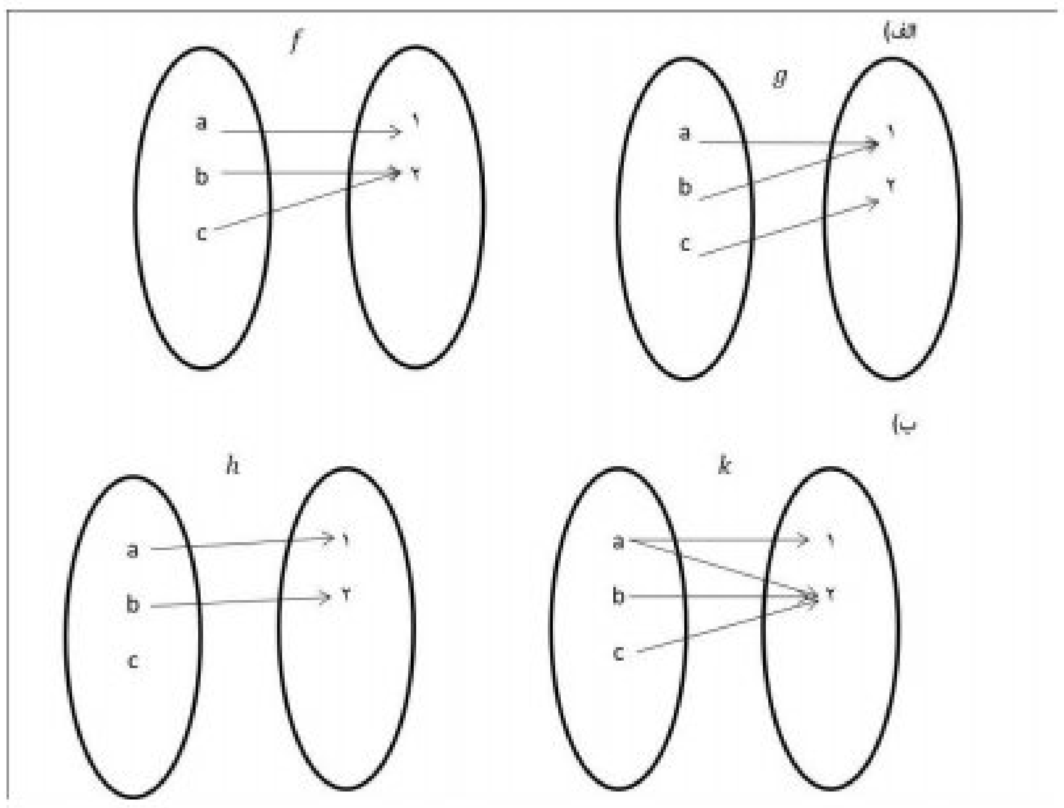
و) تابع است؛ هر عدد حقیقی فقط دارای یک ریشه‌ی سوّم است.

۲ مجموعه‌های $A=\{a , b , c\}$ و $B=\{۱ , ۲\}$ داده شده‌اند.

الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

ج) چهار رابطهٔ به‌دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.



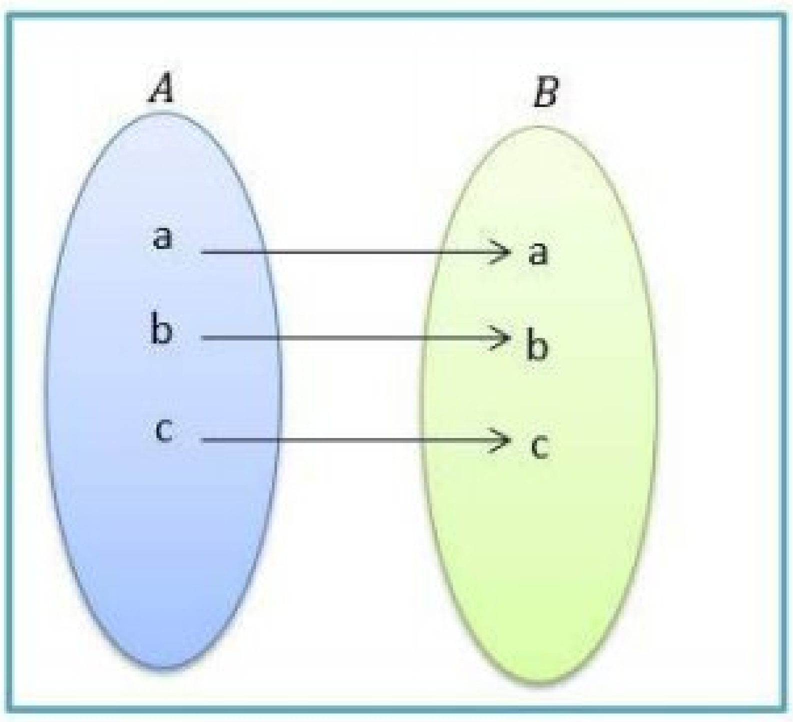
۳ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

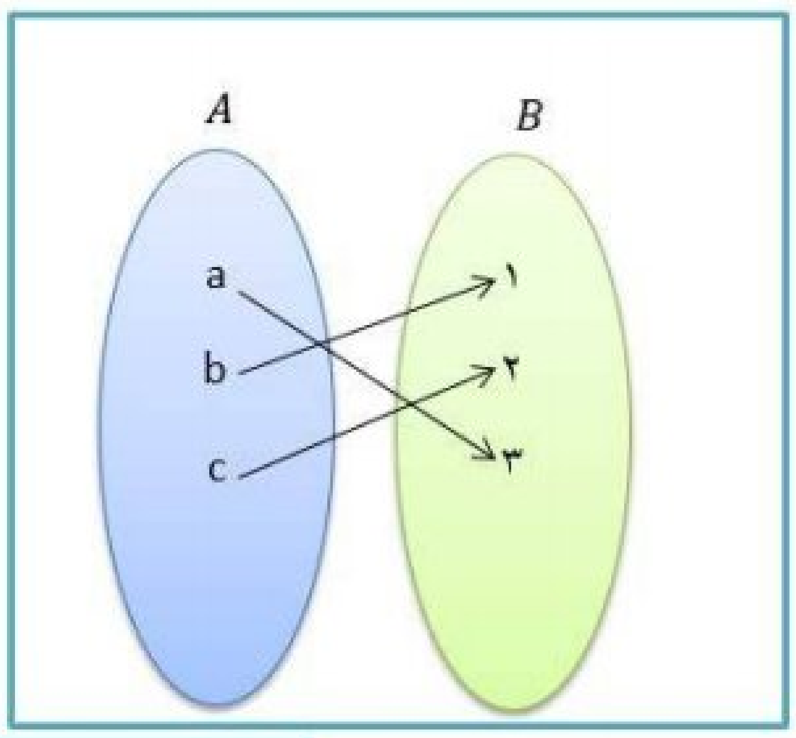
$g=\{(۰,۱) , (\frac{۳}{۵},۱) , (-۵,۱) , (۸,۱)\}$ $\qquad$ $f=\{(۲,۱) , (۳,-۵) , (۳,۷)\}$

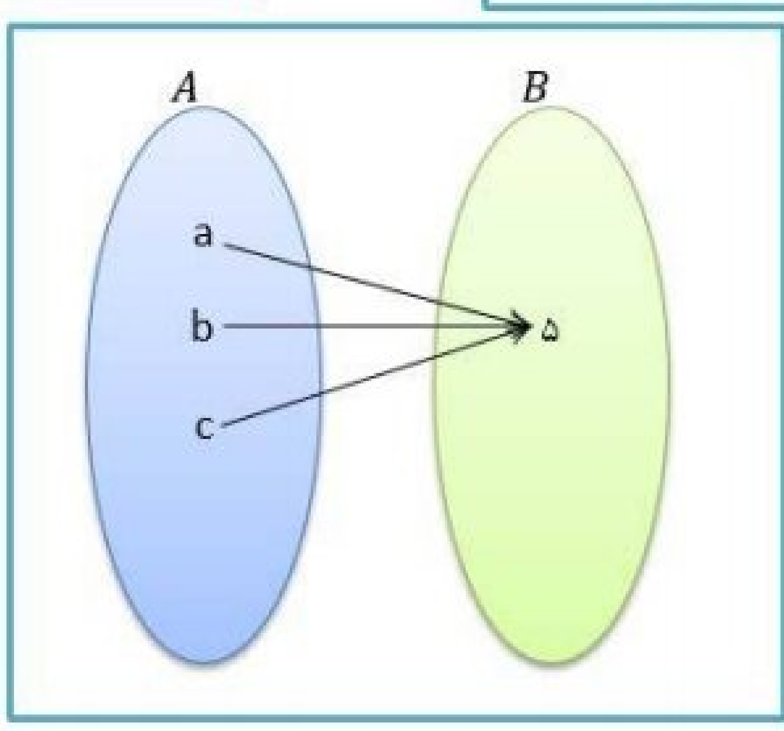
$k=\{(۲,۵)\}$ $\qquad$ $h=\{(۲,۳) , (۳,۲) , (۱,۱)\}$

$l=\{(۱,۲) , (۲,۴) , (۳,۶),...\}$ $\qquad$ $r=\{(۲,۰) , (-۷,۰)\}$

۴ A و B مجموعه‌هایی غیرعددی‌اند، در شکل زیر در A و B اعضایی دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.







تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: دامنه وبرد توابع

فعالیت

در جدول زیر رابطهٔ بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

پنج ضلعی	لوزی	مربع	مثلث	چندضلعی
٥٤٠	٣٦٠	٣٦٠	۱۸۰°	مجموع زوایای داخلی (درجه)

این رابطه را به‌صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

f = {(مثلث , ۱۸۰) , (مربع , ٣٦٠) , (لوزی , ٣٦٠) , (پنج ضلعی , ٥٤٠)}

چرا f یک تابع است؟ زیرا زوج های مرتب آن، مولفه اول یکسان ندارند.

مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ هر تابع را «دامنه» و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

در فعالیت بالا :

f دامنه = {مثلث , مربع , لوزی , پنج‌ضلعی}

f برد = {۱۸۰ , ۳۶۰ , ۵۴۰}

کار در کلاس

۱ در جدول زیر رابطهٔ بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید. $\left\{\left(\frac{۱}{۲},۲\right),(۱,۴),\left(\frac{۳}{۲},۶\right),(۲,۸),(۳,۱۲),(۵,۲۰)\right\}$

۵	۳	۲	$\frac{۳}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	طول ضلع
۲۰	۱۲	۸	٦	۴	۲	محیط

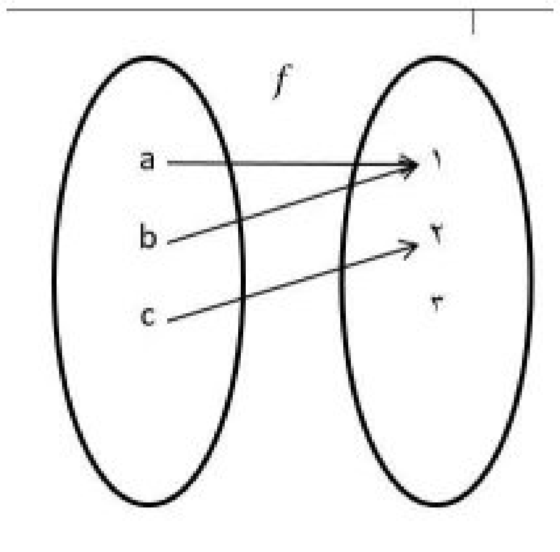
نمایش رابطهٔ داده شده را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه: $\left\{\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,۳,۵\right\}$

تابع است زیرا مولفه اول یکسان ندارد. برد: {۲,۴,۶,۸,۱۲,۲۰}

۲ الف) تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد. {(۱,۲),(۳,۴),(۴,۲)}

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنهٔ آن دوعضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر زیرا شرط تابع بودن برقرار نمی شود.

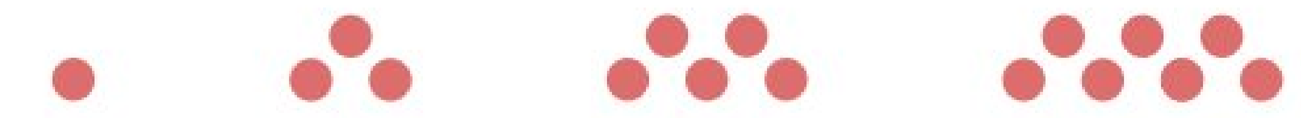
۳ اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعه B باشد، می‌دانیم که دامنهٔ f همان مجموعهٔ A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعهٔ B برابر است؟ مثال بزنید. خیر، همیشه برابر نیست.



فعالیت

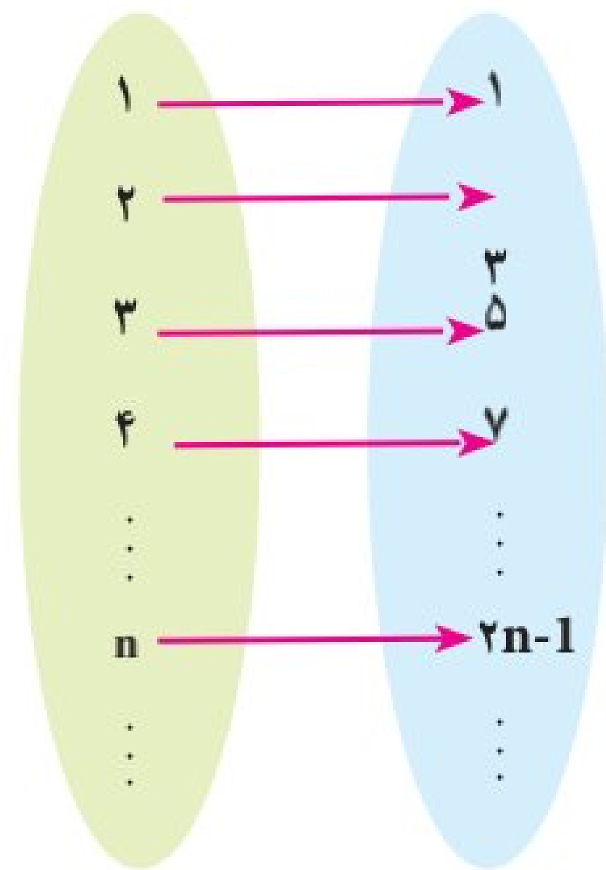
دنبالهٔ شکل‌های زیر را درنظر بگیرید :

شکل اول   شکل دوم   شکل سوم   شکل چهارم   ...



جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	۲n−۱	...



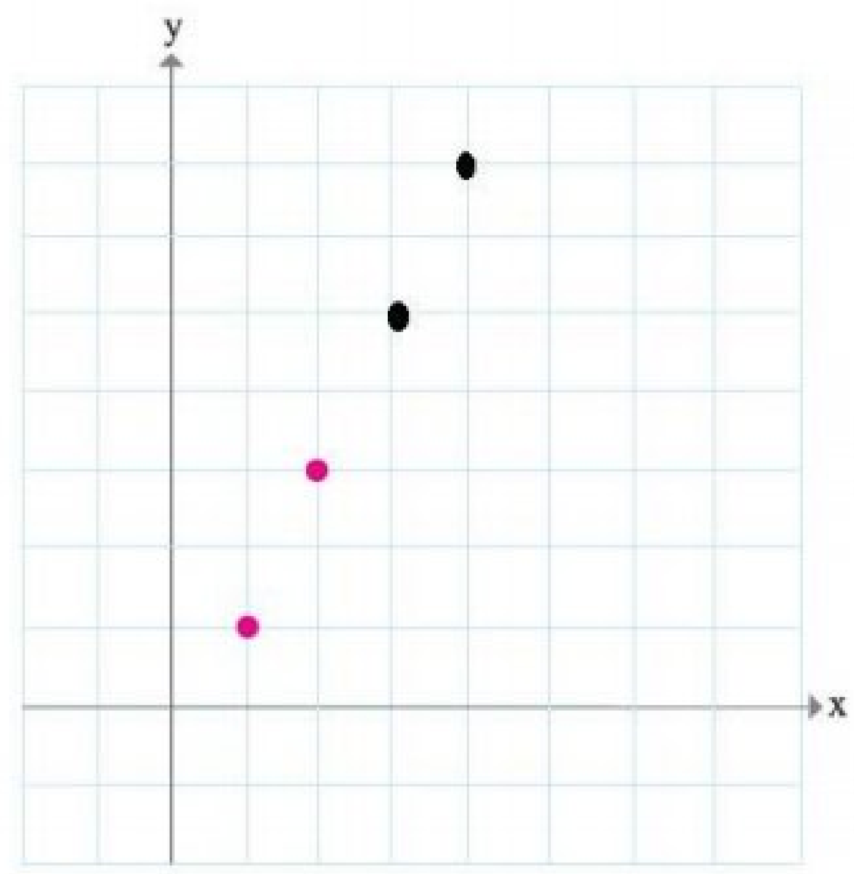
چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع : زیرا مولفه اول یکسان ندار

$\{(1,1),(2,3),(3,5),\ldots,(100,199),\ldots,(n,2n-1)\}$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.   دامنه: $\{1,2,3,\ldots,n\}$

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید. برد: $\{1,3,5,\ldots,2n-1\}$

دامنه اعداد طبیعی و برد اعداد طبیعی فرد است.



همان‌گونه که از نمایش‌های مختلف تابع دیده می‌شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می‌شود. به‌جای این می‌توان با یک قرارداد کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند f(۱)=۱ , f(۲)=۳ و گفته می‌شود که مقدار تابع f در نقطهٔ ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع f در نقطهٔ ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت :

f(۳)=۵ , f(۴)=۷ , ... , f(n) =۲n−۱ , ...

رابطهٔ بین دامنه و برد تابع f را می‌توان به‌صورت یک عبارت ریاضی به شکل f(n) =۲n−۱ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص کردن تابع f به‌صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم. دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

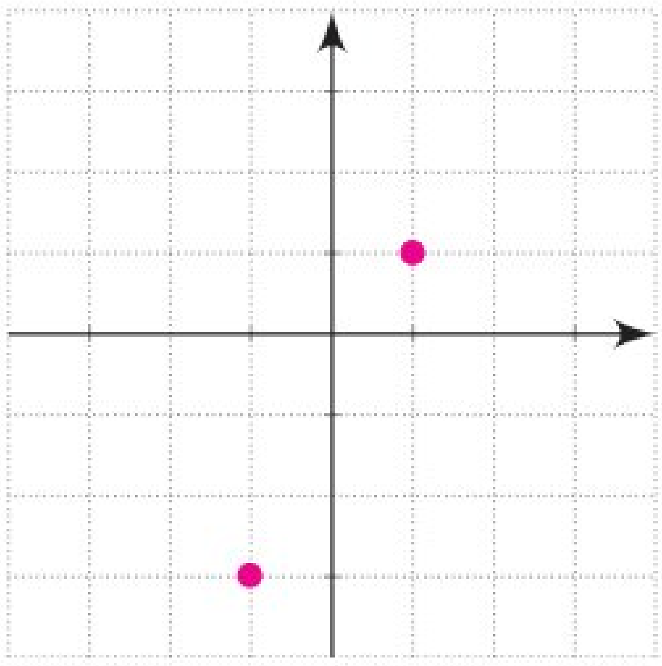
کار در کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنهٔ آن $A = \{1,2,3,4\}$ باشد، برد تابع f را به‌دست آورید.

$\{2,5,10,17\}$

کار در کلاس

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = ۲x - ۱$ استفاده کنید.



x	۱	۲	۳	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۲
y	۱	۳	۵	-۳	-۱	۰	-۲	-۵

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید. شباهت: رابطه بین اعضای دامنه و برد است. تفاوت: دامنه قبلی اعداد طبیعی است و دامنه این تابع اعداد حقیقة
تابع است زیرا دارای مولفه اول یکسان نیست.

نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ این نمودار ، نمودار یک خط است . نمودار قبلی نقطه ای بود.

دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = ۲n - ۱$ که در آن $n \in N$ مقایسه کنید.

$D_g = \mathbb{R} \ , \ R_g = \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{N} \ , \ R_f = \{۲n-۱ | n \in \mathbb{N}\}$

جاهای خالی را کامل کنید.

$g(۱۰) = ۱۹ \qquad g(\sqrt{۵}) = ۲\sqrt{۵}-۱ \qquad g(\frac{۲}{۷}) = -\frac{۳}{۷} \qquad g(۰) = -۱ \qquad g(-\frac{۱}{۵}) = -\frac{۷}{۵}$

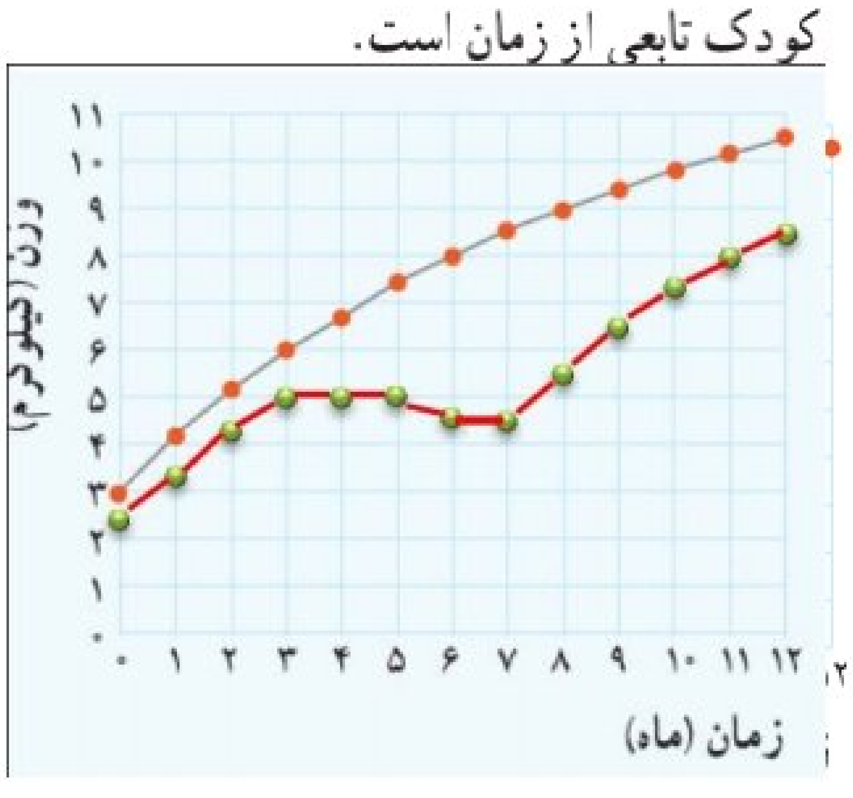
نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = ۲x-1$

در اینجا x یک عدد حقیقی است.

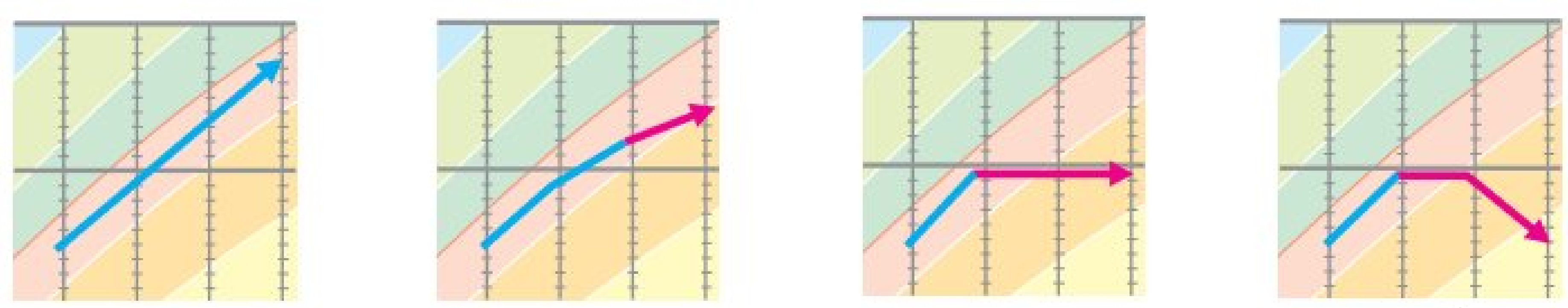
> هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

هنگامی که پزشکان می‌خواهند دربارهٔ رشد یک کودک اظهارنظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسهٔ نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.

شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد[1]. وزن یک کودک تابعی از زمان است.



شکل ۱ــ نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی



الف) رشد مطلوب — ب) کندی رشد — پ) توقف رشد — ت) اُفت رشد

شکل ۲

فعالیت

جدول زیر نشان دهندهٔ وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

۱ــ برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

الف) به نظر شما در فاصلهٔ زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ رشد مطلوب

ب) در چه فاصلهٔ زمانی‌ای وزن او ثابت مانده است؟ ۳ تا ۵ ماهگی

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به‌دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به‌دست آید. با مقایسهٔ این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

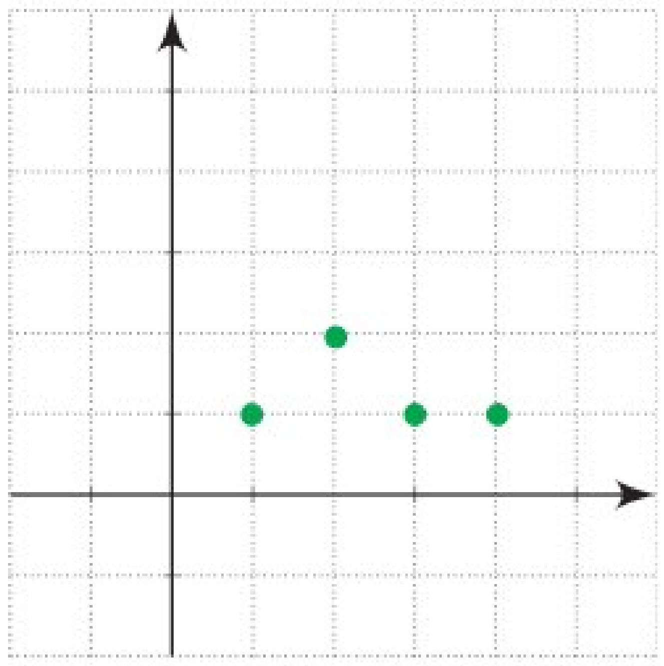
وزن کودک در فاصلهٔ بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصلهٔ بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

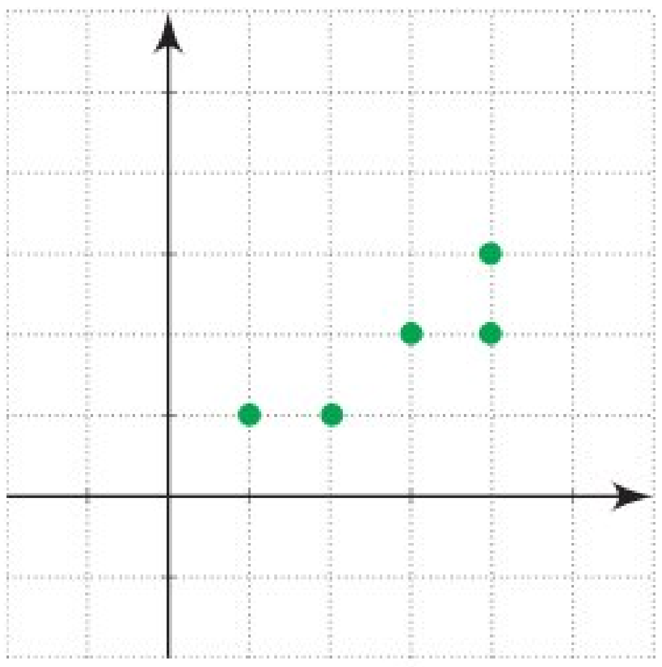
ت) دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

D = {۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲}   R = {۲/۸,۳/۳,۴/۲,۵,۴/۸,۴/۵,۵/۵,۶/۵,۷/۲,۸,۸/۵}

کار در کلاس

کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.


تابع است


تابع نیست

می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

$D=\{1,2,3,4\}$

$R=\{1,2\}$

با تکمیل جملهٔ زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به‌صورت نمودار ارائه می‌شود، به‌دست آورید.

> اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در ..یک نقطه.............. قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانهٔ سالمندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می‌رسند. منظور از سالمندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت تثبیت وضعیت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیرترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. این در حالی‌است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. نتایج پیش بینی‌های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات حجم جمعیت ایران تا ۱۰۰ سال آینده نشان می‌دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

نمودار پیش‌بینی گروه سنی ۶۰سال و بالاتر

[redacted]

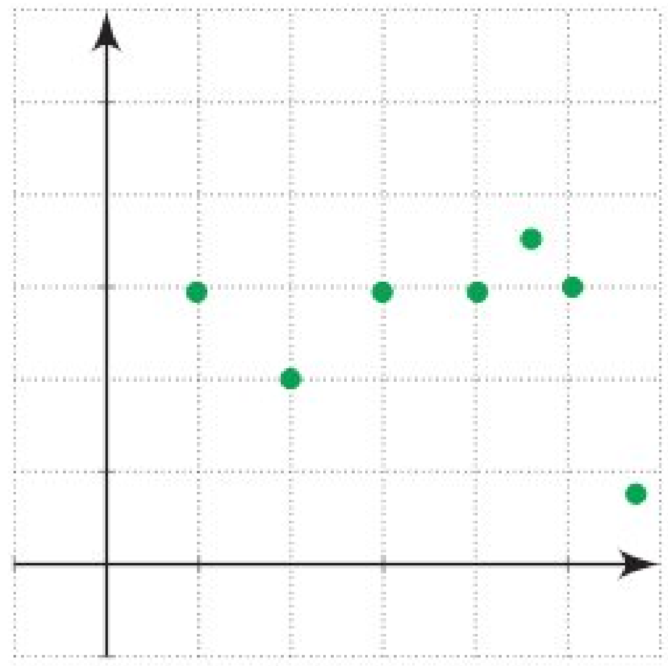
نسبت جمعیت سالمند ایران در طی سال‌های سرشماری

[redacted]

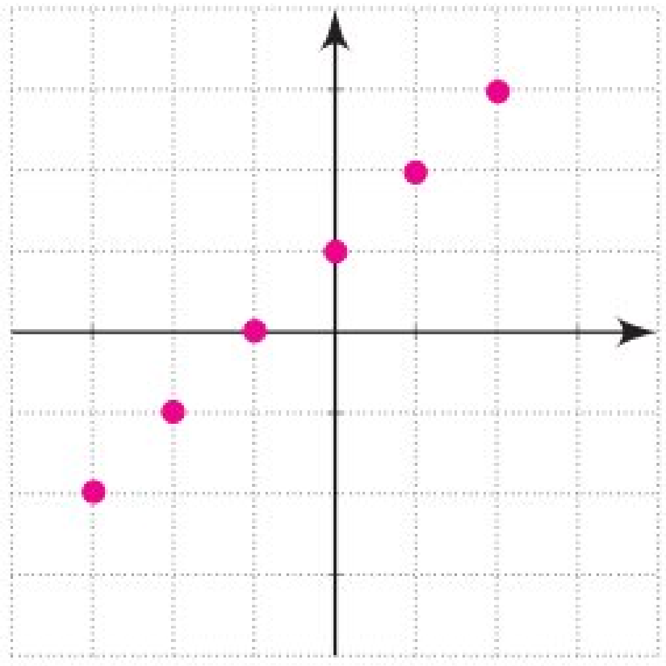
سال‌های سرشماری

کار در کلاس

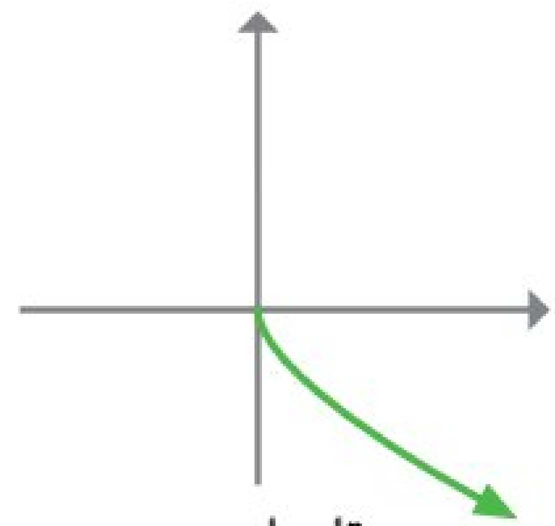
کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



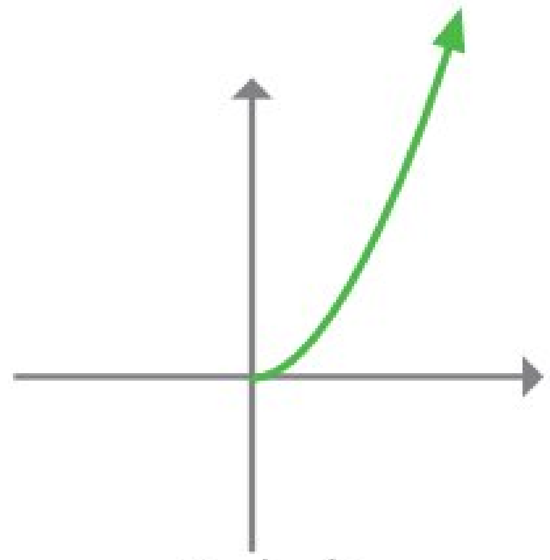
تابع است



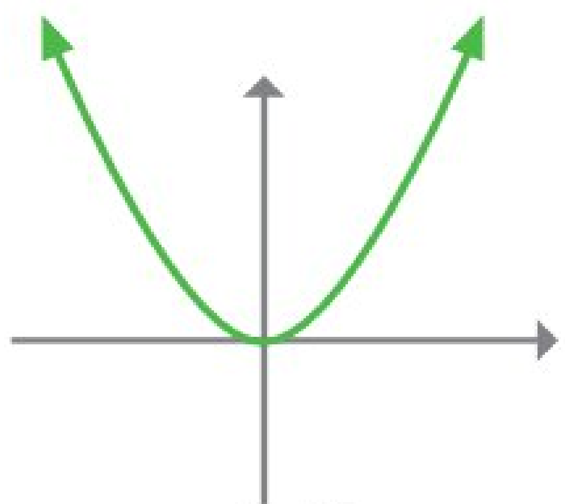
تابع است



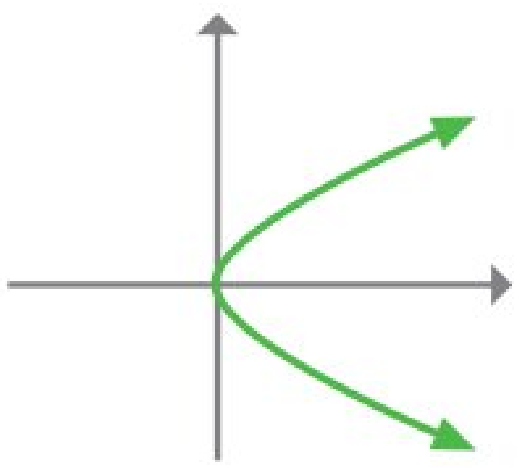
تابع است



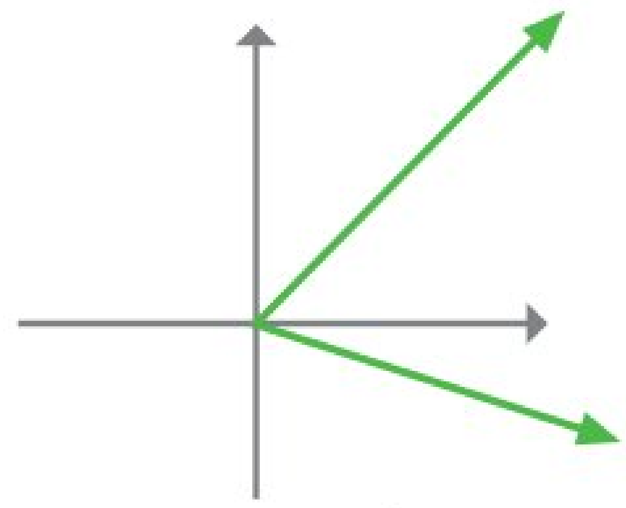
تابع است



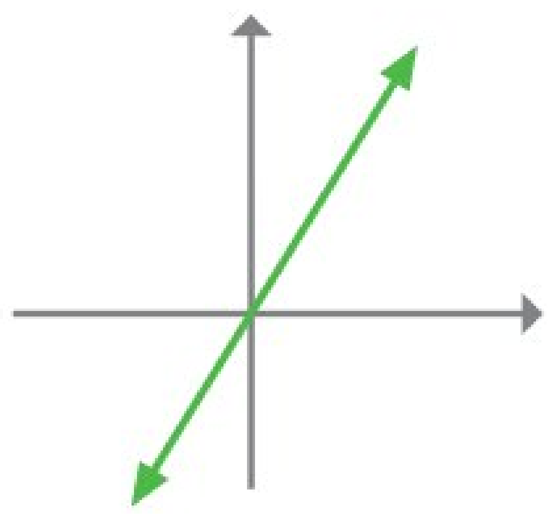
تابع است



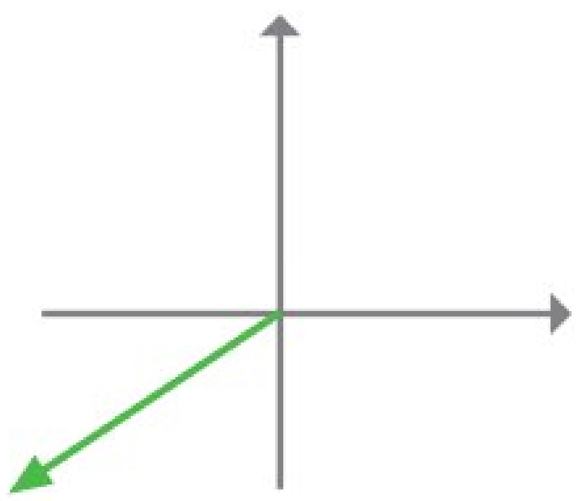
تابع نیست



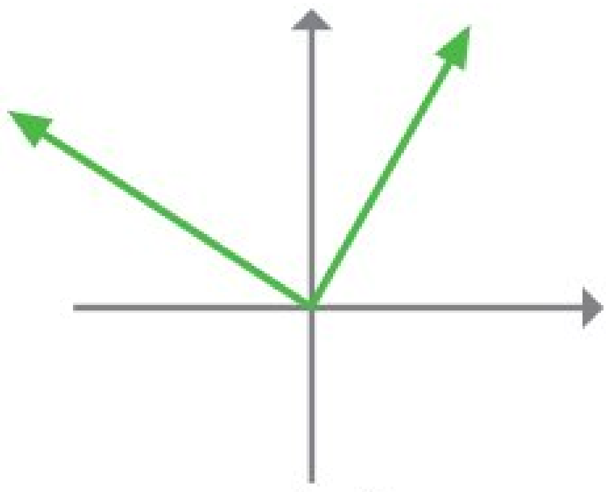
تابع نیست



تابع است



تابع است

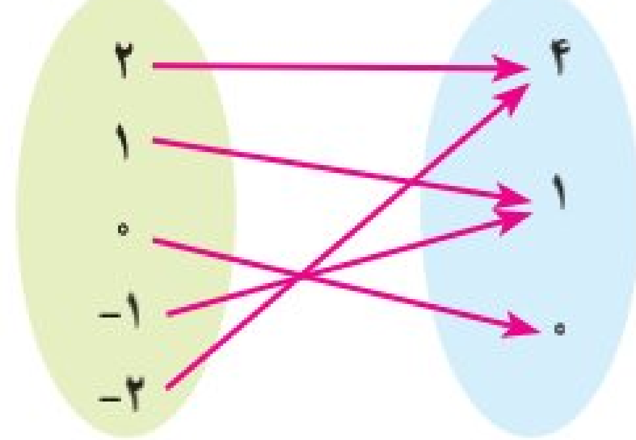


تابع است

تمرین

۱ کدام‌یک تابع است؟

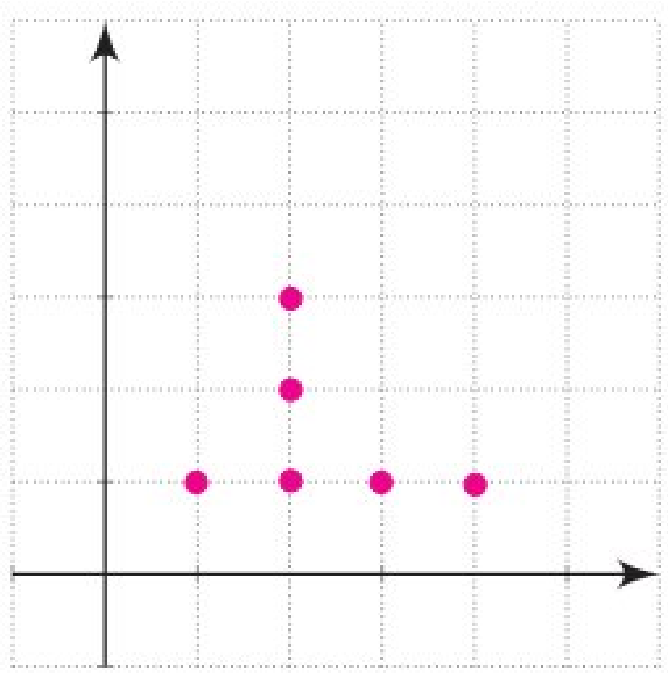
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



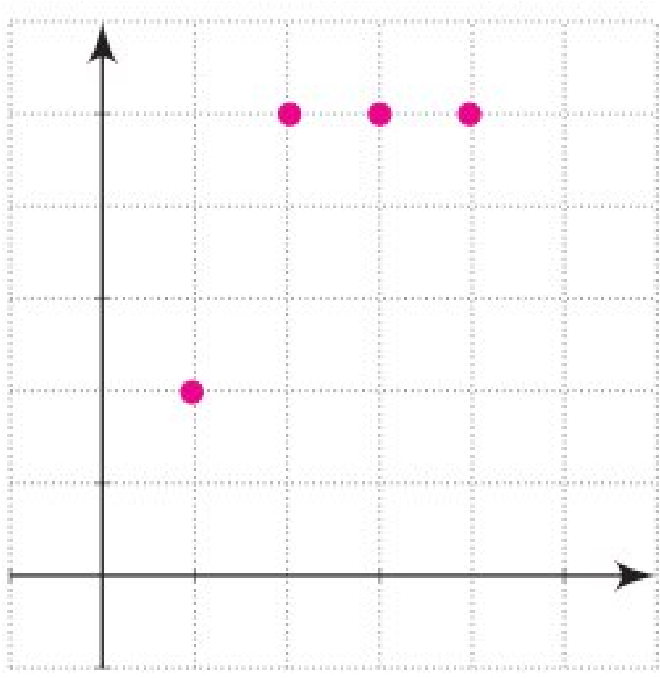
تابع است

$D=\{۱,۲,۰,-۲,-۱\}$

$R=\{۴,۱,۰\}$



تابع نیست



تابع است

$D=\{۱,۲,۳,۴\}$

$R=\{۲,۵\}$

۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنهٔ آن تنها شامل دو عضو باشد. $\{(۲,۱),(۳,۴)\}$

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد. $\{(۱,۱),(۲,۱)\}$

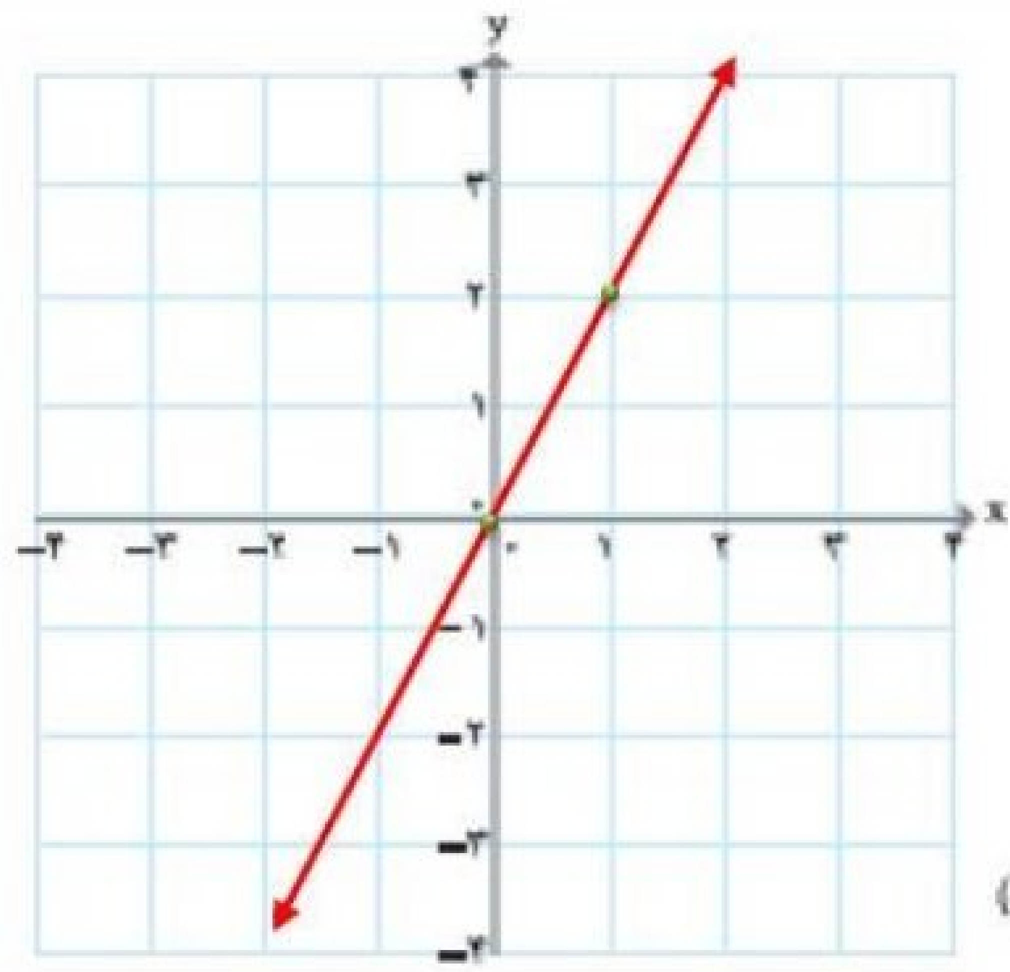
پ) دامنهٔ آن تنها یک عضو داشته باشد. $\{(۵,۱)\}$

ت) دامنهٔ آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. $\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),\ldots\}$

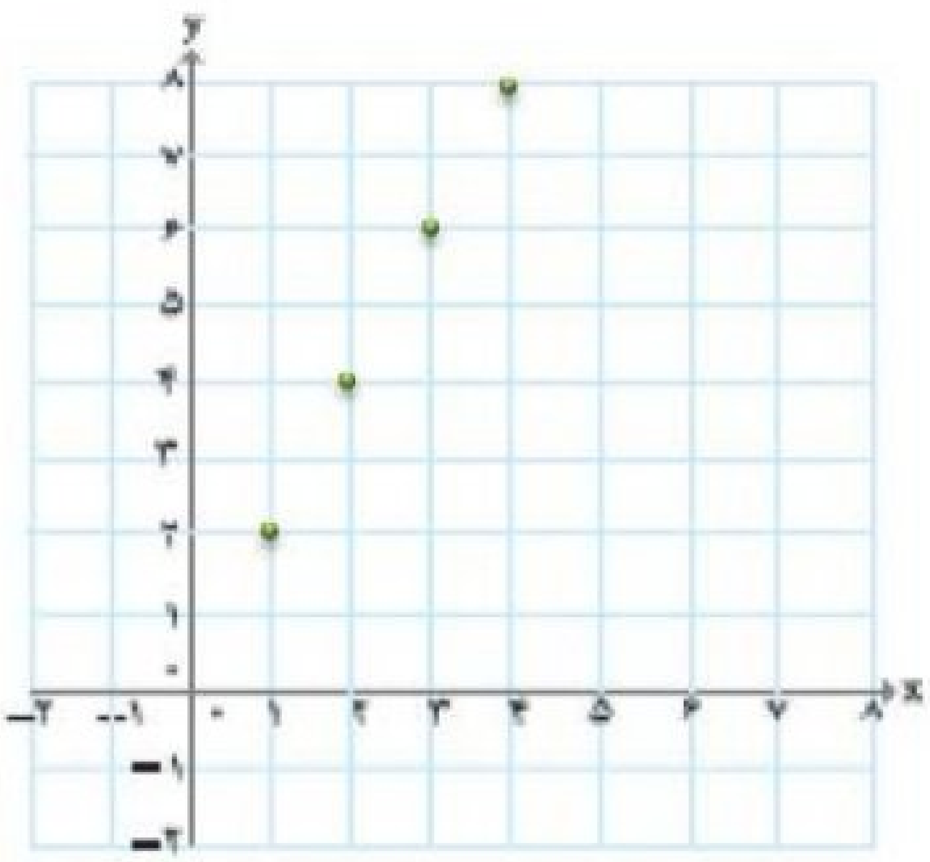
ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند. $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),\ldots\}$

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

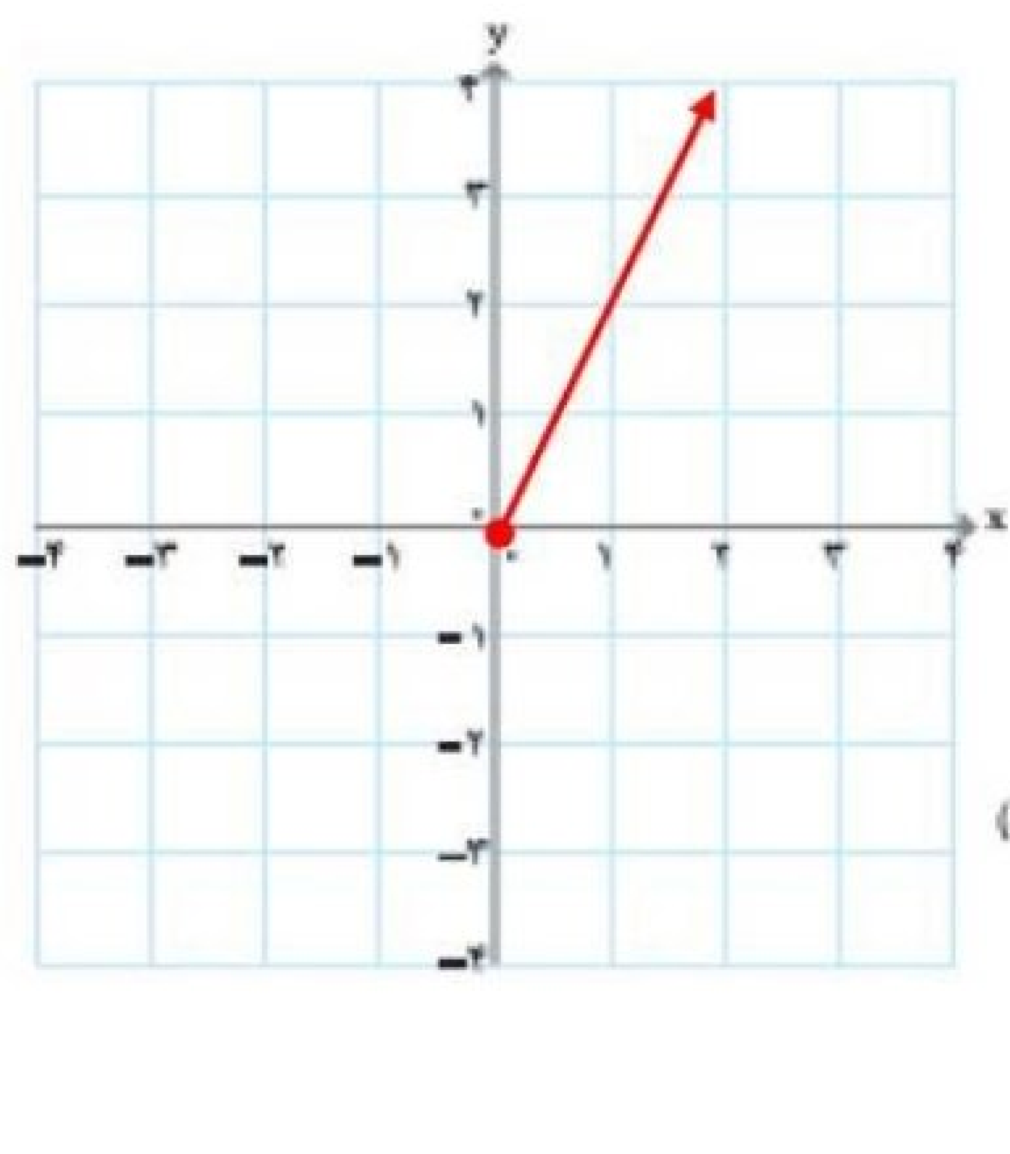
	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	f(x) = ۲x	g(x) = ۲x	h(x)= ۲x	y = ۲x
دامنه	{۱ , ۲ , ۳ , ۴}	مجموعهٔ اعداد حقیقی	[۲ , ۳]	مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی
برد	{۲،۴،۶،۸}	مجموعهٔ اعداد حقیقی	[۴،۶]	مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی



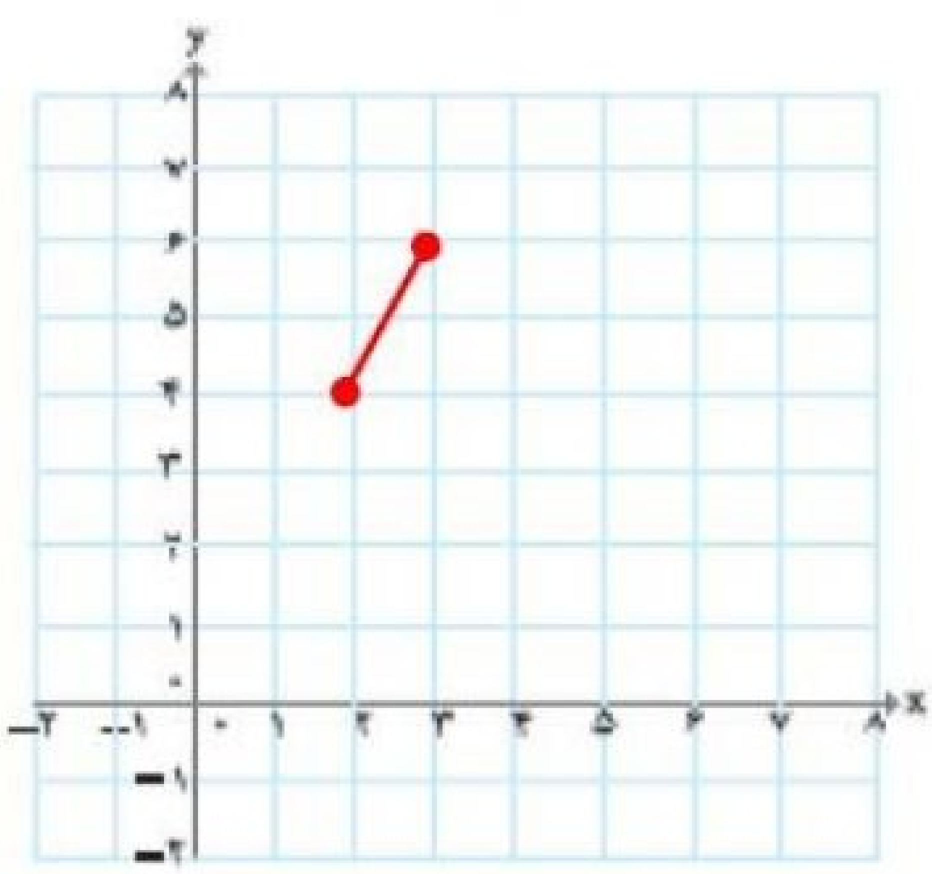
(ب)



(الف)

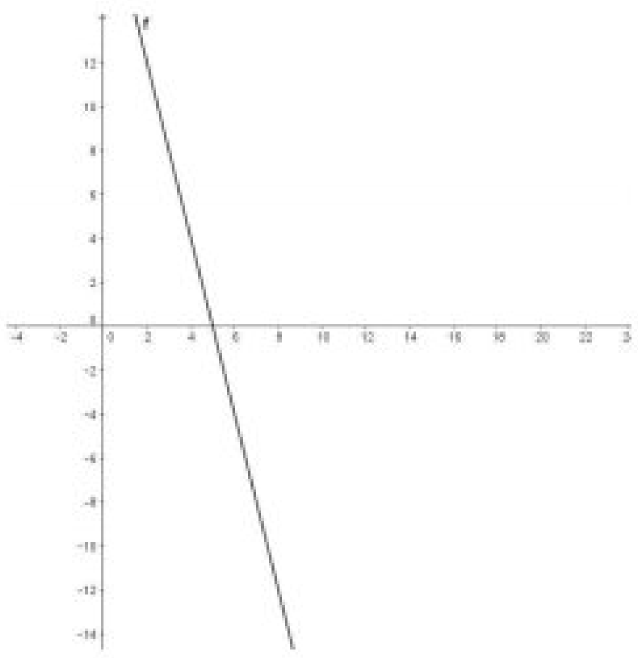


(ت)



(پ)

۴ یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.



x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۸

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟ زیرا نمودار آن ، خط راست است.

۵ آیا خط $x = 2$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟ خیر زیرا موازی محور عرض هاست و خط موازی این محور این خط را در بیش از یک نقطه قطع می کند.

بله زیرا خط موازی محور عرض ها ، این خط را در یک نقطه قطع می کند.

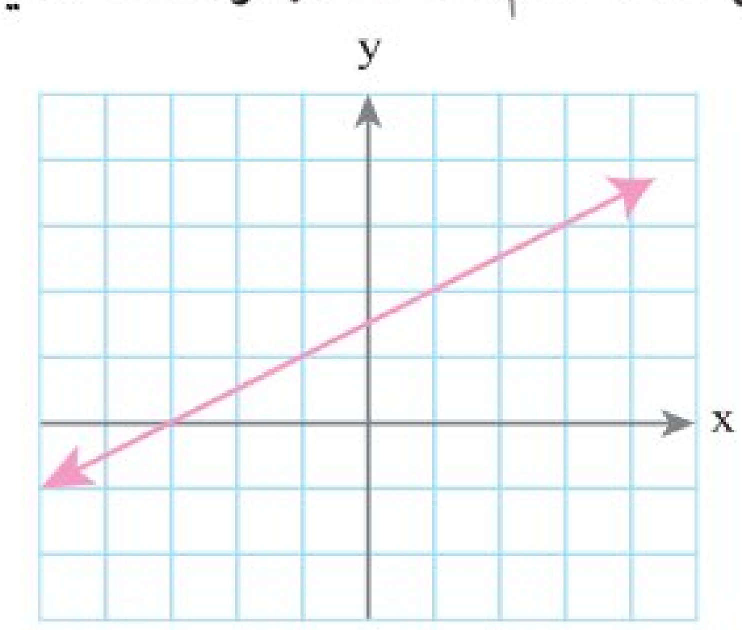
یک خط اگر موازی محور عرض ها نباشد تابع است.

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنهٔ آن بازه [۳,۵−] باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع وجود دارند؟ هرتعداد که بخواهیم.

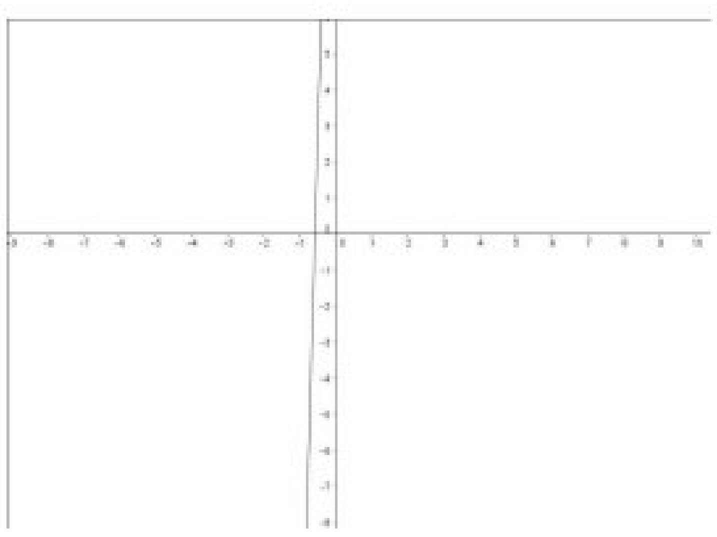
$$f(x) = ۲x + ۴ \quad , D_f = [-۳,۵]$$
$$g(x) = x - ۳ \quad , D_g = [-۳,۵]$$
$$h(x) = -۳x + ۲ \quad , D_h = [-۳,۵]$$

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به‌دست آورید.

از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام‌یک مناسب‌تر است؟ نمایش جبری



$$f(x) = \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$$



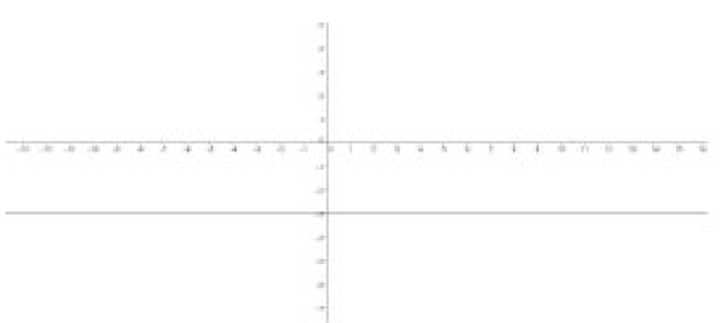
۸ جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید. زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

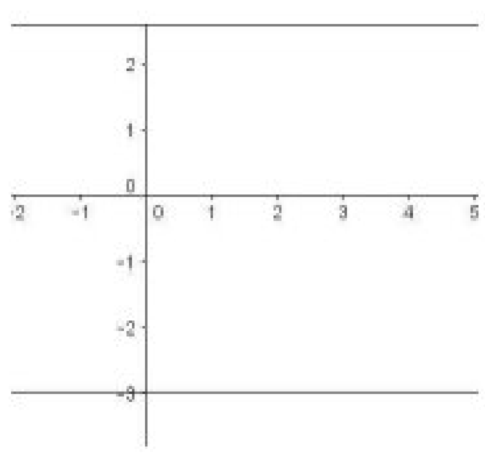
ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید. $f(x) = ۳۵x + ۲۰$

پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیرزمین است، بیابید. $f(۱۰) = ۳۵ \times ۱۰ + ۲۰ = ۳۷۰$



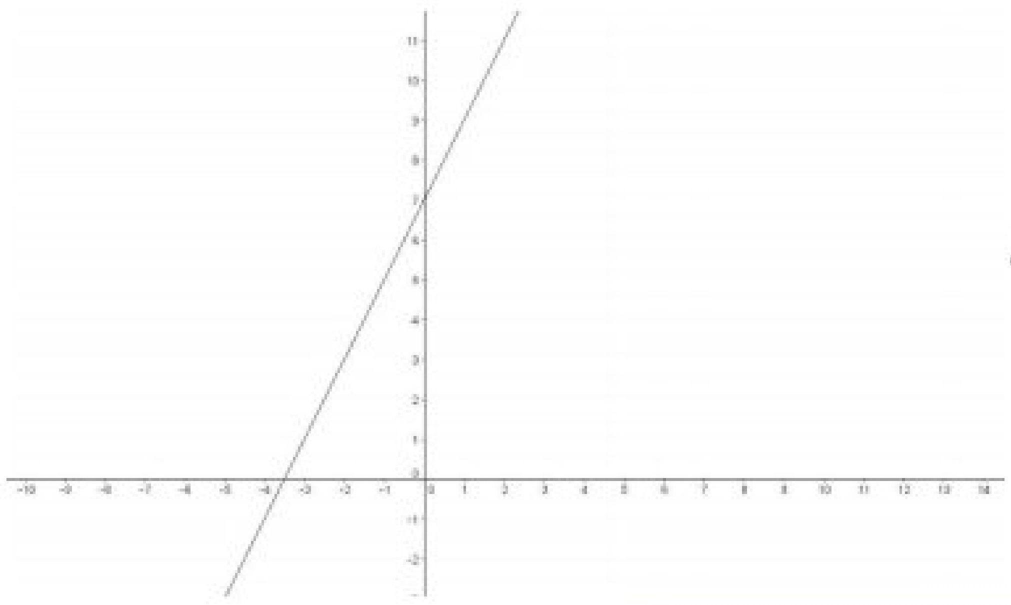
۹ الف) تابع $f(x) = -۳$ را رسم کنید و مقادیر $f(۲)$ و $f(۱۰۰)$ و $f(-۵)$ و $f(\sqrt{۵})$ و $f(\frac{۳}{۴})$ را به‌دست آورید.

چون تابع ثابت است ، تمام مقادیر برابر ۳− است.



ب) اگر دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید. همان شکل فوق

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنهٔ آن بازهٔ [۵ , ۲−] باشد، نیز رسم کنید.



۱۰ برای یک تابع خطی می‌دانیم که : ۱۱ = f(۲) و ۷ = f(۰) . نمودار این تابع را رسم کنید

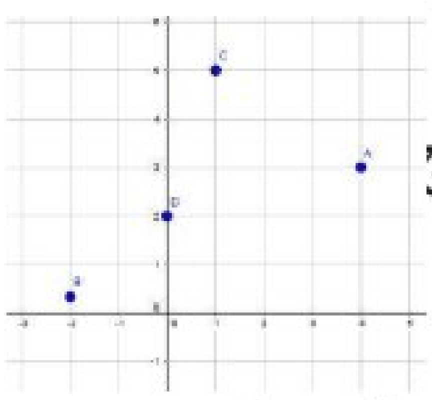
۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟ زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۲ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۰/۱ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با f(t) نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به‌دست می‌دهد؟ قسمت ب

الف) $f(t) = t - ۰/۱$ ب) $f(t) = ۰/۱t$

پ) $f(t) = t + ۰/۱$ ت) $f(t) = ۰/۱ - t$



۱۳ اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم : $g(۰) = ۲,\ g(۱) = ۵,\ g(-۲) = \frac{۱}{۳},\ g(۴) = ۳$؛ g را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$\left\{(۴,۳),\left(-۲,\frac{۱}{۳}\right),(۱,۵),(۰,۲)\right\}$$

۱۴ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطهٔ $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) ۲۰- درجهٔ سانتی‌گراد، چند درجهٔ فارنهایت است؟ ٤- درجه

ب) ۱۰۴ درجهٔ فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟ ٤٠ سانتی گراد

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به‌دست دهد.

$$F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲ \to F - ۳۲ = \frac{۹}{۵}C \to ۵(F - ۳۲) = ۹C$$
$$C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$$

ت) آیا رابطهٔ بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟ بله ، یک تابع خطی است.

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

$$P = ۲(x + y) = ۲(x + ۳ + x) = ۲(۲x + ۳) = ۴x + ۶$$

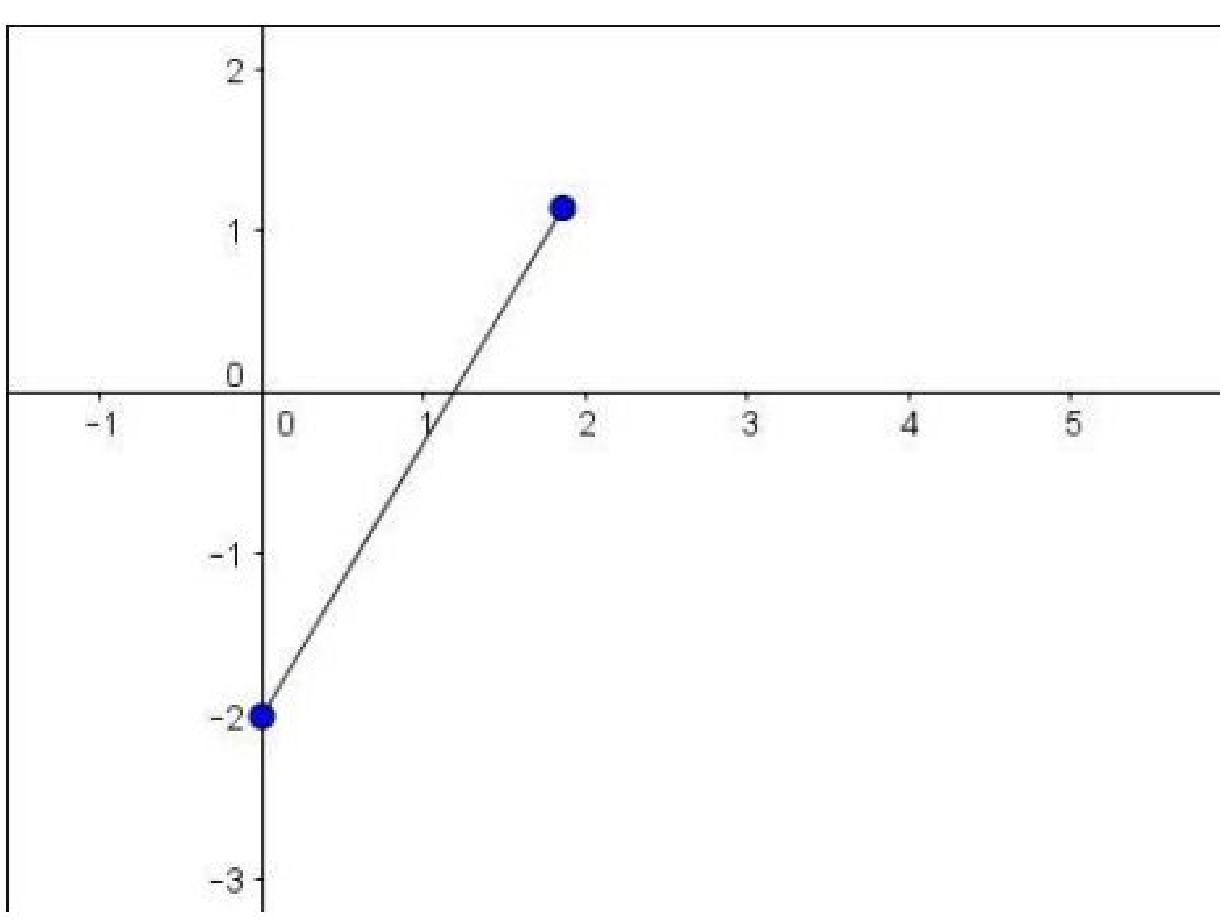
۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن [۰,۲] و برد آن [-۲ ,۱] باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟ هرتعداد که بخواهیم.

حل ١٦:

$$f = \{(۲,۱),(۳,۴)\}$$
$$g = \{(۳,۱),(۲,۴)\}$$

حل ١٧:



تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: انواع توابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	x	۱۲	۱۰	۲/۵	٤	۳	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰/۱
مساحت آن	$x^{۲}$	۱۴۴	۱۰۰	٦/۲٥	۱۶	۹	۱	۰/۲٥	۰/۰۱

شعاع دایره	r	۱۰	۵	۳	۲	$\frac{۱}{۲}$
مساحت آن	$r^{۲}\pi$	۱۰۰π	۲۵π	۹π	۴π	$\frac{\pi}{۴}$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از ......x...... است و به‌صورت .... $f(x) = x^{۲}\pi$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از ......r... است و به‌صورت ..... $g(r) = r^{۲}\pi$ قابل نمایش است.
چون f و g به‌صورت یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم.
حجم یک کره را برحسب یک تابع درجهٔ سوم از r (شعاع کره) بنویسید :

$V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای‌اند :

$f(x) = ۲x^{۲}+۵x+۱$ $\qquad$ $g(x) = ۴x^{۲}-۳$

$h(a) = a^{۳}+۲a^{۲}-۴a-۹$ $\qquad$ $r(t) = -\frac{۳}{۵}t^{۴}+t+\sqrt{۲}$

تابع f را به‌صورت $y = ۲x^{۲} + ۵x + ۱$ نیز نمایش می‌دهند. بقیهٔ توابع رانیز به این‌صورت نمایش دهید.

فعالیت

شباهت : هر عدد دامنه به همان عدد نسبت داده می شود.

۲ دامنه و برد توابع زیر را به‌دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟تفاوت: دامنه ها و در نتیجه بردها متفاوت هستند.

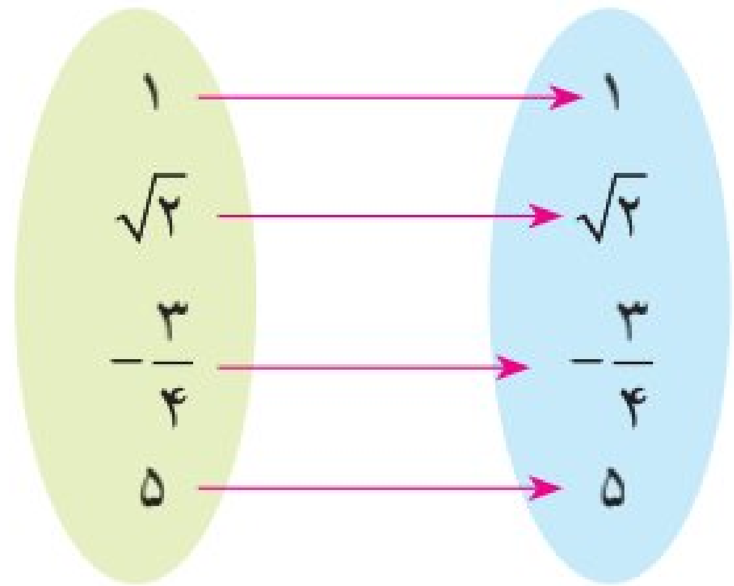
$D = \{1, \sqrt{2}, -\frac{3}{4}, 5\}$

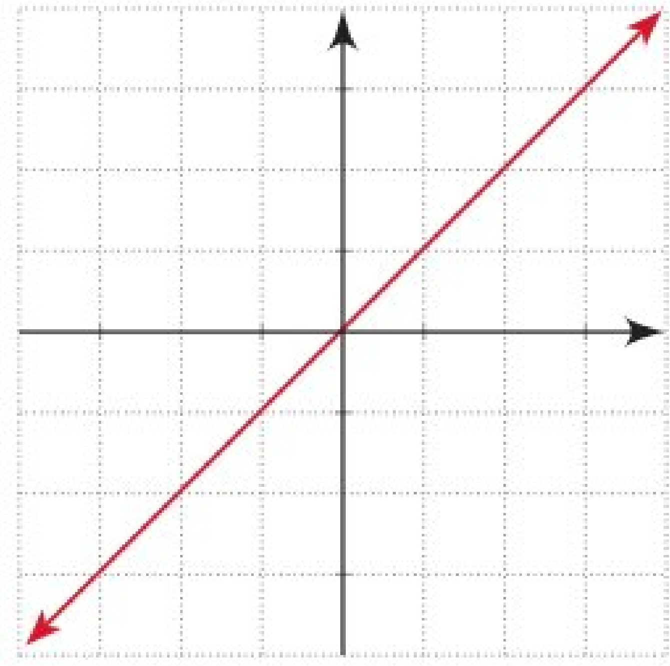
$R = \{1, \sqrt{2}, -\frac{3}{4}, 5\}$

$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

$D_f = \{a, b, c\}$

$R_f = \{a, b, c\}$





$D = \mathbb{R}$

$R = \mathbb{R}$

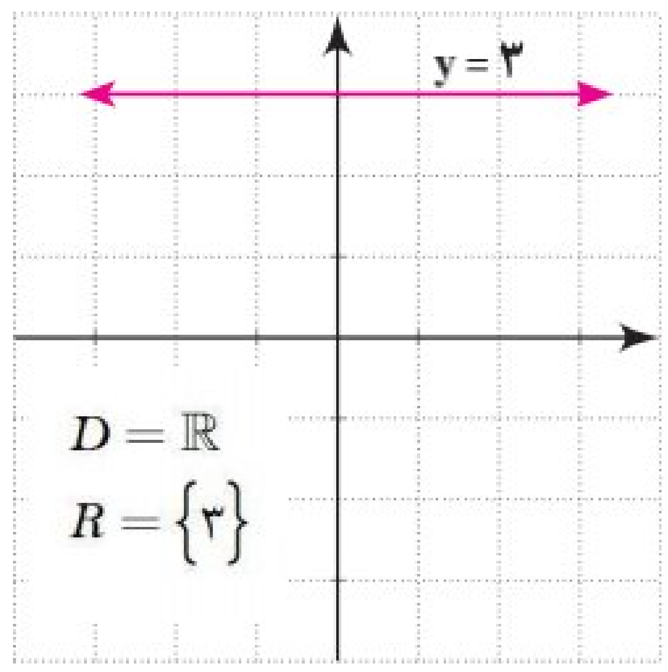
اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.
اگر دامنهٔ تابع همانی را $\mathbb{R}$ درنظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادلهٔ $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟ در هر سه تابع ، اعضای دامنه به یک عدد ثابت نسبت داده می شود.

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹

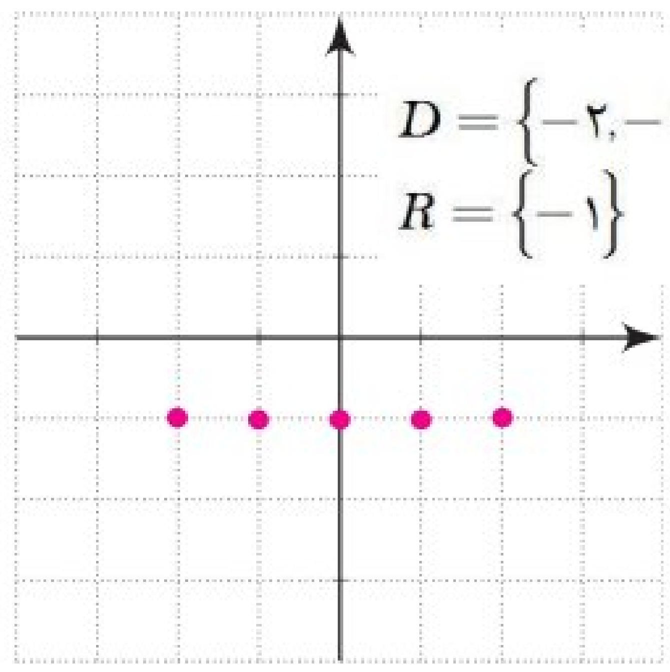
$D = \{8, 9, 10\}$

$R = \{19\}$



$D = \mathbb{R}$

$R = \{3\}$



$D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$R = \{-1\}$

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادلهٔ $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید.

$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنهٔ آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد.

$\{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (2,2), (5,5)\}$

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

$\{(1,3), (3,1)\}$

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنهٔ آن ۵ عضوی باشد.

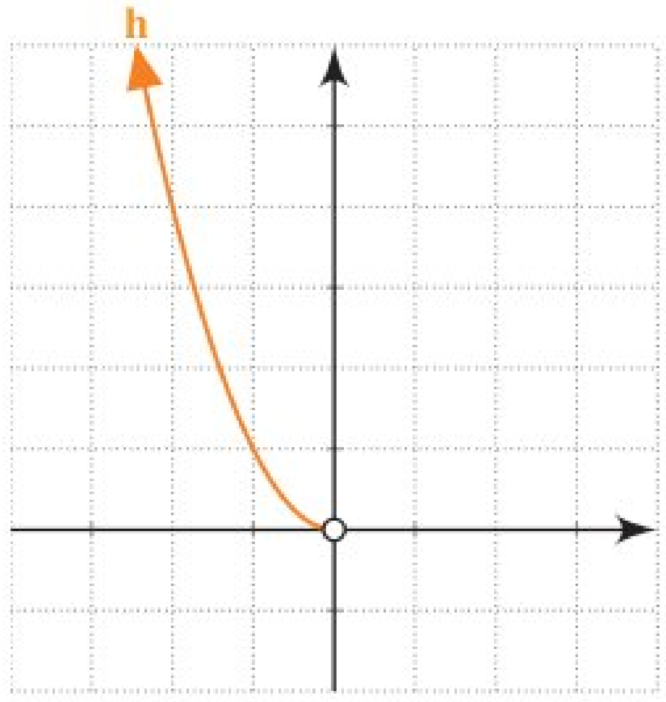
$\{(4,1), (3,1), (-2,1), (2,1), (5,1)\}$

مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

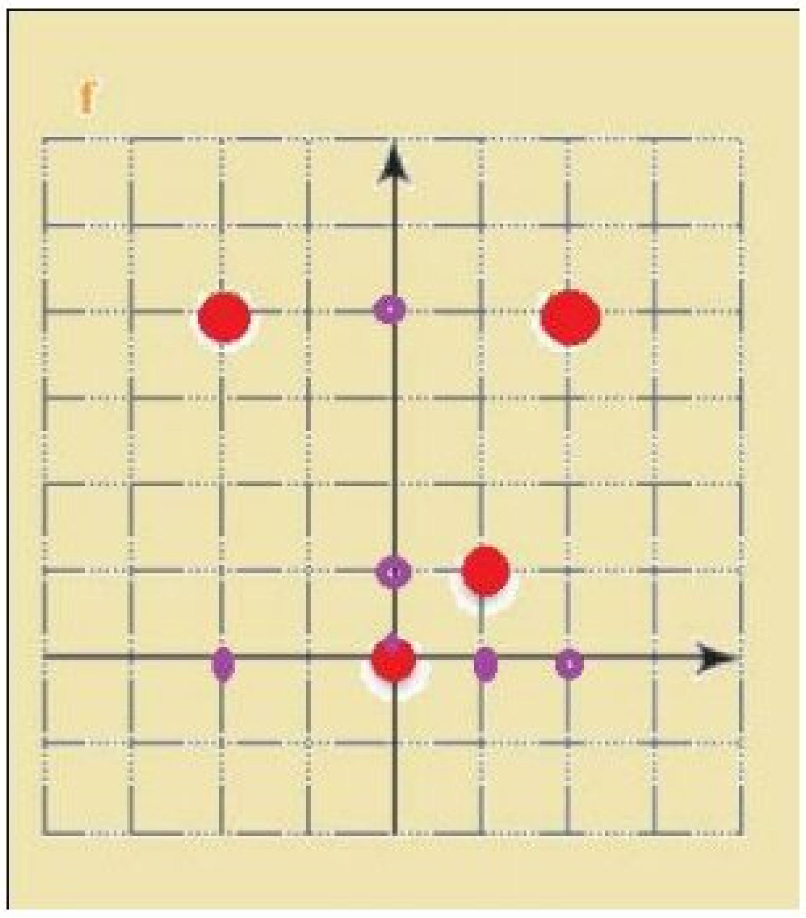
تابعی که دامنه اش افراد یک کلاس درس پایه دهم باشند و بردش دبیر ریاضی آن کلاس باشد.

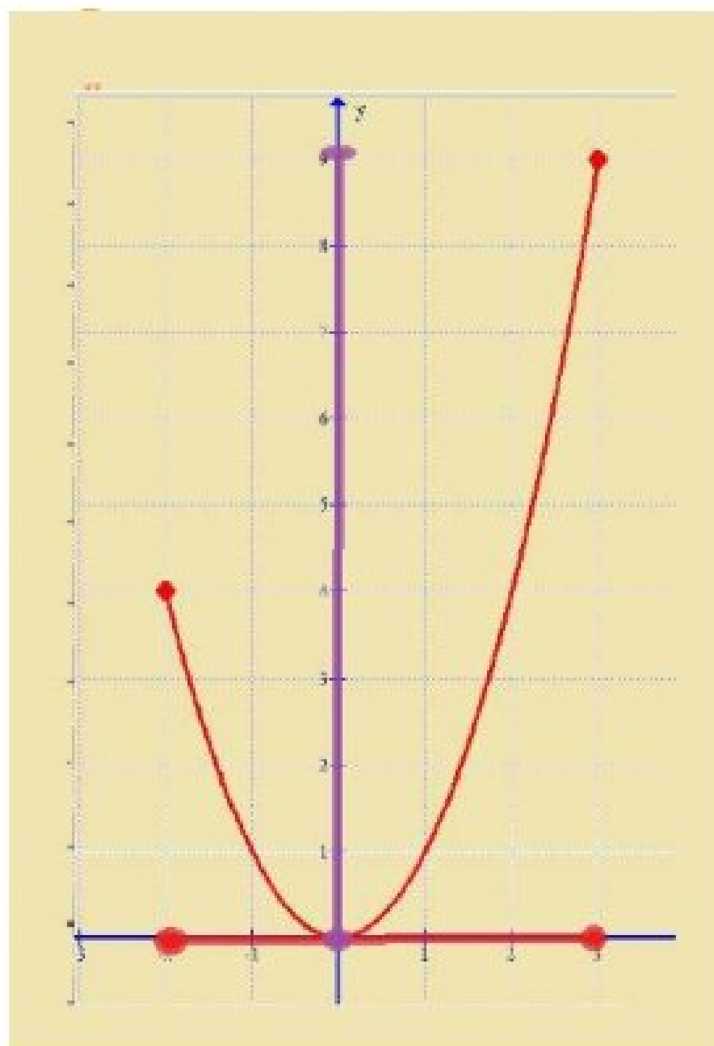
۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.

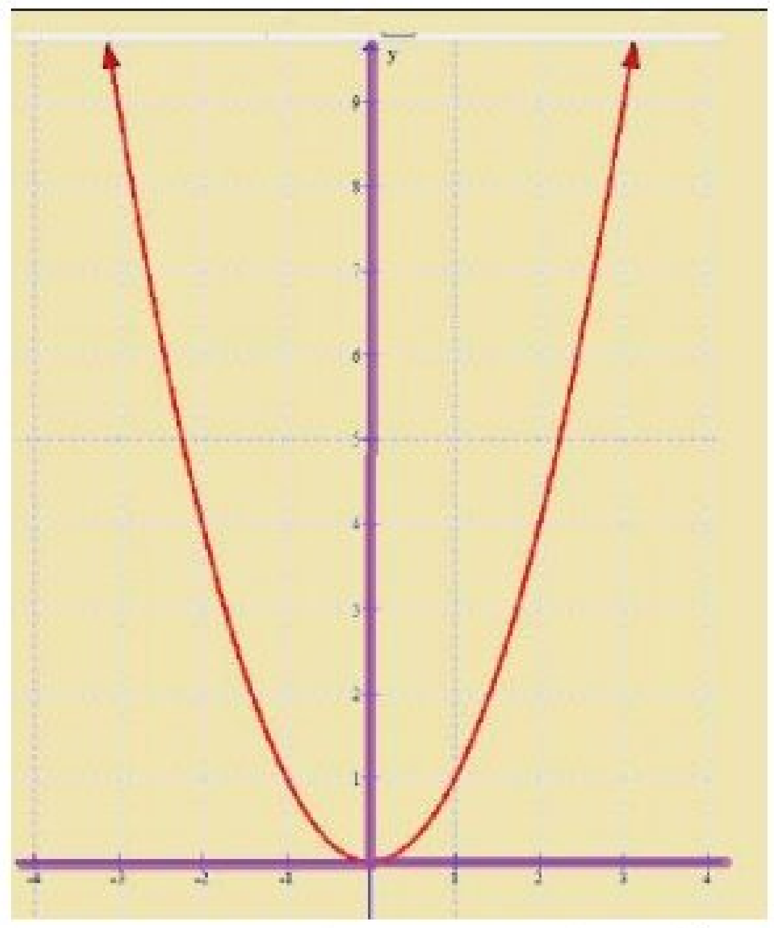
تابع	$f(x)=x^۲$	$g(x)=x^۲$	$h(x)=x^۲$	$t(x)=x^۲$
دامنه	$\{-۲,۰,۱,۲\}$	$[-۲,۳]$	مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی	مجموعهٔ اعداد حقیقی
برد	$R=\{۴,۰,۱\}$	$[۰,۹]$	$(۰,+\infty)$	$[۰,+\infty)$



دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



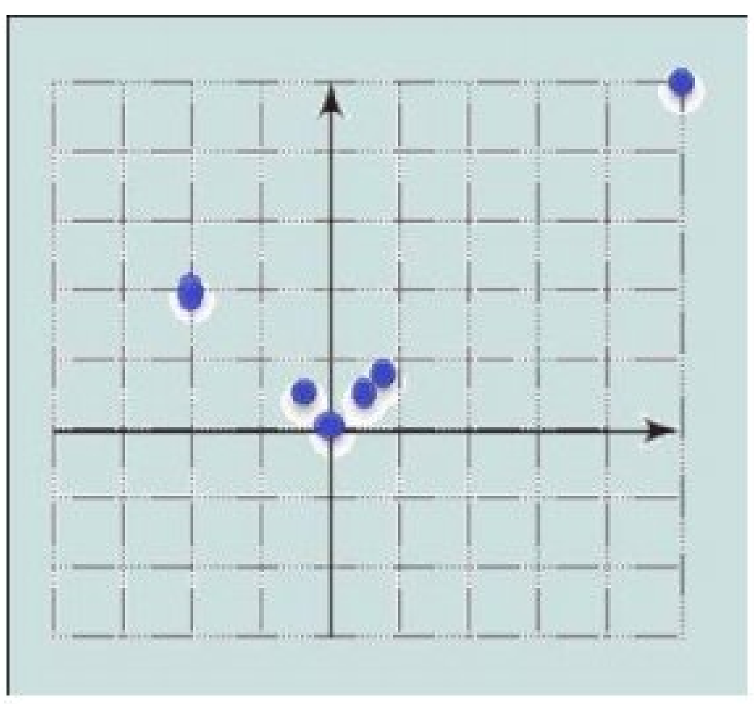




تذکر : اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنهٔ آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعهٔ ممکن را دامنه درنظر می‌گیریم. مثلاً دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲$ را مجموعهٔ اعداد حقیقی درنظر می‌گیریم. در غیراین‌صورت باید دامنه را به‌طور دقیق مشخص کنیم.

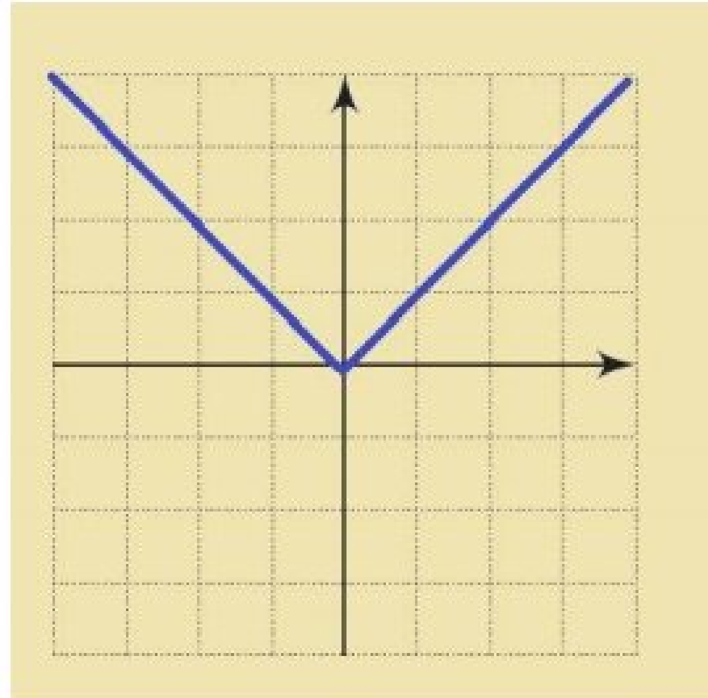
فعالیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید. دامنه این تابع اعداد سطر اول و برد آن اعداد سطر دوم جدول زیر می باشند.



x	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	۵
f(x)	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	۵

تابعی که هر مقدار در دامنه را به‌قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ یا $y=|x|$ نمایش می‌دهند.



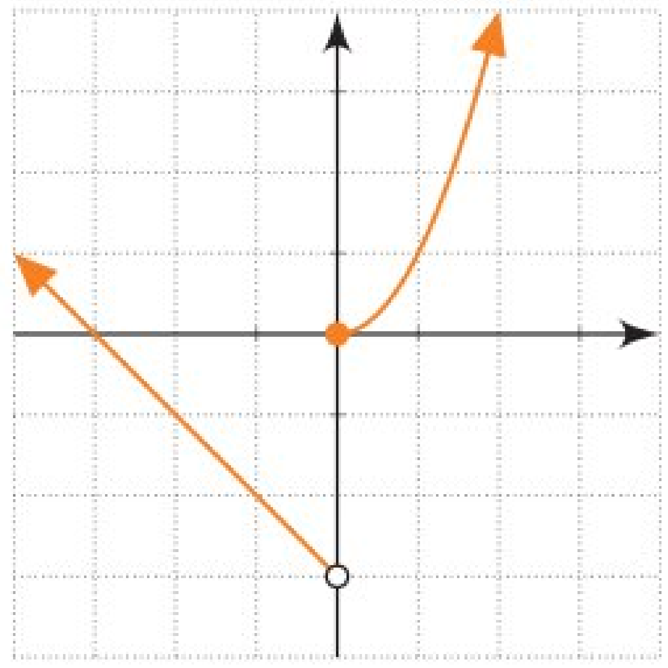
اگر دامنهٔ یک تابع قدرمطلق مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

تابع قدرمطلق را به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ نیز نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه برای $x\geq ۰$ و $x<۰$ تابع دارای معادله‌های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

مثال

تابع مقابل نیز یک تابع قطعه‌ای است.



$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x-۳ & x<۰ \end{cases}$$

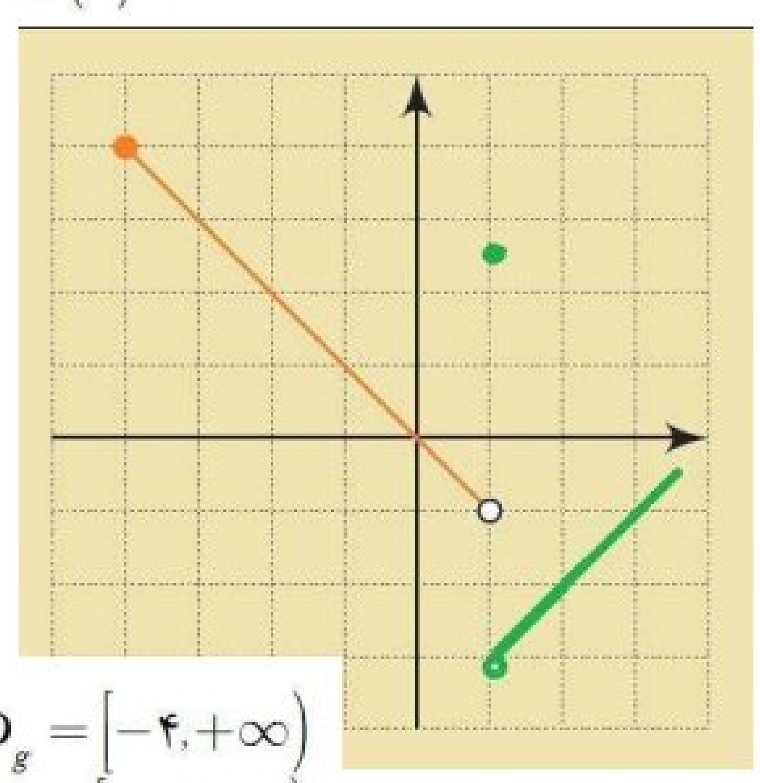
نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y=x^{۲}$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y=-x-۳$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

فعالیت

توابع f، g، h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

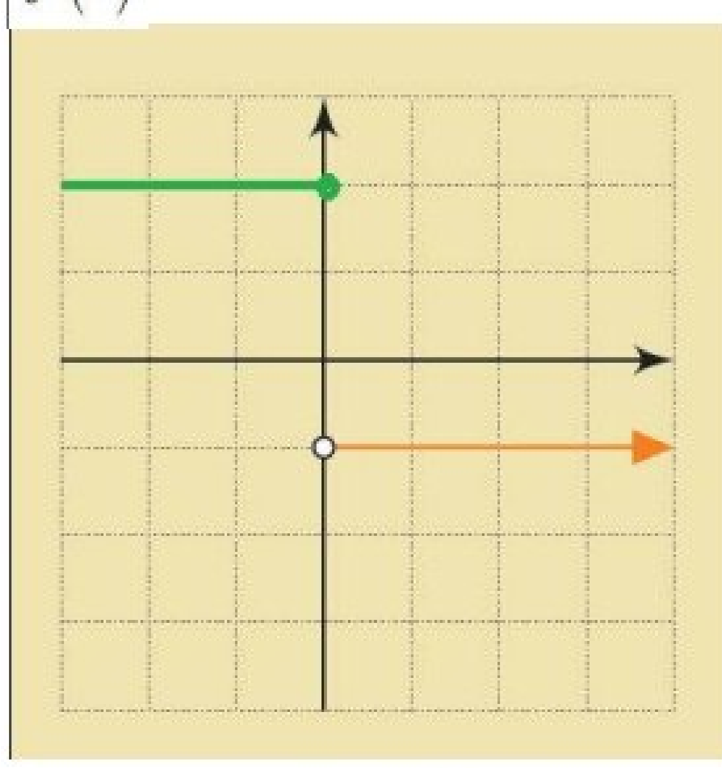
$$h(x)=\begin{cases} ۲x & ۲\leq x\leq ۳ \\ ۵ & x<-۱ \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x-۴ & x>۱ \\ \frac{۵}{۲} & x=۱ \\ -x & -۴\leq x<۱ \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} -۱ & x>۰ \\ ۲ & x<۰ \end{cases}$$

$g(x)$



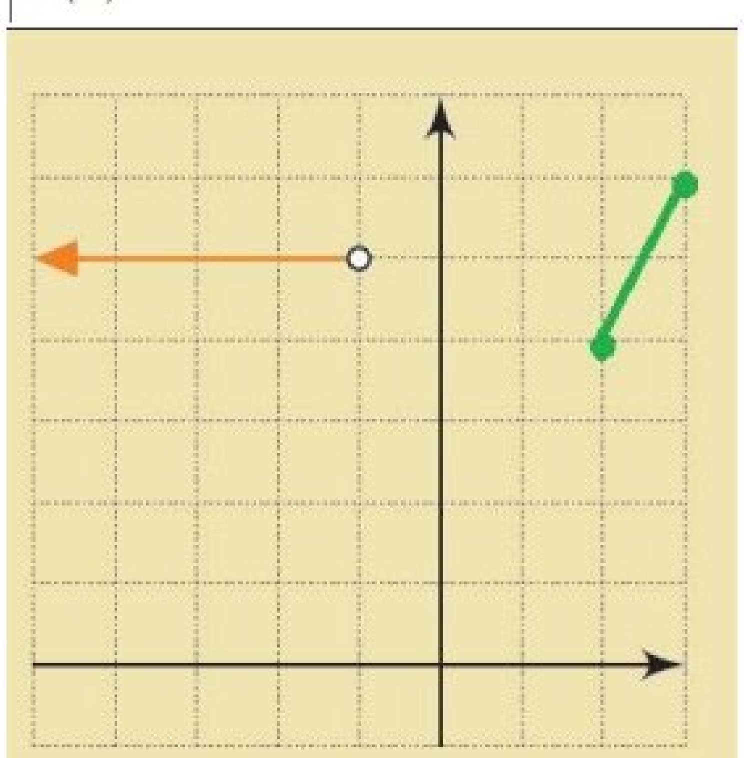
$D_g=[-۴,+\infty)$
$R_g=[-۳,+\infty)$

$f(x)$



$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$
$R_f=\{-۱,۲\}$

$h(x)$



$D_h=(-\infty,-۱)\cup[۲,۳]$
$R_h=[۴,۶]$

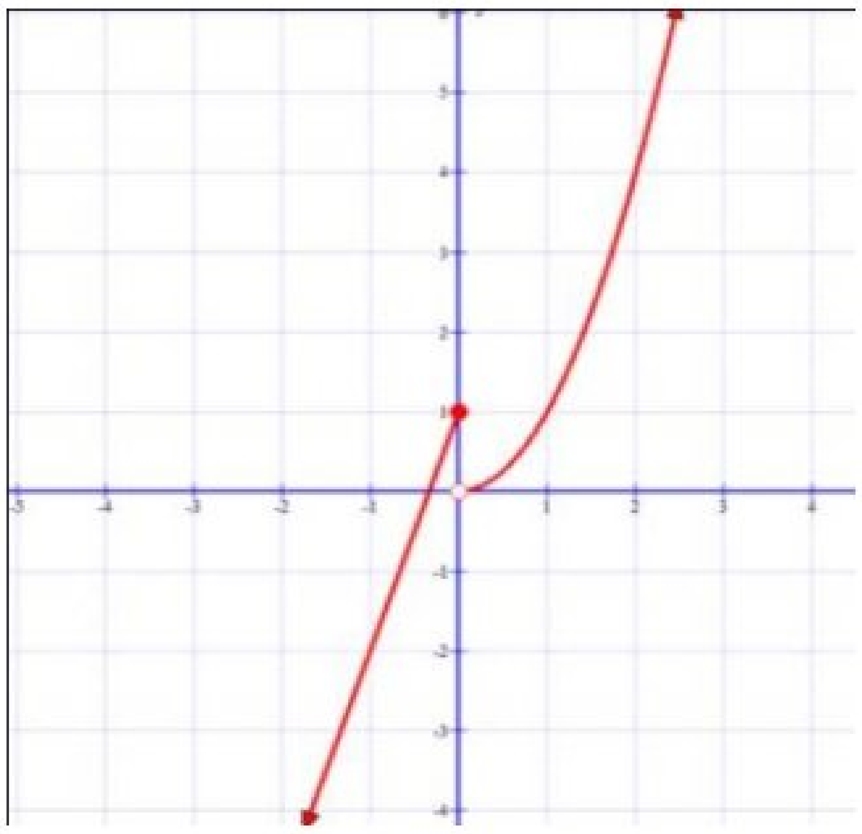
مقادیر $f(۳)$، $g(-۲)$، $f(-\frac{۱}{۵})$، $h(\sqrt{۵})$ و $g(۰)$ را بیابید.

$f(۳)=-۱ \quad g(-۲)=۲ \quad f\left(-\frac{۱}{۵}\right)=۲$
$h(\sqrt{۵})=۲\sqrt{۵} \qquad g(۰)=۰$

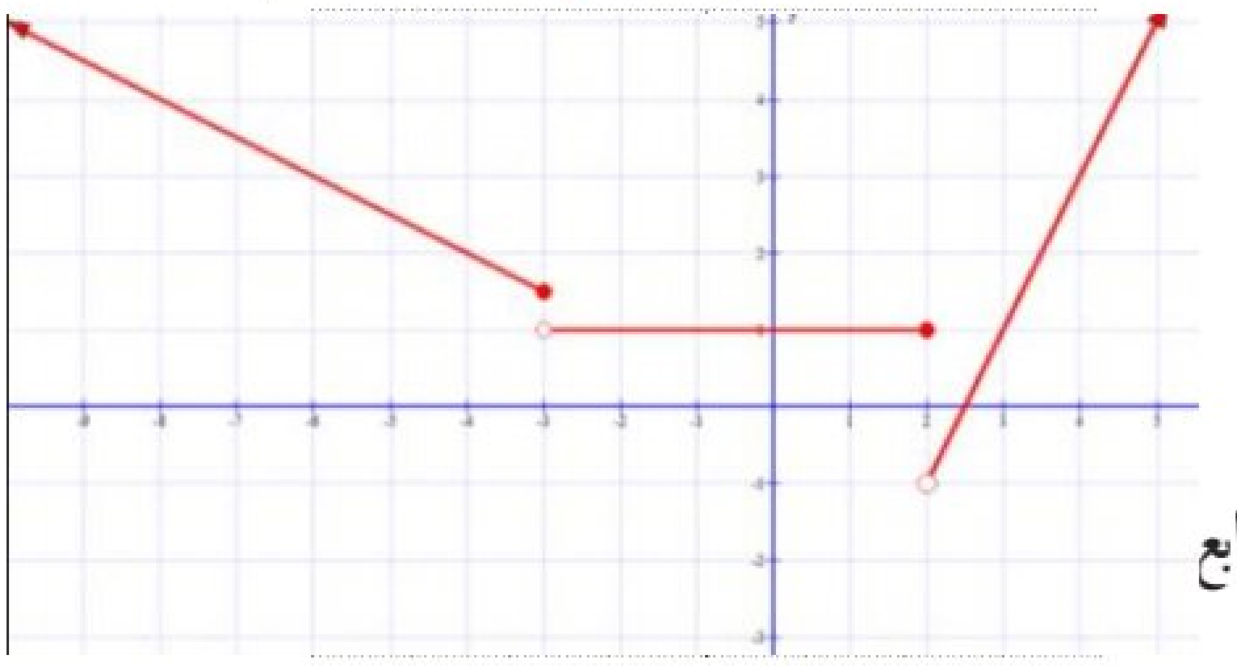
کار در کلاس

۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۰ \\ ۳x+۱ & x\leq ۰ \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} ۲x-۵ & x>۲ \\ ۱ & -۳<x\leq ۲ \\ -\frac{۱}{۲}x & x\leq -۳ \end{cases}$$



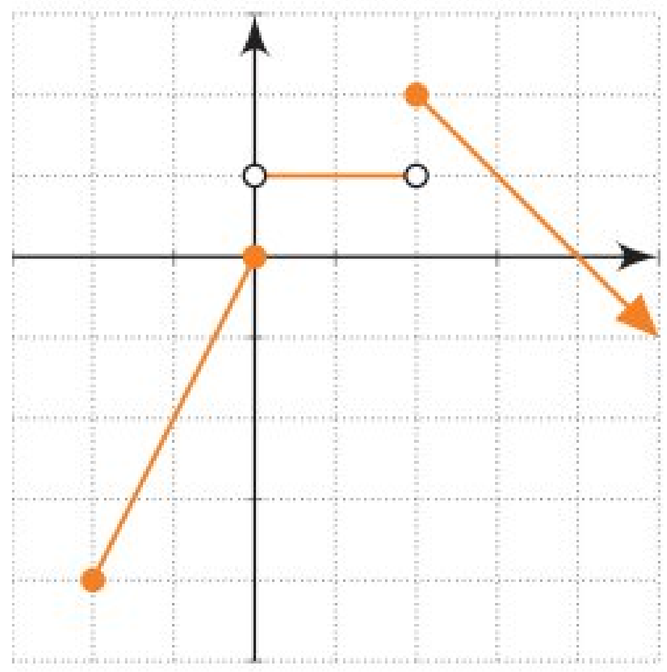
$$D_f=\mathbb{R} \qquad D_g=\mathbb{R}$$
$$R_f=\mathbb{R} \qquad R_g=(-۱,+\infty)$$



مقادیر $f(۰)$، $g(۰)$، $f(۵)$، $g(۲)$، $f(-۲)$ و $g(-\frac{۱}{۵})$ را به‌دست آورید.

$$f(۰)=۱ \qquad g(۰)=۱ \qquad g\left(-\frac{۱}{۵}\right)=۱$$
$$f(۵)=۲۵ \qquad g(۲)=۱ \qquad f(-۲)=-۵$$

۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطهٔ آن را به‌دست آورید. دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید.



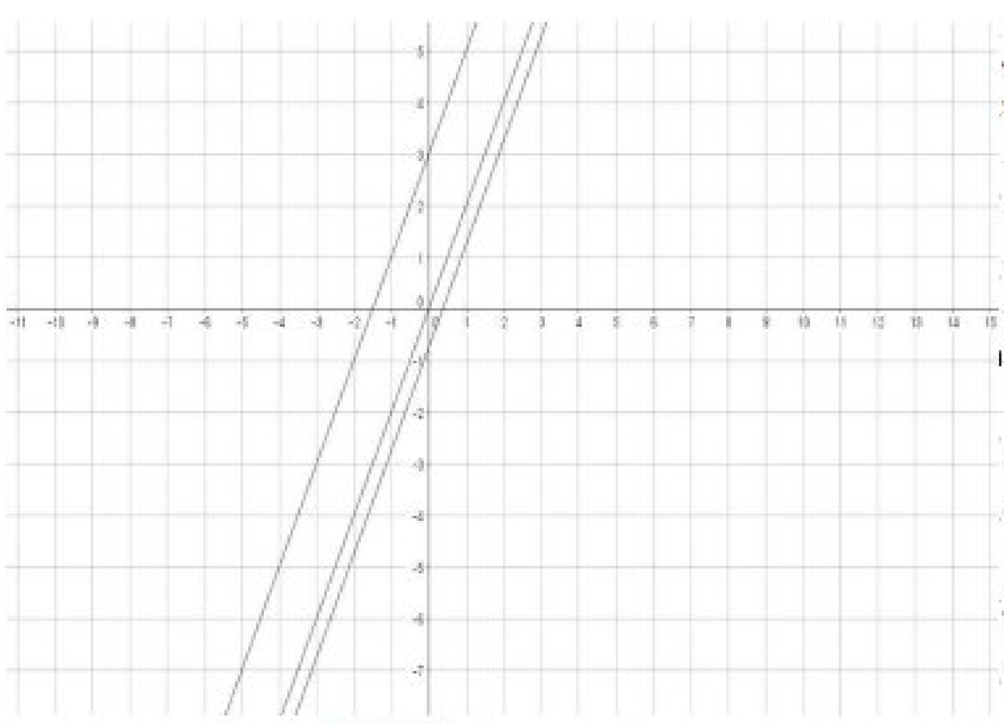
$$f(x)=\begin{cases} ۲x & -۲\leq x\leq ۰ \\ ۱ & ۰<x<۲ \\ -x+۴ & ۲\leq x \end{cases}$$

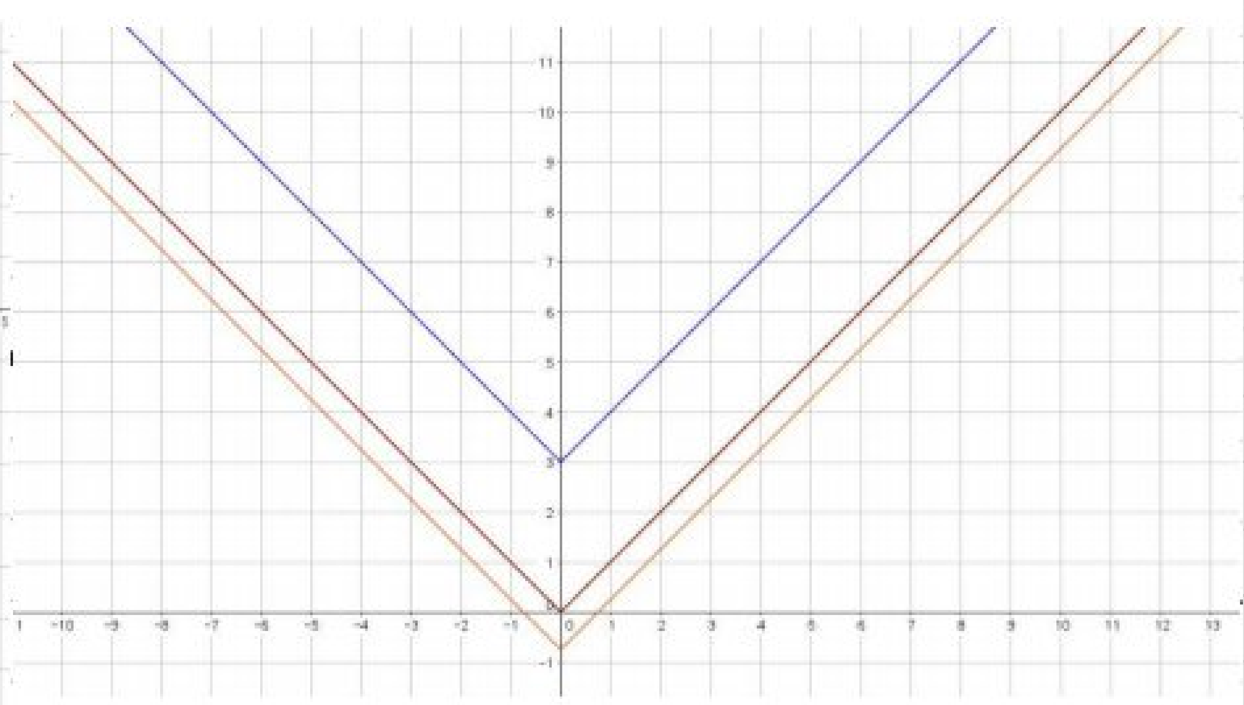
$$D_f=[-۲,+\infty)$$
$$R_f=[-۴,۲]$$

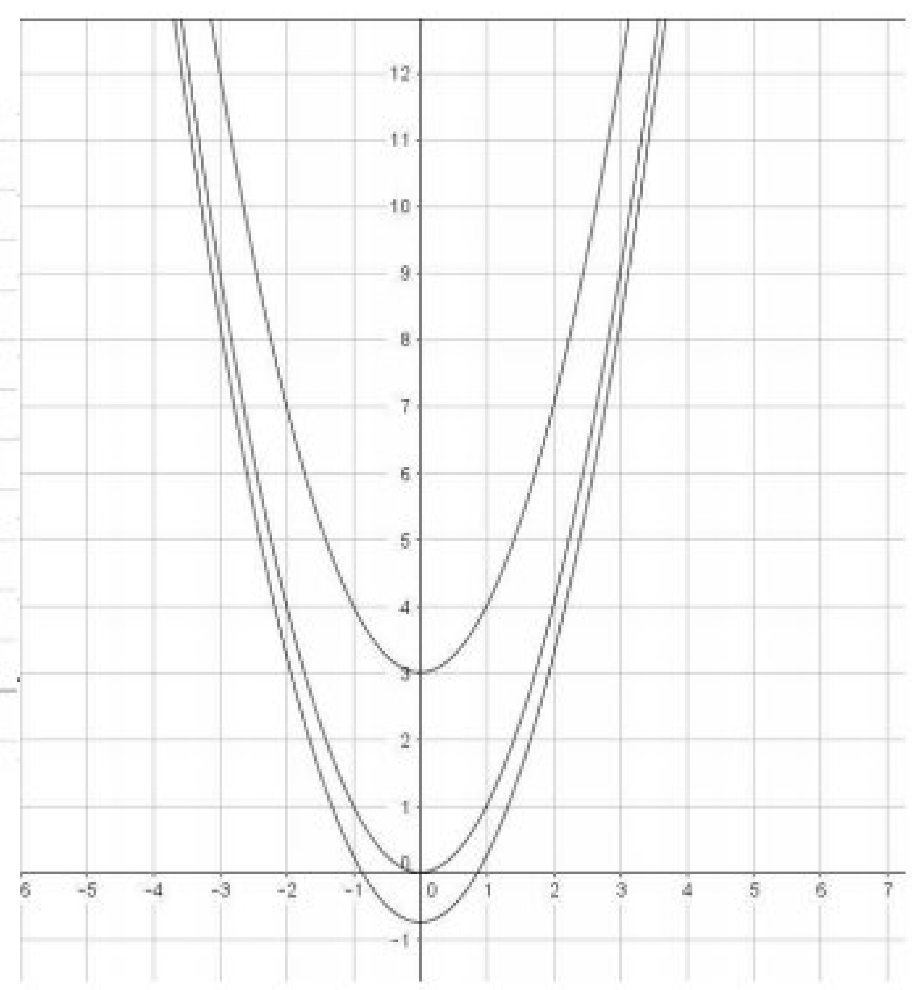
رسم برخی توابع به کمک انتقال

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=|x|$ و $h(x)=x^{۲}$ و توابع $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=|x|+۳$ و $h(x)=x^{۲}+۳$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x)=۲x-\frac{۳}{۴}$ و $g(x)=|x|-\frac{۳}{۴}$ و $h(x)=x^{۲}-\frac{۳}{۴}$ را به همین روش رسم کنید. سه واحد در راستای محور عرض ها در جهت مثبت انتقال داده شده اند.







با داشتن نمودار تابعی مانند f(x)، می‌توان نمودار تابع f(x) +k را با انتقال نمودار f(x) به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر k>۰ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر k<۰ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

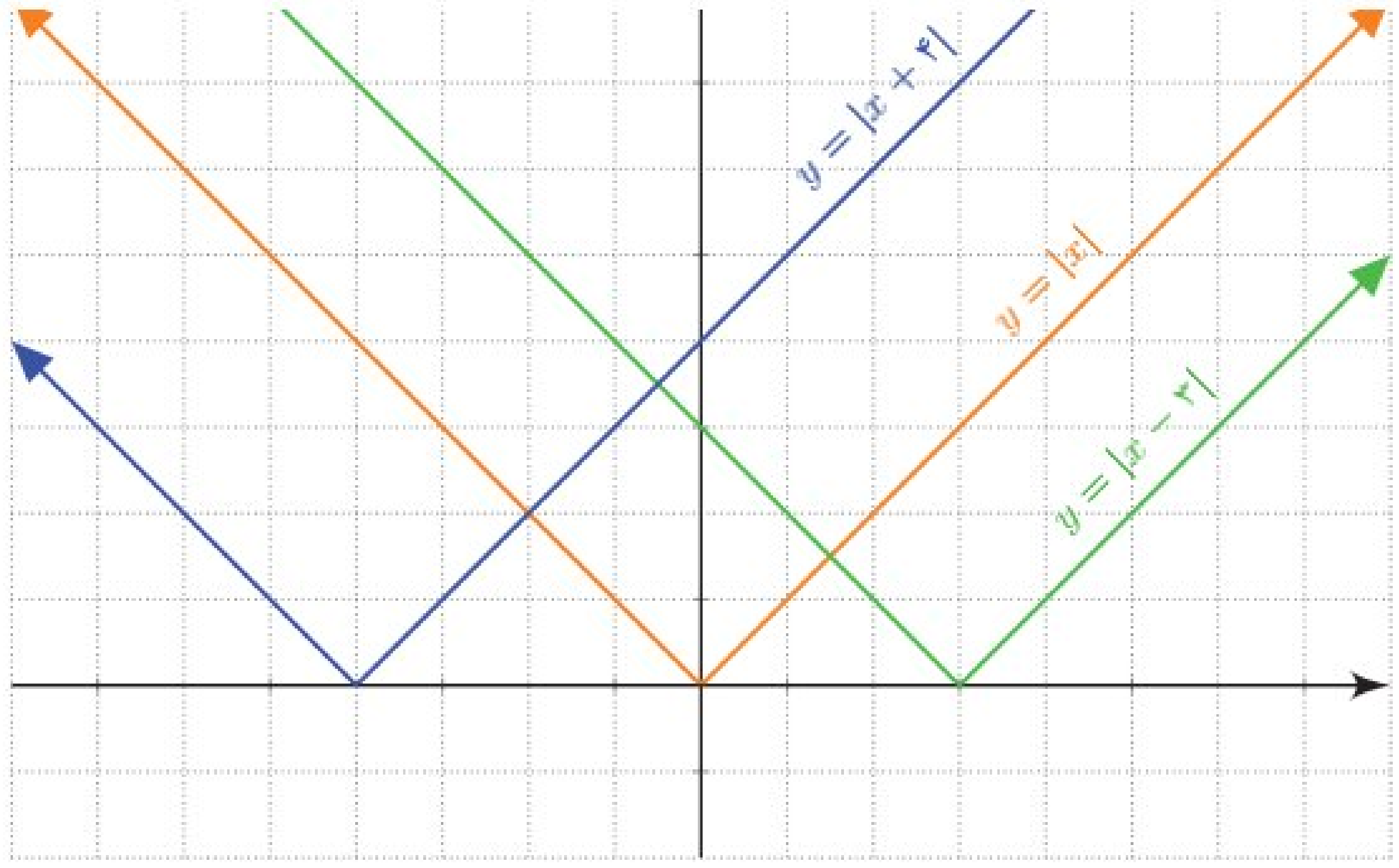
کار در کلاس

۱ در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع f(x) =|x| رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟

برای رسم نمودار تابع $|x-۳|$ ، نمودار تابع $|x|$ را به اندازه ۳ واحد در راستای محور طول ها در جهت راست انتقال می دهیم

و برای رسم نمودار تابع $|x+۴|$، نمودار تابع $|x|$ را به اندازه ۴ واحد در راستای محور طول ها در جهت چپ انتقال می دهیم.

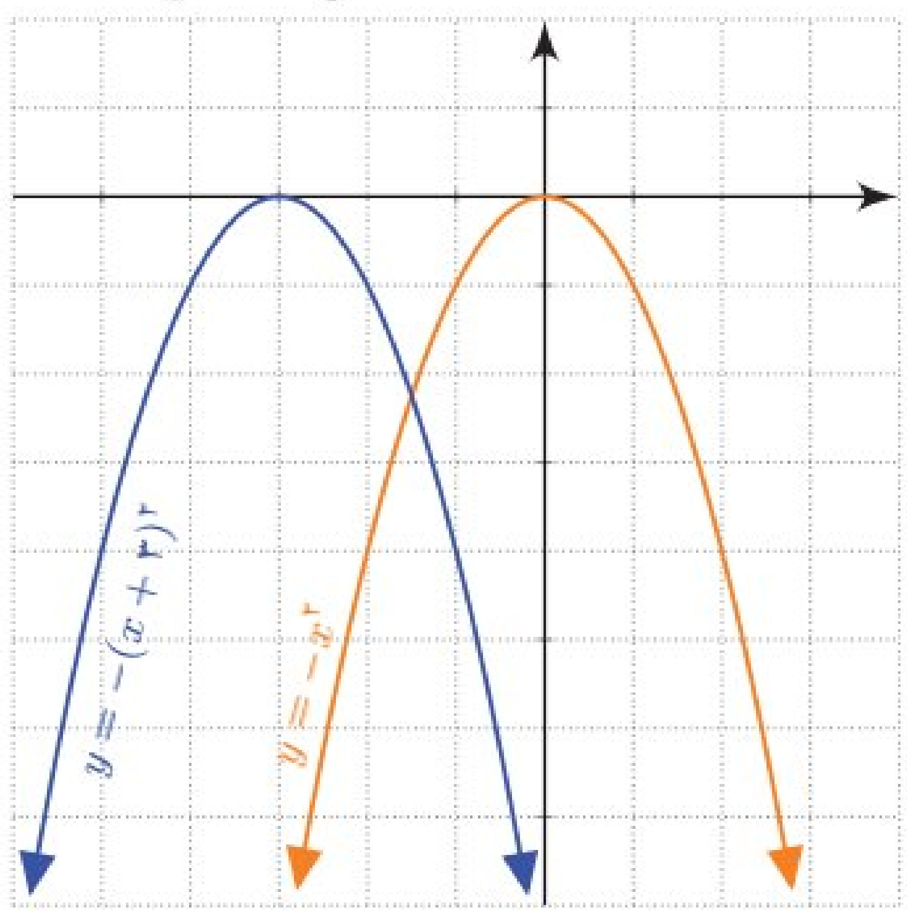
$$D=\mathbb{R}$$
$$R=\left[\cdot,+\infty\right)$$



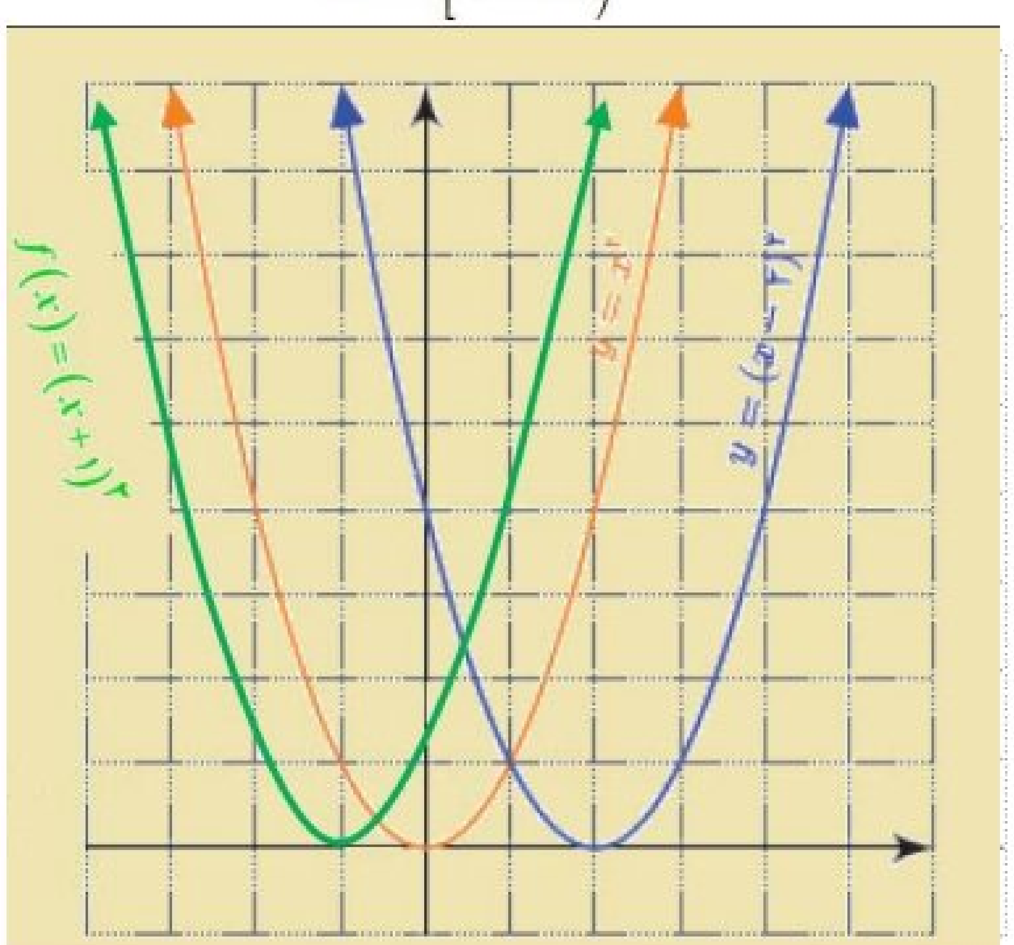
برای رسم نمودار تابع f(x+k) کافی است نمودار تابع f(x) را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر k>۰ باشد، انتقال درجهت منفی و اگر k<۰ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع f(x) =x² و f(x) =−x² نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار f(x) =(x+۱)² را نیز رسم کنید.

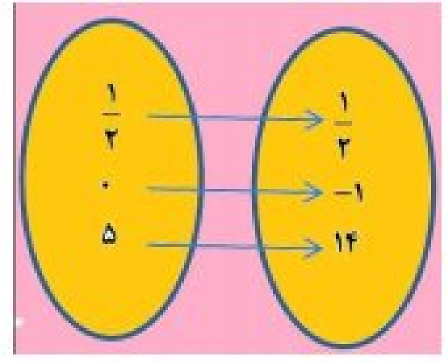
$$D=\mathbb{R}$$
$$R=\left(-\infty,\cdot\right]$$

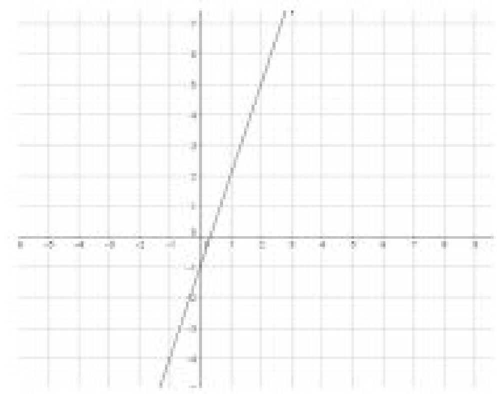


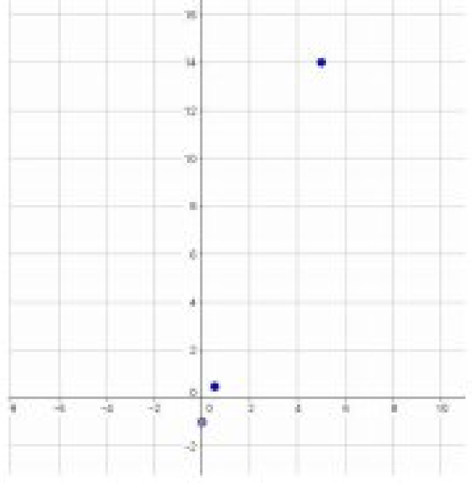
$$D=\mathbb{R}$$
$$R=\left[\cdot,+\infty\right)$$



نمودارهای تمرین ۱







کار در کلاس

در شکل‌های زیر نمودار توابع درجهٔ دوم f، g، h و t رسم شده‌اند.

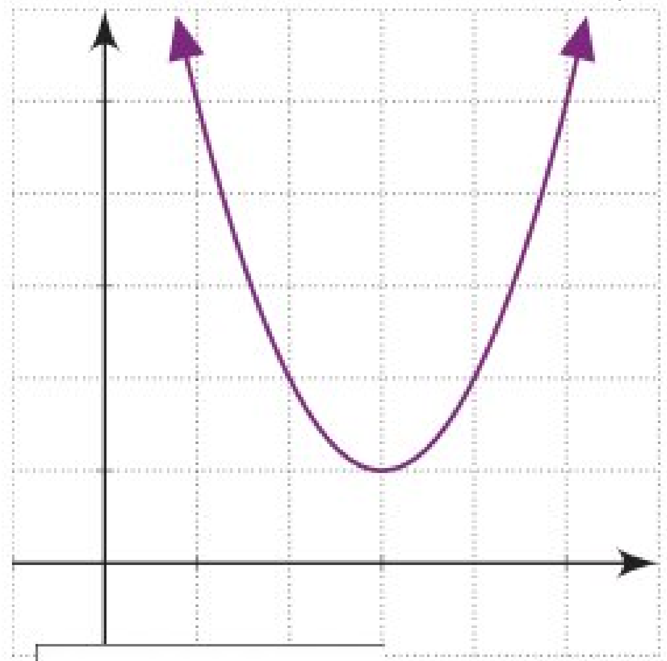
$g(x) = (x+1)^2 - 1$ $\qquad$ $f(x) = (x-5)^2 - 2$

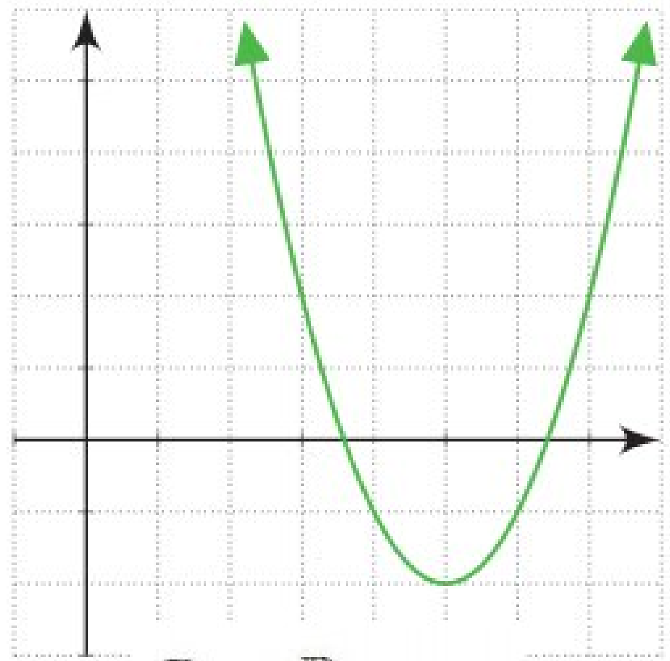
$t(x) = -(x+1)^2 + 3$ $\qquad$ $h(x) = (x-3)^2 + 1$

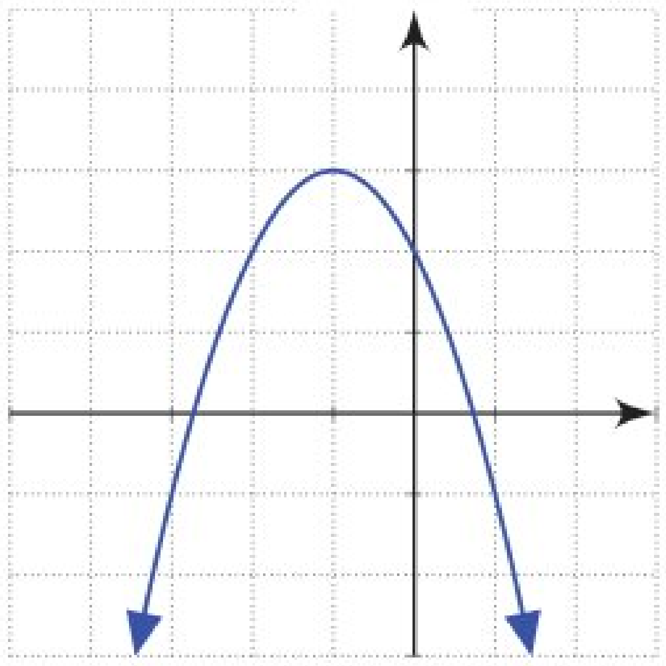
الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

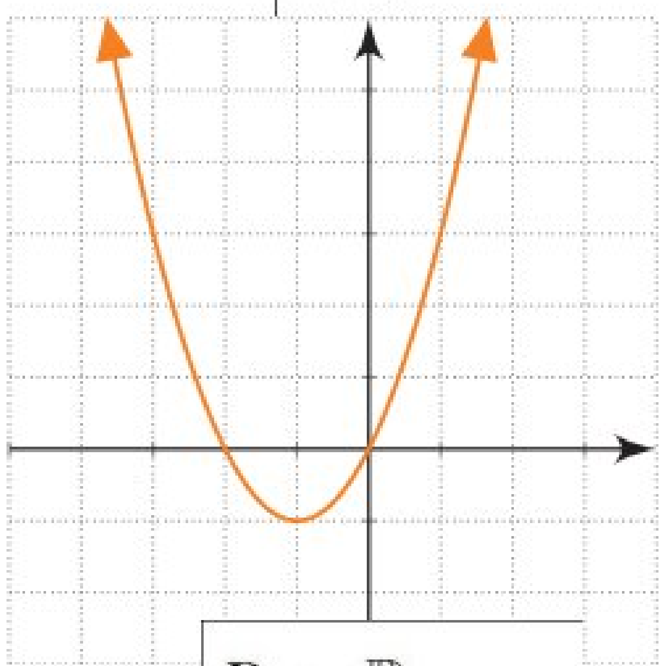
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به‌دست آورید :

$h(x)$ $\qquad$ $f(x)$ $\qquad$ $t(x)$ $\qquad$ $g(x)$









$D_h = \mathbb{R}$, $R_h = [1, +\infty)$

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-2, +\infty)$

$D_t = \mathbb{R}$, $R_t = (-\infty, 3]$

$D_g = \mathbb{R}$, $R_g = [-1, +\infty)$

تمرین

$R = \left\{\frac{1}{2}, -1, 14\right\}$

$f = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, -1), (5, 14)\right\}$

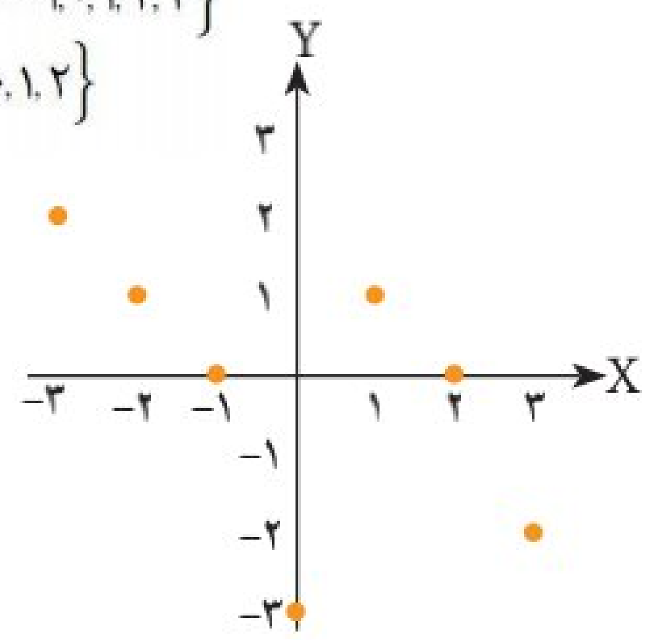
نمودار ها در بالای همین صفحه است.

۱ تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنهٔ آن مجموعه $\{\frac{1}{2}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به‌دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟ برد نیز اعداد حقیقی خواهد بود.

۲ در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به‌صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.

$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

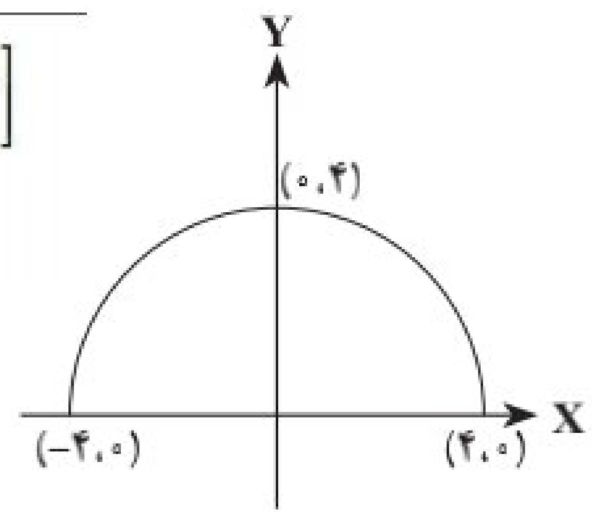
$R = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$



(پ)

$D = [-4, 4]$

$R = [0, 4]$

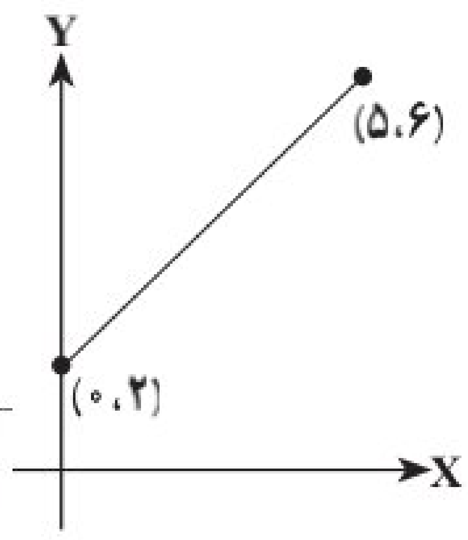


(ب)

$D = [0, 5]$

$R = [2, 6]$

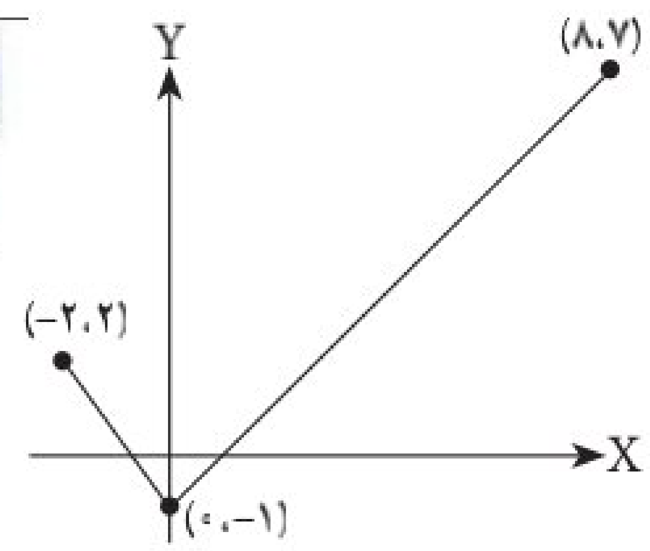
$f(x) = \frac{1}{2}x + 5$



(الف)

$D = [-2, 8]$

$R = [-1, 7]$

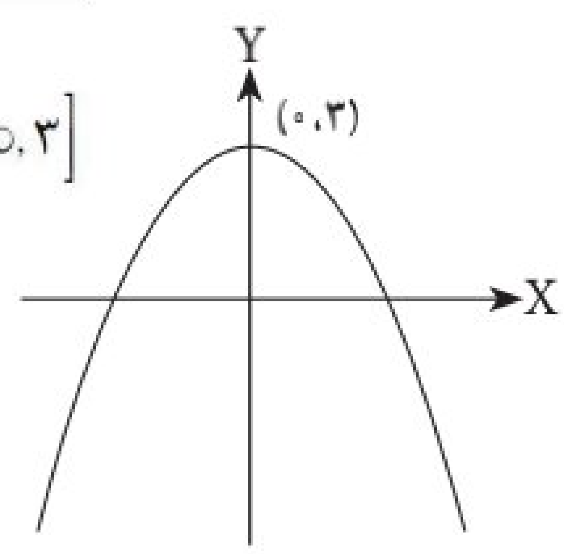


(ج)

$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 1 & -2 \le x \le 0 \\ x - 1 & 0 < x \le 8 \end{cases}$

$D = \mathbb{R}$

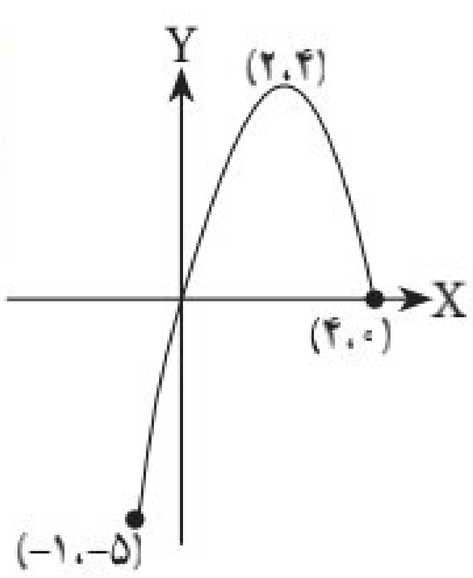
$R = (-\infty, 3]$



(ث)

$D = [-1, 4]$

$R = [-5, 4]$



(ت)

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۱$ برابر $(۰,+\infty)$ و بُرد آن نیز $(۰,+\infty)$ است. نادرست

ب) دامنهٔ تابع $f(x)=|x|-\frac{۱}{۳}$ همهٔ اعداد حقیقی و بُرد آن $(۲,+\infty)$ است. نادرست

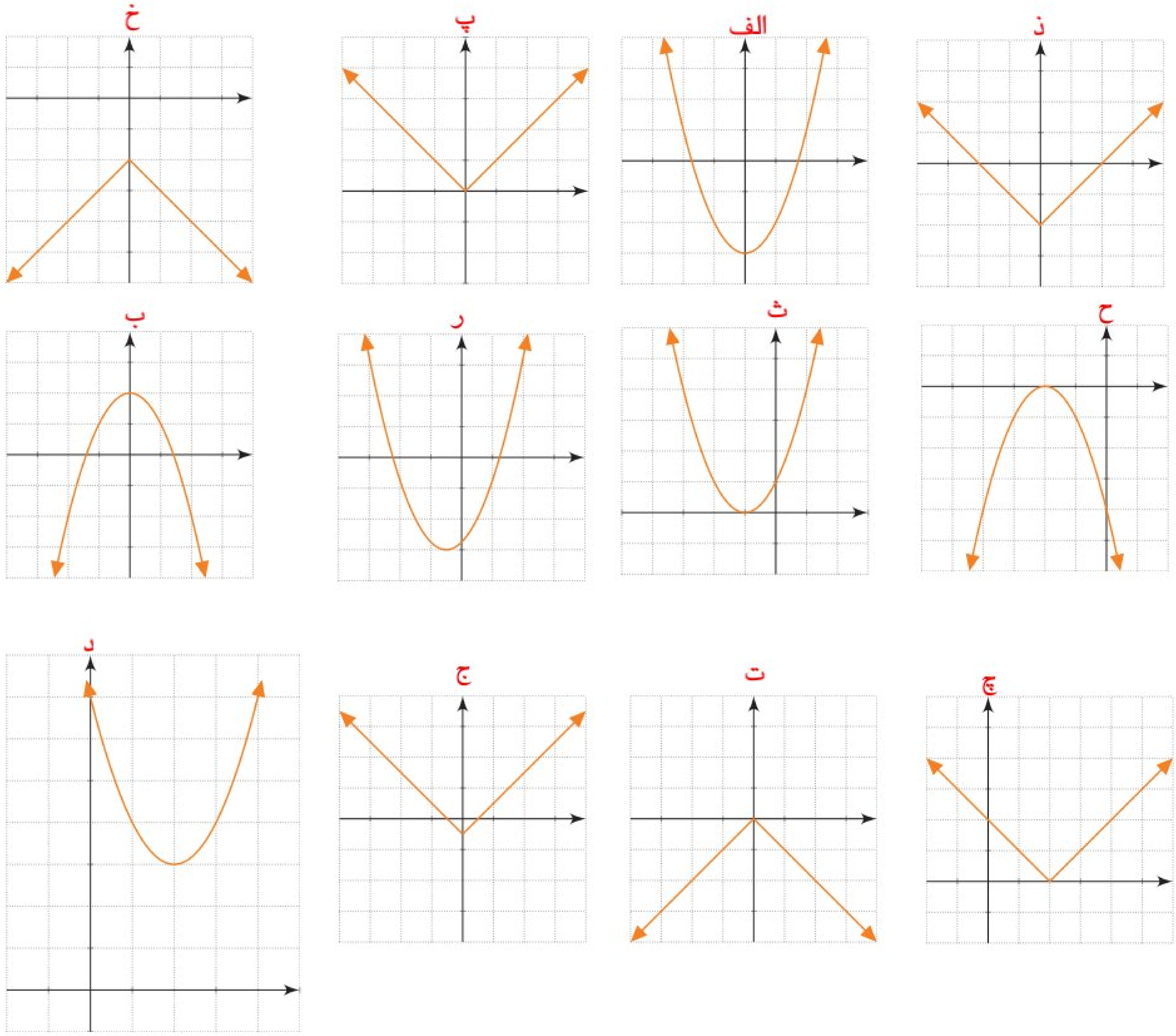
پ) دامنهٔ تابع ثابت $f(x)=۲$ برابر $(-\infty,+\infty)$ است. درست

ت) اگر $f(x)=۲x+۱$ آنگاه، $f(۱)=\frac{f(۲)}{۲}$. نادرست

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳+۳۰\pi r^۲$$

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



ت) $y=-\|x\|$	پ) $y=\|x\|$	ب) $y=-x^۲+۲$	الف) $y=x^۲-۳$
ح) $y=-(x+۲)^۲$	چ) $y=\|x-۲\|$	ج) $y=\|x\|-\frac{۱}{۲}$	ث) $y=(x+۱)^۲$
ر) $y=(x+\frac{۱}{۲})^۲-۳$	ذ) $y=\|x\|-۲$	د) $y=(x-۲)^۲+۳$	خ) $y=-\|x\|-۲$

الف- $[-۳,۶]$ ب- $[-۷,۲]$ پ- $[۰,۳]$ ت- $[-۳,۰]$ ث- $[۰,۱۶]$

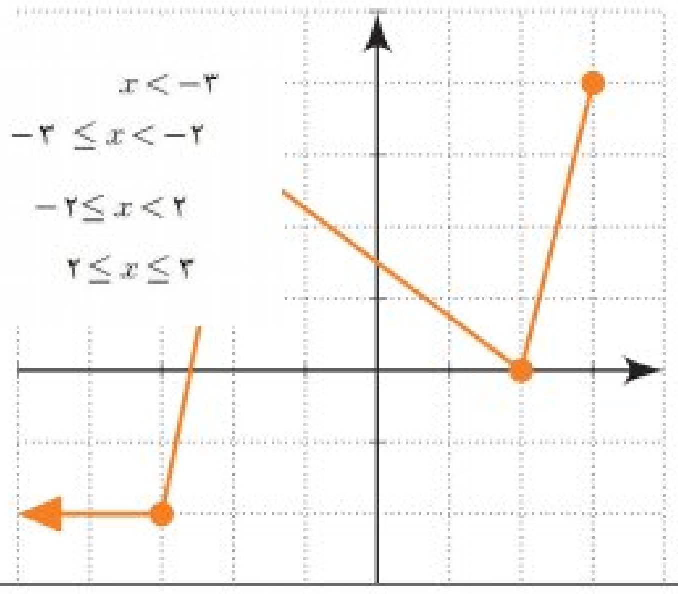
ج- $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}\right]$ چ- $[۰,۴]$ ح- $[-۲۵,۰]$ خ- $[-۵,-۲]$ د- $[۳,۱۹]$

ذ- $[-۲,۱]$ ر- $\left[-۳,\frac{۳۷}{۴}\right]$

۶ فرض کنیم دامنهٔ هریک از توابع تمرین ۵ به بازهٔ $[-۲,۳]$ محدود شده باشد. در این‌صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<-۳\\ ۵x+۱۳ & -۳\le x<-۲\\ -\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۲} & -۲\le x<۲\\ ۴x-۸ & ۲\le x\le ۳\end{cases}$$



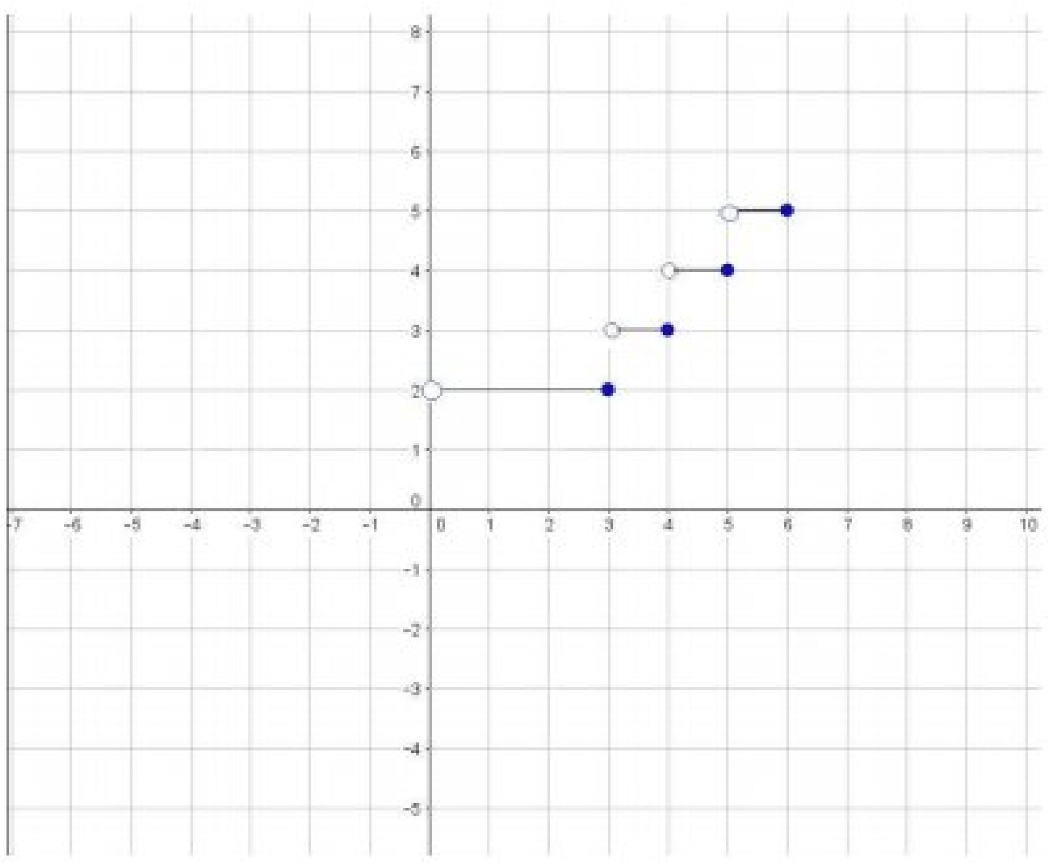
$f\left(\sqrt{۵}\right)=۴\sqrt{۵}-۸ \quad f(۳)=۴ \quad f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۹}{۸} \quad f(۶)$ تعریف نشده:

$f(۰)=\frac{۳}{۲} \quad f\left(-\frac{۵}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}$

۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط (۴,۳) و (۳,۰) می‌گذرد. f(−۴) و f(−۱) را به‌دست آورید.

$f(x)=۳ \quad ,f(-۴)=۳ \quad ,f(-۱)=۳$

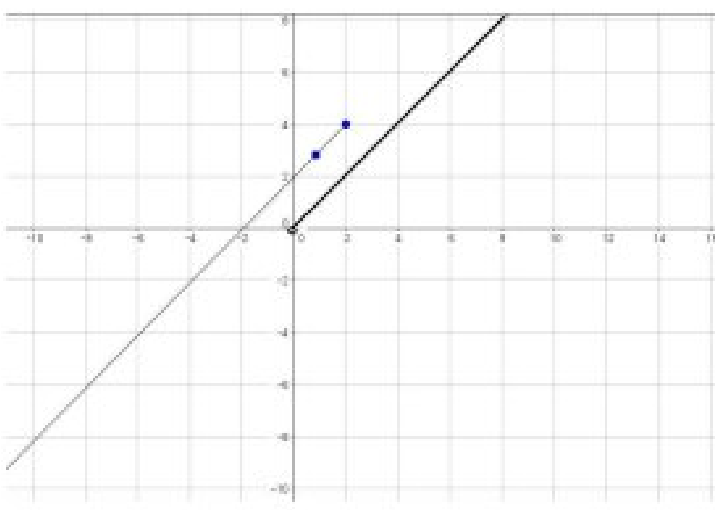
۹ هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزارتومان به هزینهٔ آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

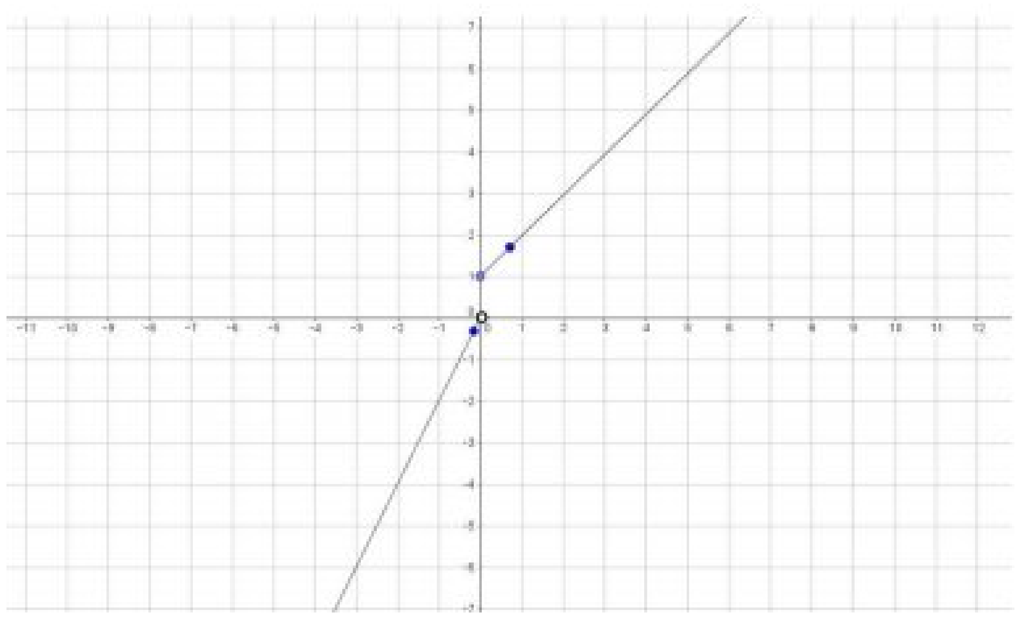


۱۰ کدام‌یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

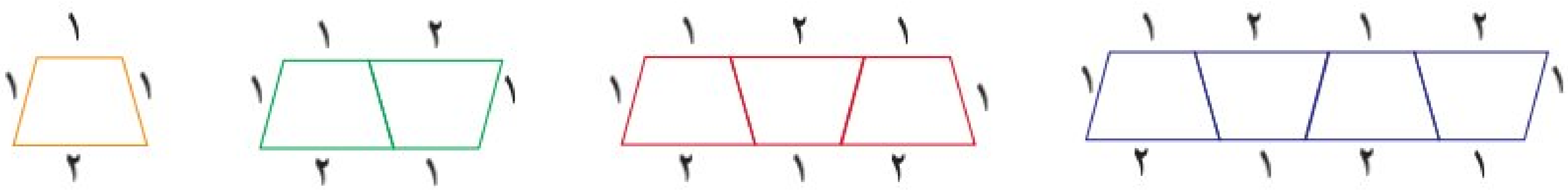
$f(x)$ تابع نیست زیرا اگر خطی به موازات محور عرض ها رسم کنیم ، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می کند.

$$f(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ x+۲ & x\le ۲\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}۲x & x<۰\\ x+۱ & x\ge ۰\end{cases}$$





۱۱ الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد ذوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱٤	۱۷	۳n+۲

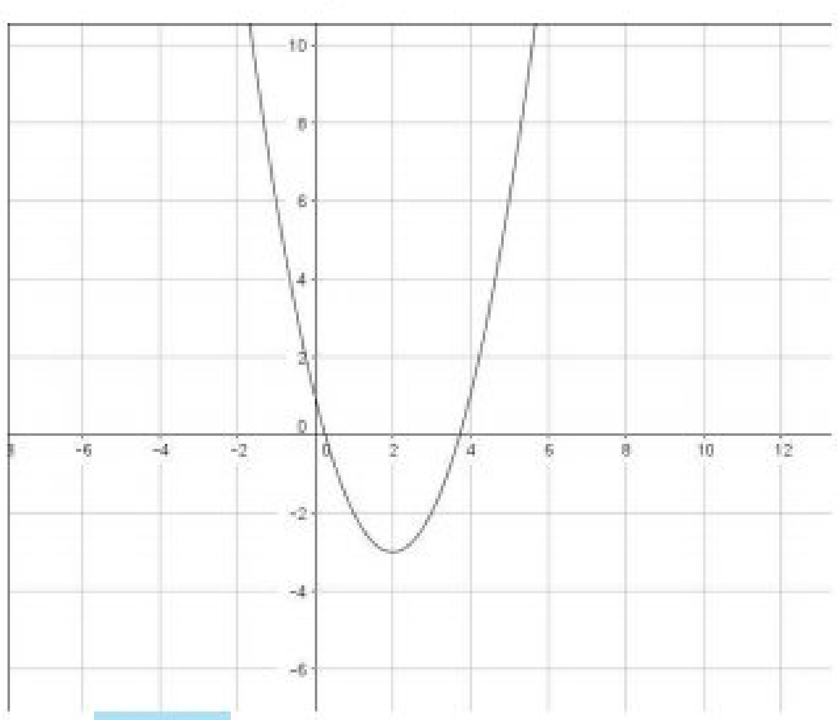
ب) چرا رابطهٔ بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید زیرا سطر اول، اعداد تکراری ندارد.دامنه اعداد سطر اول و برد اعداد سطر دوم است.

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط (۲− , ۱) و (۳−, ۲) می‌گذرد و محور yها را درنقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

$y=x^{۲}-۴x+۱$

$D=\mathbb{R}$

$R=[-۳,+\infty)$



تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۶

شمارش، بدون شمردن

وَ إِنْ تَعُدُّوا نِعْمَةَ اللّهِ لا تُحْصوُها «سورهٔ ابراهیم آیهٔ ۳۴»
و اگر بخواهید نمی‌توانید نعمت‌های خدا را بشمارید.

داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم‌مرزی هم‌رنگ نباشند؟

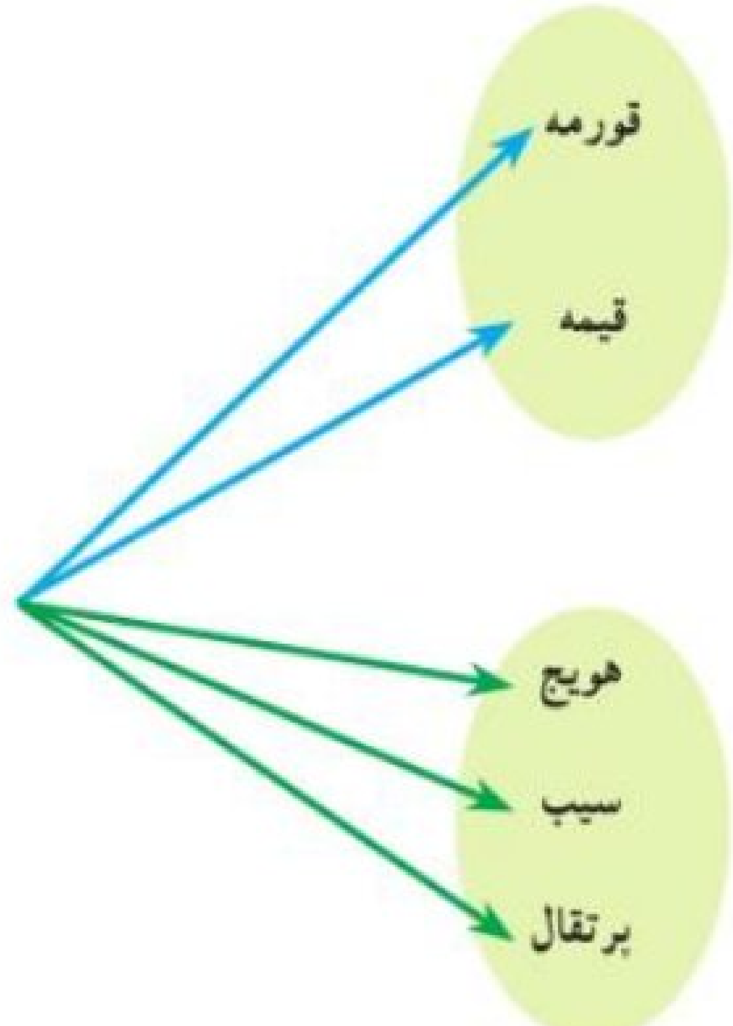
درس اول: شمارش

شاید شمارش درنظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ امّا آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟

می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به‌صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره گذاری کرد؟

اصل جمع و اصل ضرب

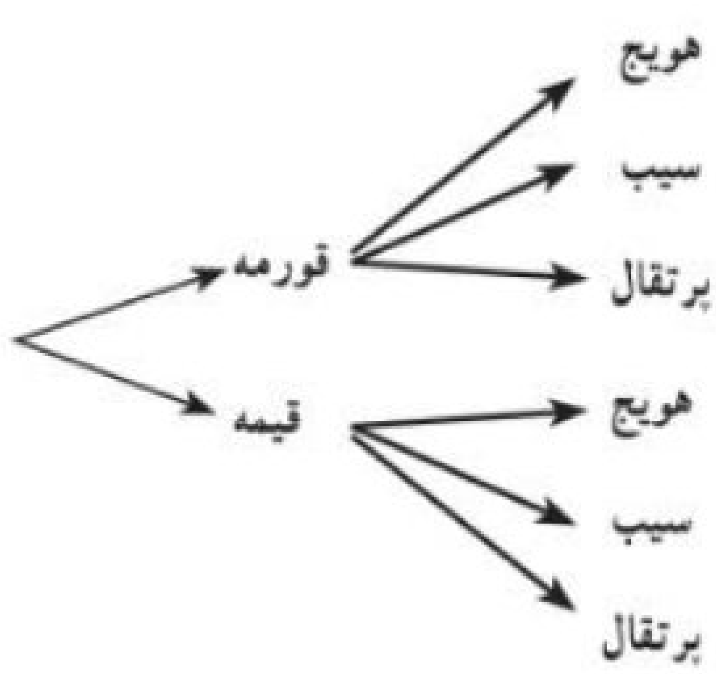
فعالیت



۱ امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوهٔ هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

طبق نمودار روبرو ۵ انتخاب وجود دارد

۲ هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد به‌خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟



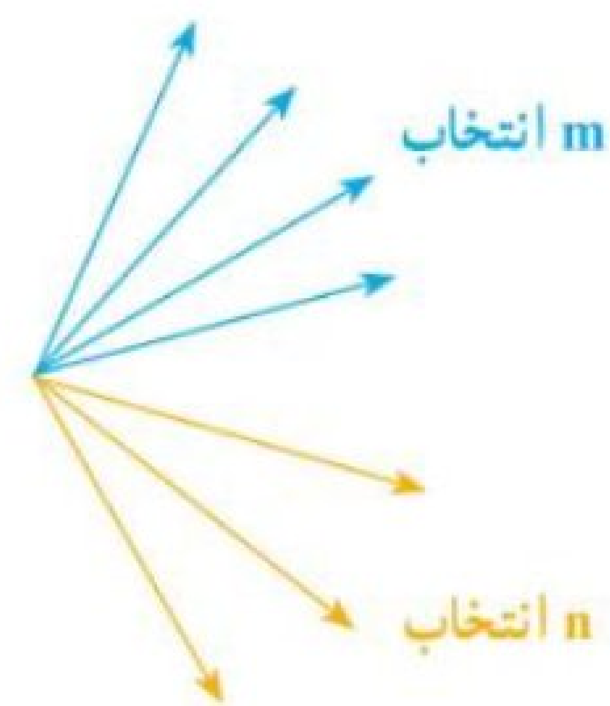
با توجه به نمودار روبرو ۶ انتخاب خواهد داشت

۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در سوال اول امین فقط به یکی از دو روش کار را انجام می‌دهد، یا آنکه به رستوران رفته و یکی از دو غذا را انتخاب می‌کند و یا آنکه به آب میوه فروشی رفته و یکی از سه نوع آب میوه را انتخاب خواهد کرد. ولی در سوال دوم پوریا هر دو مکان را خواهد رفت که در اولی ۲ انتخاب و در دومی ۳ انتخاب دارد.

۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در سوال اول ۵=۳+۲ حالت وجود داشت چون فقط یکی از دو مکان را انتخاب می‌کرد ، ولی در سوال دوم ۶=۳×۲ حالت ، چون هر دو مکان را خواهد رفت که در مقابل هر انتخاب در مکان اول ، ۳ انتخاب در مکان دوم دارد .



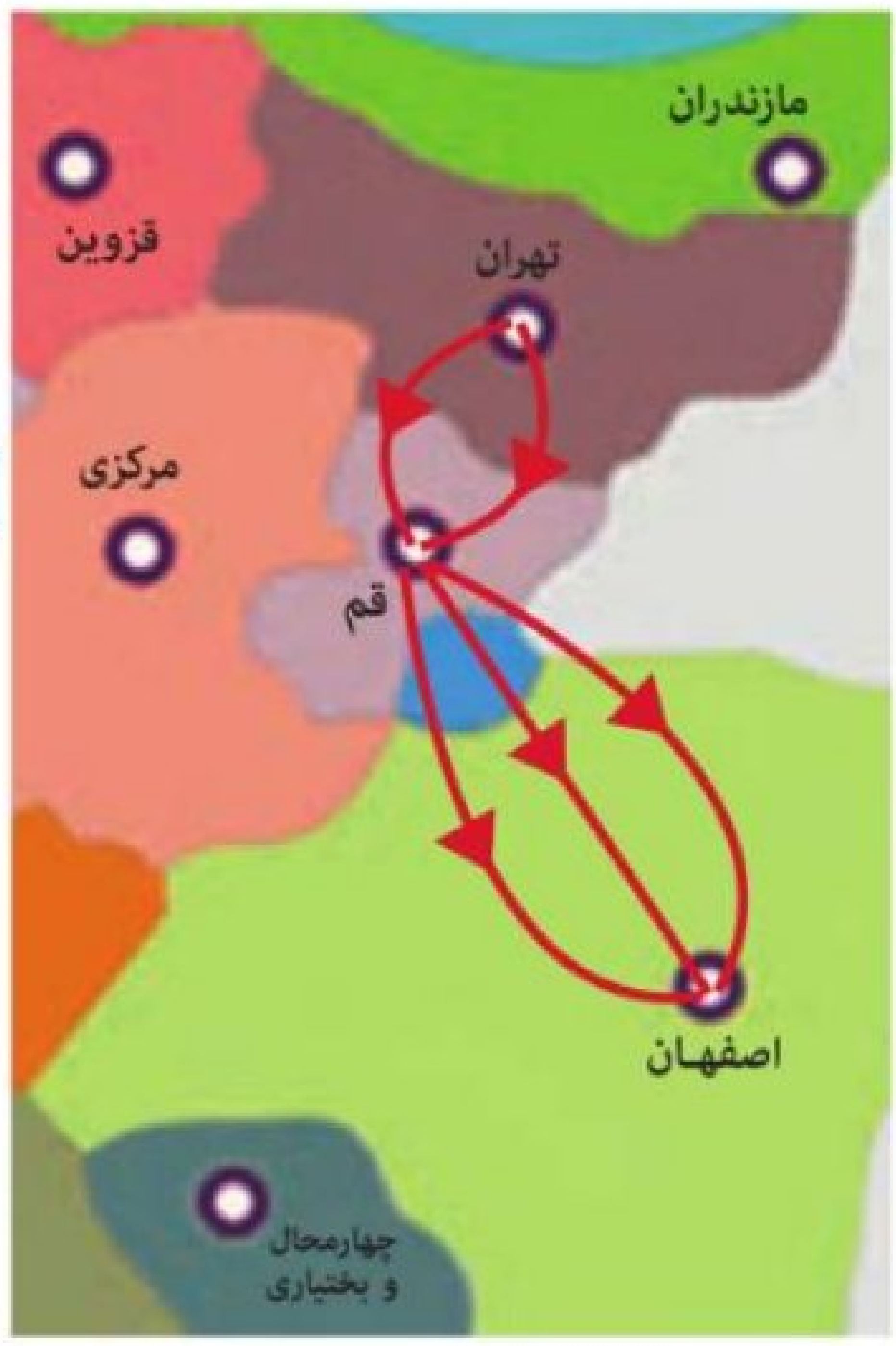
اصل جمع : اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر m+n روش وجود دارد.

«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط یکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آب‌میوه‌فروشی» را انجام می‌دهد».

تعمیم اصل جمع : اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب ، ... و در روش kام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحلهٔ اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آب‌میوه‌فروشی که مرحلهٔ دوم است، صورت می‌پذیرد».

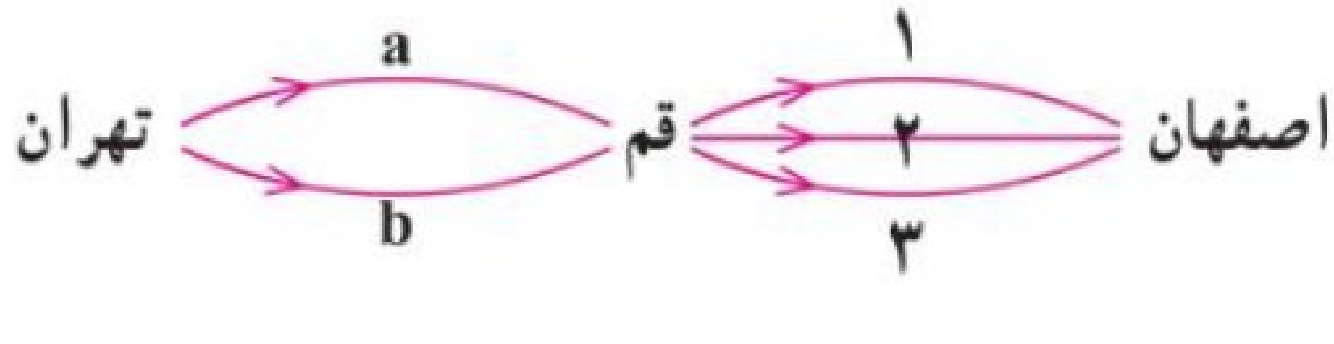


مثال

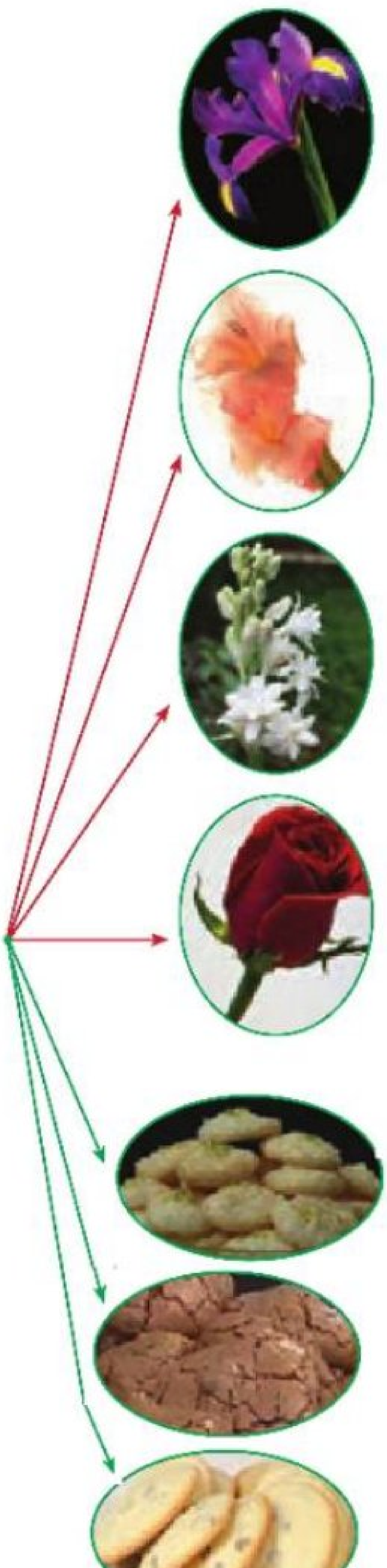
فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این‌کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل : طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها ۶=۳×۲ است که عبارت‌اند از :

a,۳	a,۲	a,۱
b,۳	b,۲	b,۱



تعمیم اصل ضرب : اگر انجامِ کاری شامل k مرحله باشد؛ به‌طوری‌که برای انجامِ مرحلهٔ اول m_1 روش، برای انجام مرحلهٔ دوم m_2 روش ، ... و برای انجامِ مرحلهٔ kاُم m_k روش وجودداشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمامِ روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$ روش قابل انجام است.



کار در کلاس

۱ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخهٔ گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانهٔ دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌انداز : مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او درنظر دارد، عبارت‌اند از : گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟ ۷=۳+۴ بنابراین ۷ انتخاب دارد

۲ هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این‌بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این‌بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید. ۱۲=۳×۴ بنابراین ۱۲ انتخاب دارد

{(مریم و گردویی)و(مریم و نارگیلی)و(مریم و کشمشی)و(گلایل و گردویی)و(گلایل و نارگیلی)و(گلایل و کشمشی)و

(زنبق و گردویی)و(زنبق و نارگیلی)و(زنبق و کشمشی)و(رُز و گردویی)و(رُز و نارگیلی)و(رُز و کشمشی)}

۳ در هر یک از قسمت های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در سوال (۱) پژمان می‌تواند یکی از دو روش را انتخاب کند که یکی ۴ و دیگری ۳ حالت دارد، لذا طبق اصل جمع ۷=۳+۴ انتخاب دارد ولی در سوال (۲) پژمان می‌خواهد هر دو کار را انجام دهد، هم انتخاب گل و هم انتخاب شیرینی که طبق اصل ضرب ۱۲=۳×۴ انتخاب دارد.

۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

اصل جمع : کتابخانه مدرسه ای ۴۰ کتاب در زمینه ریاضی و ۵۰ کتاب در زمینه ادبیات دارد. اگر یک دانش‌آموز بخواهد یکی از کتاب های کتابخانه را در زمینه ریاضی یا ادبیات انتخاب کند به چند راه می‌تواند این کار را انجام دهد؟ ۹۰=۵۰+۴۰ بنابراین ۹۰ راه وجود دارد

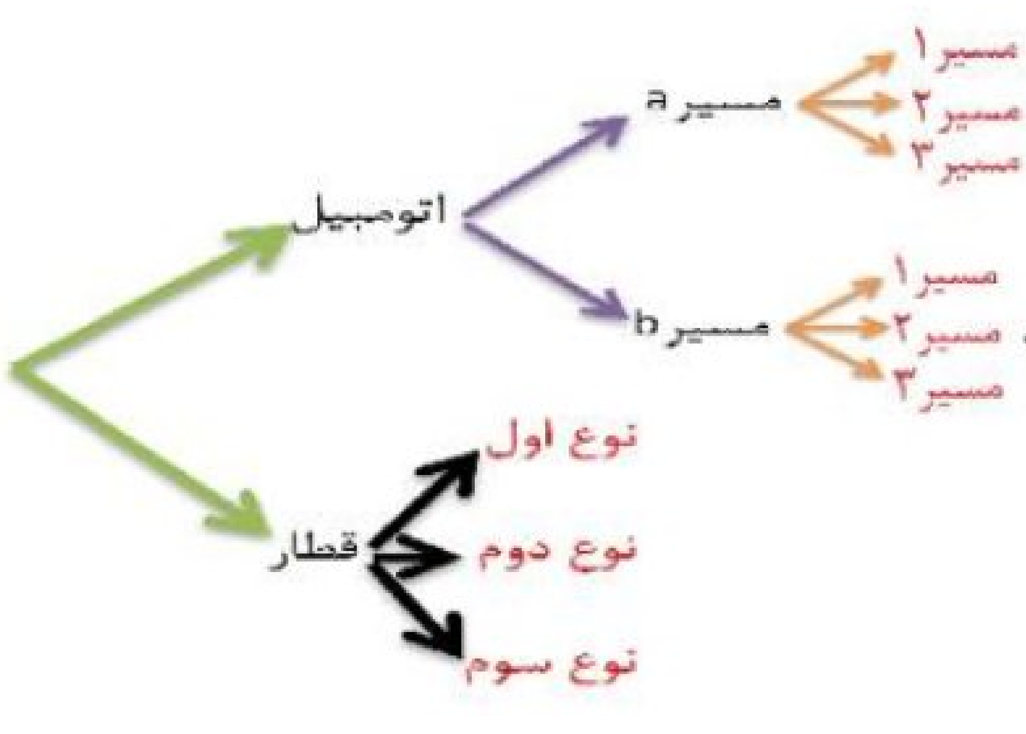
اصل ضرب : از بین ۴ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالاد در یک رستوران به چند طریق می‌توان غذایی به همراه سالاد سفارش داد؟ ۲۰=۵×۴ بنابراین ۲۰ نوع سفارش مختلف داریم

در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟

حل : اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد. با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.



مثال : رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل :

حالت اول : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف فارسی باشد : ۲۶۶۲۴ = ۳۲ × ۲۶ × ۳۲

حالت دوم : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف انگلیسی باشد : ۲۱۶۳۲ = ۲۶ × ۳۲ × ۲۶

تعداد حالات ممکن : ۴۸۲۵۶ = ۲۱۶۳۲ + ۲۶۶۲۴

کار در کلاس

الف با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این‌کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور درنظر گرفت.

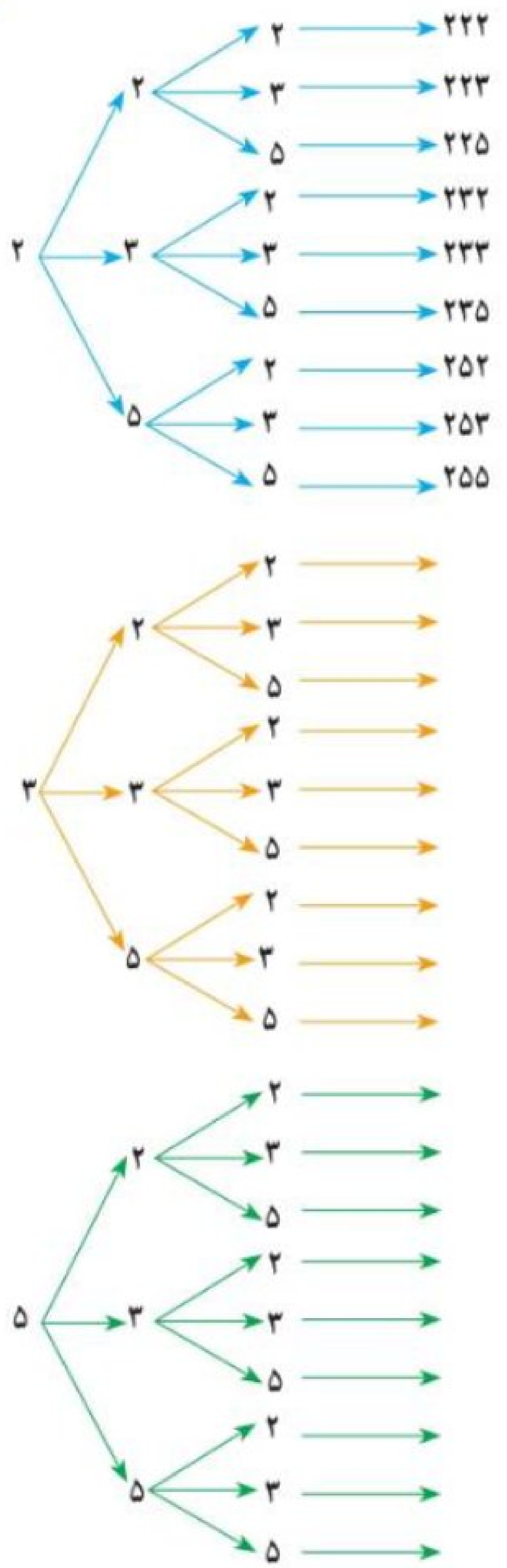
پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحلهٔ آن باید انجام شود، برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب درهم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۵ یا ۳ یا ۲ ‏ ‏ ۵ یا ۳ یا ۲ ‏ ‏ ۵ یا ۳ یا ۲

تعداد حالت‌ها ...۳... × ...۳... × ...۳... = ۲۷

با نمودار درختی در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد موردنظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیهٔ صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱ــ برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟

تعداد حالت ها ← ۳ حالت

۲ــ حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

تعداد حالت ها ← ۲ حالت

۳ــ برای پرکردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

لذا ..۶.. = ...۱... × ...۲... × ...۳... عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

یک عدد قرار گرفته است | یک عدد قرار گرفته است | ۱

تعداد حالت ها

ب) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ در این جایگاه فقط عدد ۲ می توانـد قرار بگیرد ، لذا ۱ حالت وجود دارد .

۲ــ دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می‌توانند، پر شوند؟ در جایگاه های دیگر هر کدام از سه عدد می توانند قرار گیرند ، پس هر کدام دارای سه حالت است .

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ..۹.. = ...۱... × ...۳... × ...۳...

ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به‌گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ ۱ حالت

۲ــ پس از پرکردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می‌تواند پر شود؟
درجایگاه سمت چپ فقط یکی از اعداد ۳ یا ۵ می توانند باشند پس ۲ حالت داریم

۳ــ حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پرشود؟
با قرار گرفتن یکی از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ ، فقط یک عدد برای جایگاه وسط باقی می ماند ، لذا در این جایگاه فقط ۱ حالت داریم .

۴ــ لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با ..۲..= ..۱.. × ..۱.. × ..۲..

مثال

با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

حل :

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی‌تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است.

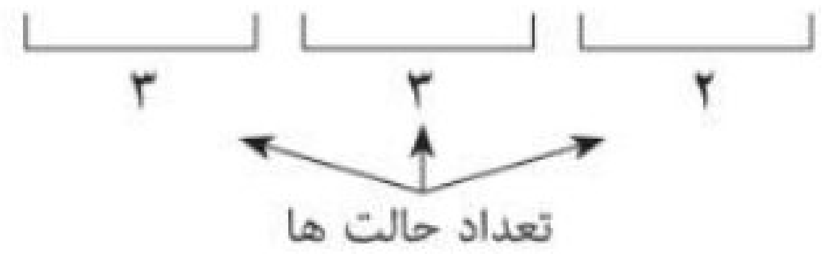
۳ | ۴ | ۴

تعداد حالت ها

لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می‌توان نوشت.

۳ × ۴ × ۴ = ۴۸

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می‌توان نوشت.



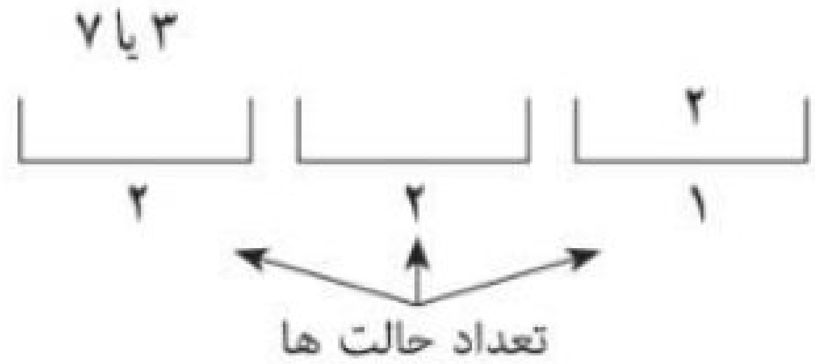
$۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$

پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.

$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

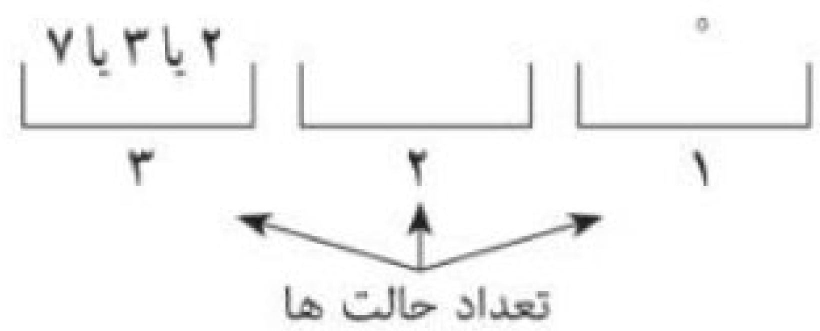
ت) چون عدد موردنظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را درنظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول : اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.



$۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$

حالت دوم : اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به‌صورت مقابل است.



$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

لذا در کل ۱۰ عدد می‌توان نوشت.

راه حل دوم : با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به‌صورت زیر جواب را حساب کرد :

جواب قسمت (ت) = جواب قسمت (ب) − جواب قسمت (پ) = ۱۸−۸=۱۰

تمرین

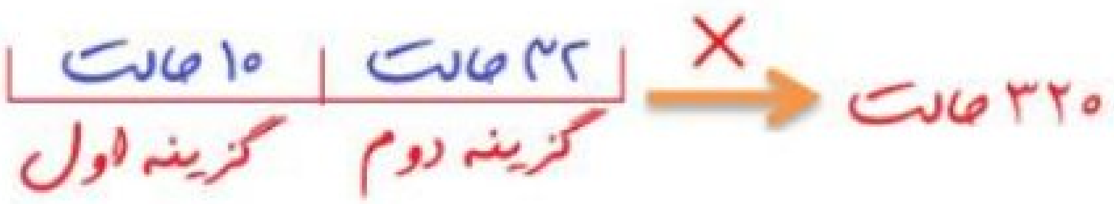
۱ تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. مشخص کنید برای این‌کار از اصل جمع استفاده می شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

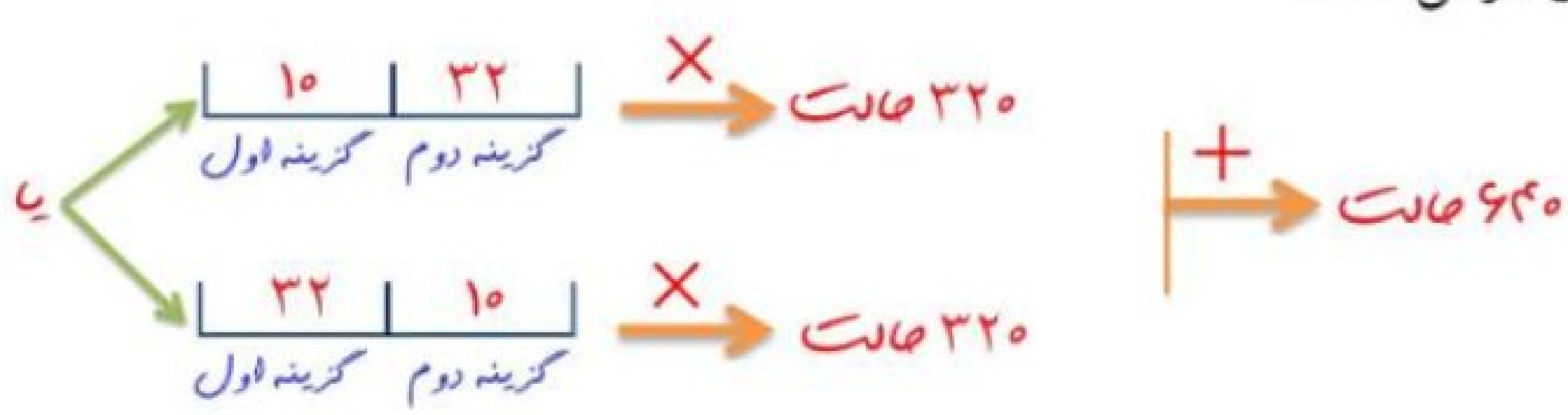
رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و . . . و یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود

بنابراین ۴۲=۳۲+۱۰ حالت داریم .

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف الفبای فارسی است.



پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

۱۰۰=۱۰×۱۰ : هر دو عدد باشند

یا

۶۷۶=۲۶×۲۶ : هر دو حرف باشند

$\xrightarrow{+}$ ۷۷۶

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

۱۰	۹	۲۶	۲۵
اعداد		حروف	

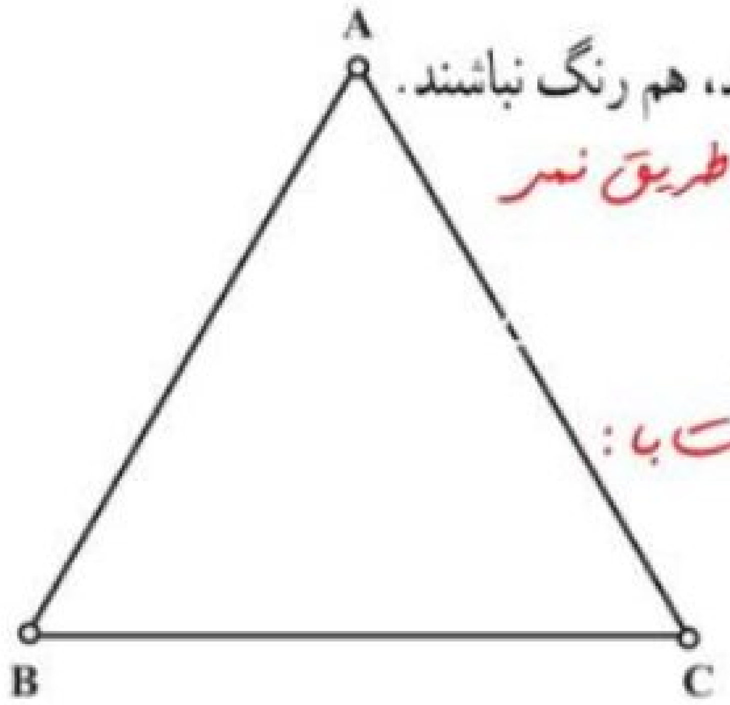
$\xrightarrow{\times}$ ۵۸۵۰۰ حالت

۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

حداکثر: ۱۸۰۰۰=۳۰×۱۲×۱۰×۵   حداقل: ۸۰۰۰=۲۰×۱۰×۸×۵

۳ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ برای آنکه راس A رنگ متفاوت با رئوس B و C داشته باشد ۲ حالت داریم (A به رنگ آبی و دو راس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برای متفاوت بودن رئوس B و C نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب ۸ = ۲×۲×۲ طریق این کار امکان پذیر است.



ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم‌وصل‌اند، هم رنگ نباشند.

با توجه به اینکه هر راس به دو راس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی‌توان این کار را انجام داد.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

حالت الف: با توجه به این که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب ها برابر است با:

۲۷=۳×۳×۳

حالت ب: جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی ۶ می باشد زیرا با وجود سه راس و ۳ رنگ متمایز، خود به خود رئوس همرنگ نخواهند بود.

۴ با پلاک‌هایی به‌صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعهٔ A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعهٔ B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟

۹×۹   ۱۳   ۹×۹×۹   ۹

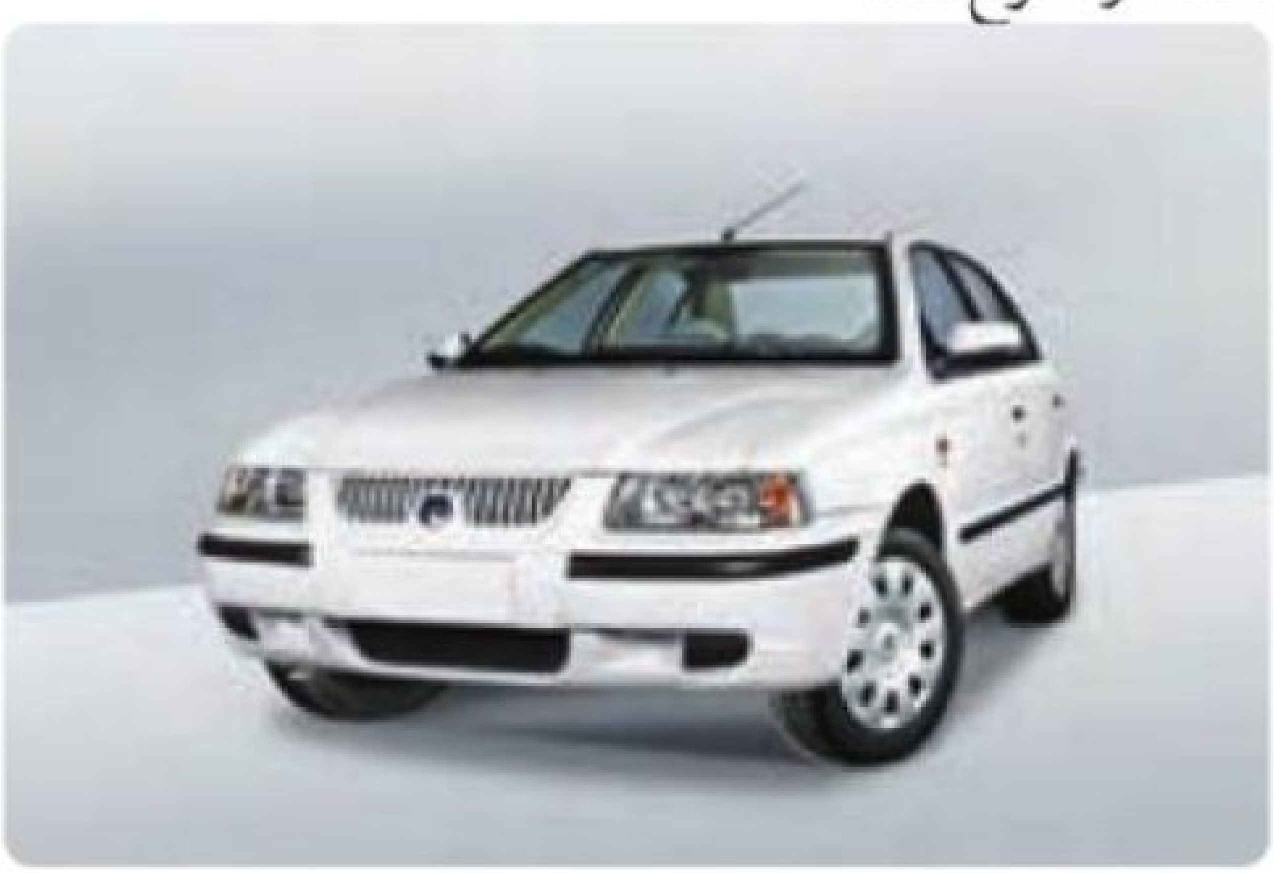
$\xrightarrow{\times}$ ۶۹۰۸۷۳۳ = ۱۳×۹^{۶}

A={۱۱,۲۲, ...,۹۹}

B={۱ ,۲ ,۳ ,۴ ,۵ ,۶ ,۷ ,۸ ,۹}

C={ی , ه , و , ن , م , ل , ق , ط , ص , س , د , ج , ب}

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.



الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$\underbrace{۵}_{\text{مدل}}\times\underbrace{۱۰}_{\text{رنگ}}\times\underbrace{۳}_{\text{حجم موتور}}\times\underbrace{۲}_{\text{دنده}}=۳۰۰$

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل بارنگ مشکی تولید می شود؟

$\underbrace{۵}_{\text{مدل}}\times\underbrace{۱}_{\text{رنگ}}\times\underbrace{۳}_{\text{حجم موتور}}\times\underbrace{۲}_{\text{دنده}}=۳۰$

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

$\underbrace{۵}_{\text{مدل}}\times\underbrace{۱}_{\text{رنگ}}\times\underbrace{۳}_{\text{حجم موتور}}\times\underbrace{۱}_{\text{دنده}}=۱۵$

۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله – خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر :

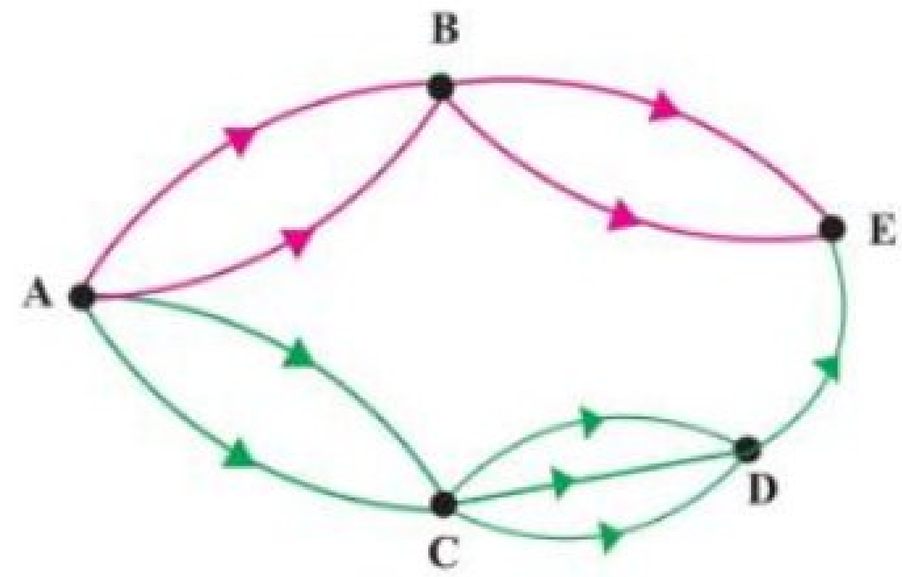
الف) اگر مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟

$$\underbrace{\overbrace{4\times4\times\cdots\times4}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهار گزینه ای}}\ \underbrace{\overbrace{2\times2\times\cdots\times2}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = 2^{25}$$

ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$\underbrace{\overbrace{5\times5\times\cdots\times5}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهار گزینه ای}}\ \underbrace{\overbrace{3\times3\times\cdots\times3}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = 5^{10}\times3^{5}$$

۷ اگر شکل مقابل نشان دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



مسیر ABE : $2\times2=4$

مسیر $ACDE$: $2\times3\times1=6$

$\xrightarrow{+}$ ۱۰

۸ مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

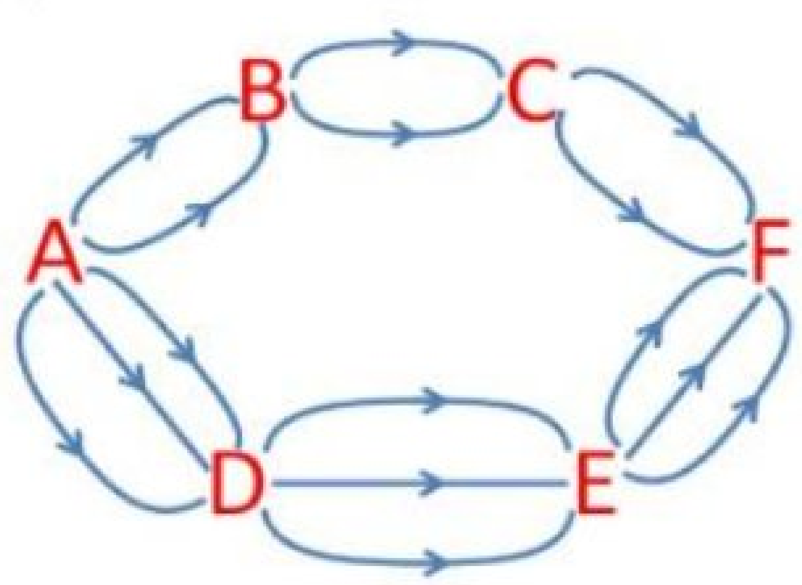
مسئله : چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت؛ به‌طوری که از عدد ۶۰ بزرگتر یا مساوی آن باشند؟

حل : تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست . لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$2\times2\times2+3\times3\times3=35$

مسئله برای سوال ۹ : اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهر های F,E,D,C,B,A باشد و همه جاده ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟



تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: جایگشت

جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به‌هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به‌درگاه مخصوص به‌خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

۲ آیا در سه مربع به‌هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ خیر

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به‌دست آورد؟

٣	٢	١
درگاه اول	درگاه دوم	درگاه سوم

$\xrightarrow{\times}$ ٦

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

می‌خواهیم مسئلهٔ قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به‌صورت مقابل وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پرکردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پرشود؟ ۴

ــ پس از پرشدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟ ۳

ــ حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ ۳ سومین و چهارمین مربع را چطور؟

سومین مربع به ۲ روش و چهارمین مربع به ۱ روش

ــ حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم، یک **جایگشت** از آن اشیاء می‌گوییم.»

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت‌است از حاصل‌ضرب ...۴...×...۳...×...۲...×...۱...

۲ به‌نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به‌ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تِتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟ $5\times4\times3\times2\times1$

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

$7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

۴ با استفاده از ارقام ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

۵ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

$10\times9\times\cdots\times2\times1$

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل‌ضرب نشان دهید.

$n(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به‌صورت !n (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $1!=1$ ، $2!=1\times2$ ، $3!=1\times2\times3$ و الی آخر

قرار داد : $0!=1$

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با ..$n!$..

کار در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $6!=6\times\overbrace{5\times4\times3\times2\times1}^{5!}=6\times5!$

ب) $8!=8\times7!$

پ) $10!=10\times9!$

ت) $n!=n\times(n-1)!$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{5!}{4!}=\frac{5\times\overbrace{4\times3\times2\times1}^{4!}}{\underbrace{4\times3\times2\times1}_{4!}}=5$

ب) $\frac{10!}{9!}=\frac{10\times9!}{9!}=10$

پ) $\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$

ت) $\frac{8!}{6!}=\frac{8\times7\times6!}{6!}=56$

ث) $\frac{10!}{8!}=\frac{10\times9\times8!}{8!}=90$

ج) $\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=n(n-1)$

چ) $\frac{8!}{5!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!}=336$

ح) $\frac{10!}{7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!}=720$

خ) $\frac{n!}{(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}=n(n-1)(n-2)$

د) $\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}=n(n-1)(n-2)(n-3)$

ذ) $\frac{n!}{(n-5)!}=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$

۳ حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۹\times۸ = \frac{۹!}{۷!}$

ب) $۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹!}{۵!}$

پ) $۱۱\times۱۰\times۹ = \frac{۱۱!}{۸!}$

ت) $۸ = \frac{۸!}{۷!}$

ث) $n(n-۱) = \frac{n!}{(n-۲)!}$

ج) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳) = \frac{n!}{(n-۴)!}$

فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a , b ,d , e , f , s , t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با ۷!

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به‌دست آوریم.

- برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمهٔ سه حرفی چند انتخاب داریم؟ ۷

  برای انتخاب دومین و سومین حرف چطور؟ برای دومین حرف ۶ انتخاب و برای سومین ۵ انتخاب داریم.
- بنابراین تعداد کلمات سه حرفیِ موردنظر برابر است با $۵\times۶\times۷$

در واقع آنچه به‌دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید. $۹\times۸\times۷\times۶$

۴ اعداد به‌دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

مرحله دوم: $۷\times۶\times۵ = \frac{۷!}{۴!}$ مرحله سوم: $۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹!}{۵!}$

۵ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-۳)!}$

۶ تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز $(۰\le r \le n)$ را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-r)!}$

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با p(n,r) نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

با حروف کلمهٔ «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

الف) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟

ب) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفیِ بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز را به‌دست آوریم؛ لذا جواب برابر $8!$ است.
در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت‌ها روی هفت حرف دیگر را به‌دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر $7!$ است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالتِ «دی» و «ید» می‌توانند کنار هم بیایند. برای پیداکردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به‌صورت «دی» در کنار هم آمده‌اند، کافی است این دوحرف را یک حرف درنظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز را به‌دست آوریم که برابر است با $7!$. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با $2\times 7!$.

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های شش‌تایی از هشت شیء متمایز یعنی $\frac{8!}{2!}=\frac{8!}{(8-6)!}=P(8,6)$ در حالتی که کلمه بخواهد به «گردی» ختم شود، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص‌اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت‌های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمهٔ «جهان» را به‌دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت‌های دوتایی از چهار شیء متمایز؛ یعنی : $P(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!}=12$

ت) چهار حرف اول ، حروف کلمهٔ «جهان» هستند که به !۴ حالت می‌توانند بیایند. حال ۴ حرف آخر را باید با ۴ حرف باقی‌مانده (گ ر د ی) نوشت که این کار را هم به !۴ روش می‌توان انجام شود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمهٔ مورد نظر به !۴ ×!۴ روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمهٔ «جهان» در کنار هم برابراست با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی !۴. حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که درنظر بگیریم، برای نوشتن کلمهٔ ۸ حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمهٔ «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با !۵. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با : !۵×!۴.

ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ی» باشد. پس ۳ انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هرکدام از این ۳ حرف برای چینش ۷ حرف دیگر !۷ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با : !۷×۳.

کار در کلاس

۱) یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times\cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=۳۶۰$$

۲) با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

$$P(۴,۳)=\frac{۴!}{۱!}=\frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۱}=۲۴$$

تمرین

۱) در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

$$P(۱۸,۳)=\frac{۱۸!}{۱۵!}=\frac{۱۸\times۱۷\times۱۶\times\cancel{۱۵!}}{\cancel{۱۵!}}=۴۸۹۶$$

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تاست؟

$$P(n,۳)=\frac{n!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)=\underbrace{۷\times۶\times۵}_{۲۱۰}\Rightarrow n=۷$$

۳) کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$۶!=۶\times۵!$ درست

$۶!=۳!+۳!$ نادرست

$۲\times۳!=۶!$ نادرست

$۸!=۴!\times۲!$ نادرست

$۴!=\frac{۸!}{۲!}$ نادرست

$(۳!)^۲=۹!$ نادرست

۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$۲\times P(۲۰,۳)=۱۳۶۸۰$ ثانیه

۵ با حروف کلمهٔ «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ !۶ چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟ !۴

ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟ $P(۶,۴)=۳۶۰$

پ) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$۲\times ۳\times ۴\times ۳$

ت) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

جابه‌جایی کُلی $\boxed{\text{گ یا ل}}$ و $\boxed{\text{پیرا}}$

$!۴\times ۲\times ۲=۹۶$

تهیه کنندگان:

جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: ترکیب

فعالیت

۱ همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد $۶۰ = \frac{۵!}{(۵-۳)!}$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از :

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۳۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۳۱	۵۳۱	۵۴۱	۴۳۲	۵۳۲	۵۴۲	۵۴۳

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

عددهای موجود در هر ستون دارای رقم های یکسان هستند و فقط جایگشت های مختلف ارقام صورت گرفته است.

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضویِ مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

کافیست ارقام استفاده شده در هر ستون را به عنوان یک زیر مجموعه ی A انتخاب کنیم. بنابراین ده زیر مجموعه ی سه عضوی وجود دارد.

$\{۱,۲,۳\}, \{۱,۲,۴\}, \{۱,۲,۵\}, \{۱,۳,۴\}, \{۱,۳,۵\}, \{۱,۴,۵\}, \{۲,۳,۴\}, \{۲,۳,۵\}, \{۲,۴,۵\}, \{۳,۴,۵\}$

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

در فعالیت (۱) ترتیب قرار گرفتن ارقام مهم بود ولی در فعالیت (۲) ترتیب قرار گرفتن ارقام اهمیتی نداشت.

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیر مجموعهٔ سه عضوی از فعالیت ۲ را به‌دست می‌دهد؟ یک زیر مجموعه

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ ۶

این عدد را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟

هر سه عضو از اعضای زیر مجموعه را به $۶ = ۳!$ طریق می توان در ترتیب های مختلف نوشت و اعداد متفاوتی ساخت.

نتیجه : همان‌طور که مشاهده کردید، در فعالیت ۱ ترتیب قرارگرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد؛ اما در فعالیت ۲ تمام ۶ روش چینشِ هر سه عدد انتخاب شده یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از مجموعهٔ A را مشخص می‌کند؛ یعنی در واقع هر زیرمجموعهٔ ۳ عضوی، یک حالت را مشخص می‌کند و فقط تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از پنج عضو موردنظر اهمیت دارد.

ازطرفی می‌دانیم تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز برابر است با : $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

بنابراین با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از n شیء متمایز برابر است با : $\frac{P(n,r)}{r!}$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به‌عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء میگوییم.
تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (0\leq r\leq n)$$

مثال

از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل :

الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های چهارتایی از شش شیء متمایز؛ یعنی $P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=۳۶۰$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با :

$$\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{(۶-۴)!۴!}=۱۵$$

مثال

غلامرضا تختی، قهرمان جهان

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر :

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

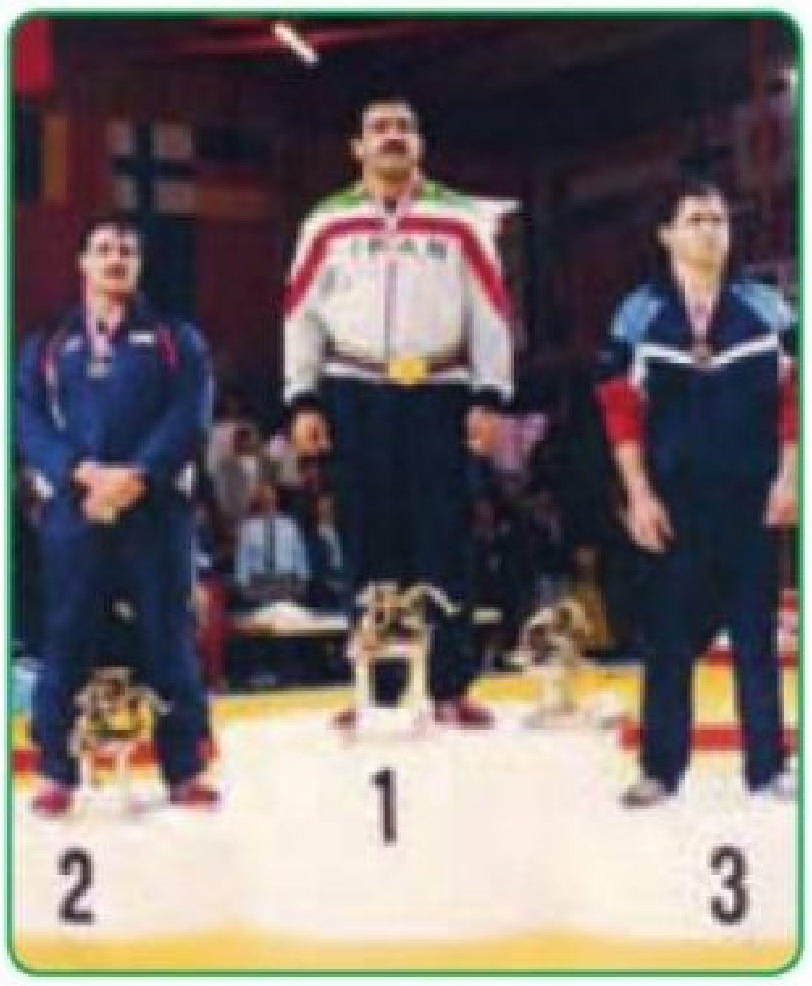
ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیتهٔ ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟



علیرضا سلیمانی، قهرمان سنگین‌وزن جهان

حل :

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیرمجموعه‌های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با :

$$\binom{9}{4}=\frac{9!}{5!4!}=\frac{9\times8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times4\times3\times2\times1}=126$$

ب) تعداد روش‌های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با : $\binom{4}{1}=4$. به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با :

$4\times3\times2=24$

پ) تعداد راه‌های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با : $\binom{4}{2}=6$. حال ۳ داور دیگر باید از بین ۵ داورِ غیرایرانی انتخاب شوند که به $\binom{5}{3}=10$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد روش‌های انجام کار برابر است با :

$6\times10=60$

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می‌تواند باشد. در حالتی‌که داوران ایرانی ۳ نفر باشند، این داوران به $\binom{4}{3}=4$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفرِ دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که این کار به $\binom{5}{2}=10$ طریق می‌تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب $4\times10=40$ روش وجود دارد.

در حالتی‌که داوران ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به $\binom{4}{4}=1$ روش صورت می‌گیرد و یک داورِ دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شود که به $\binom{5}{1}=5$ طریق می‌تواند صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت $1\times5=5$ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با $40+5=45$.

ث) تعداد روش‌های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با : $\binom{4}{3}=4$، تعداد روش‌های انتخاب ۲ داور ژاپنی برابر است با : $\binom{3}{2}=3$ و تعداد راه‌های انتخاب ۲ داور روس برابر است با : $\binom{2}{2}=1$ لذا طبق اصل ضرب، جواب برابر است با : $4\times3\times1=12$.

ج) می‌دانیم تعداد کل کمیته‌های ۵ نفره که می‌توان انتخاب کرد، برابر است با $\binom{9}{5}=126$.

از طرفی این کمیته‌های ۵ نفره به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شوند :

دستهٔ اول : حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دستهٔ دوم : هیچ داور ایرانی در آنها نیست.
جمع افراد این دو دسته برابر ۱۲۶ می شود و از آنجا که محاسبهٔ دستهٔ دوم آسان‌تراست، کافی است تعداد دستهٔ دوم را محاسبه کنیم و از ۱۲۶ کم کنیم.

اما تعداد افراد دستهٔ دوم برابر $\binom{۵}{۵}=۱$ است. چرا؟

با توجه به اینکه می‌خواهیم داور ایرانی درون آن نباشد، هر ۵ نفر را از ۵ نفر داور ژاپنی و روسی انتخاب می‌کنیم

لذا تعداد افراد دستهٔ اول برابر است با : ۱۲۵= ۱-۱۲۶

کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه‌ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی‌معنی). ترتیب مهم است.

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز. ترتیب مهم نیست

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند. ترتیب مهم است

توجه : به نظر بنده حقیر بهتر بود متن قسمت (پ) به صورت زیر نوشته می‌شد، تا خالی از هرگونه ابهام باشد :

انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط، به ترتیب گفته شده، از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند. ترتیب مهم نیست

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. ترتیب مهم نیست

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود. ترتیب مهم است

۲ در هر کدام از موارد «کاردرکلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده‌کردن جواب نیست)

پ) $P(۷,۳)$ ب) $\binom{۵}{۳}$ الف) $P(۵,۳)$

ج) $P(۱۰,۳)$ ث) $\binom{۱۰}{۳}$ ت) $\binom{۷}{۳}$

۳ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه :

الف) کمیتهٔ ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۸}{۲}=۱۰\times۱۵\times۲۸=۴۲۰۰$

ب) کمیتهٔ ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۱}\times\binom{۸}{۱}=۵\times۶\times۸=۲۴۰$

پ) کمیتهٔ ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟ $\binom{۸}{۱}\times\binom{۱۱}{۱}+\binom{۸}{۲}=۸۸+۲۸=۱۱۶$

فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیتهٔ دو نفره انتخاب شود، به‌گونه‌ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چندحالت برای انجام این کار وجود دارد؟

به‌جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است، دقت کنید.

محمد : از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشتهٔ سوم کسی انتخاب نشود؛ لذا سه حالت زیر را می‌توان درنظر گرفت :

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۰}=۲\times۲\times۱=۴$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۰}\binom{۲}{۱}=۲\times۱\times۲=۴$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{۲}{۰}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۱\times۲\times۲=۴$$

پس در کل ۱۲=۴+۴+۴ حالت امکان دارد.

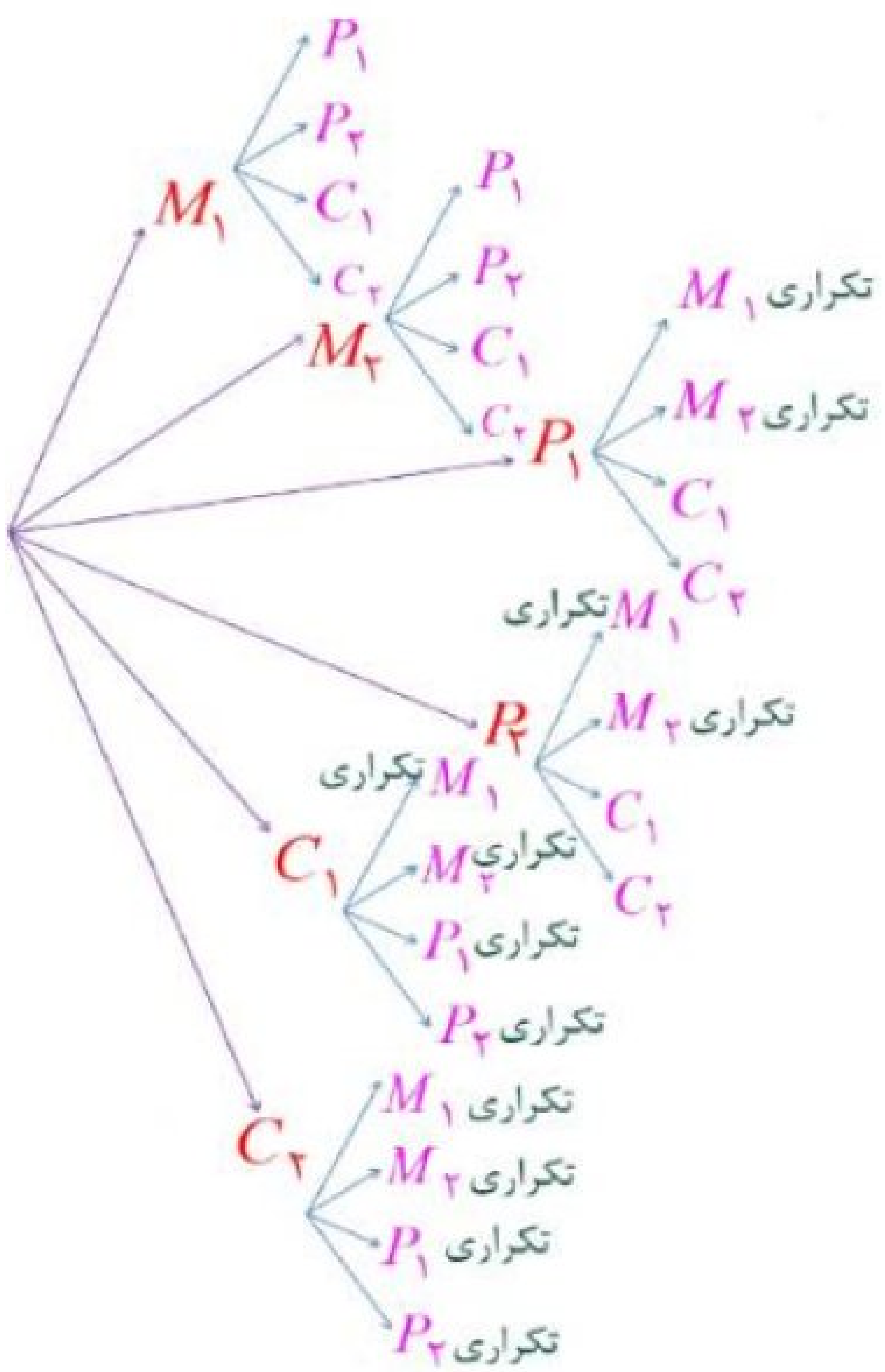
پژمان : می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های انتخاب دو رشته‌ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می‌کنیم که به $\binom{۳}{۲}$ راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشتهٔ انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب کرد؛ لذا جواب برابر است با : $\binom{۳}{۲}\times۲\times۲=۱۲$.

حمید : ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن‌را حل کرد.

اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد؛ پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشتهٔ او باشد؛ پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر ۲۴=۴×۶ حالت است.

ـ دو نفر مدرس ریاضی را M_1 و M_2، دو نفر مدرس فیزیک را P_1 و P_2، و دو نفر مدرس شیمی را C_1 و C_2 درنظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.



پاسخ حمید با توجه به نمودار درختی روبرو غلط می‌باشد.

فعالیت

۱ می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه‌های rتایی از یک مجموعهٔ n عضوی است.

حال $\binom{n}{0}$ و $\binom{n}{1}$ را یک‌بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$، و یک‌بار با فرمول، به‌دست آورید.

هر مجموعه n عضوی دارای یک زیر مجموعه بی‌هیچ عضوی به نام تهی است بنابراین: $\binom{n}{0}=1$ اثبات به کمک فرمول $\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\times n!}=1$

هر مجموعه n عضوی دارای n زیر مجموعه یک عضوی است بنابراین: $\binom{n}{1}=n$ اثبات به کمک فرمول $\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\times(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{1\times(n-1)!}=n$

۲ الف) یک مربی قصددارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ ۱۰ حالت امکان پذیر است.
با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

به زمین نمی‌روند	به زمین می‌روند
۴،۵	۱،۲،۳
۳،۵	۱،۲،۴
۴و۳	۵و۲و۱
۵و۲	۴و۳و۱
۴و۲	۵و۳و۱
۳و۲	۵و۴و۱
۵و۱	۴و۳و۲
۴و۱	۵و۳و۲
۳و۱	۵و۴و۲
۲و۱	۵و۴و۳

ب) این‌بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟
جواب، بر عکس حالت (الف)، ستون سمت راست می باشد، بنابراین در این مورد نیز ۱۰ انتخاب دارد

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{۵}{۲}$ و $\binom{۵}{۳}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟
این دو انتخاب با هم برابرند زیرا تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر به این معناست که ۲ نفر از ۵ نفر انتخاب نشوند.

ت) درستی تساوی $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ را یک‌بار با استفاده از توجیه بالا و یک‌بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.
تعداد انتخاب r نفر از n نفر به این معناست که بقیه (یعنی $n-r$ نفر) را انتخاب نکنیم پس $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

اثبات به کمک فرمول: $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!\times(n-(n-r))!} = \frac{n!}{r!\times(n-r)!} = \binom{n}{r}$

۳ جاهای خالی را پرکنید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با : $\binom{۲۶}{۵}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با : $\binom{۲۵}{۴}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است با : $\binom{۲۵}{۵}$

ت) بنابراین : $\binom{۲۶}{۵} = \binom{۲۵}{۴} + \binom{۲۵}{۵}$

۴ فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. $(a \in A)$

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ A برابر است با : $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با : $\binom{n-۱}{r-۱}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با : $\binom{n-۱}{r}$

ت) بنابراین : $\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$

تمرین

۱ یک فروشندهٔ تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمهٔ کدو، تخمهٔ ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

$$\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}=۲۸+۷+۱=۳۶$$

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

الف) $\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۴}{۳}=۱\times۳\times۳۶۴=۱۰۹۲$

ب) $\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۱}{۲}=۱\times۳\times۳\times۵۵=۴۹۵$

پ) $\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۹}{۱}=۱\times۳\times۳\times۲\times۹=۱۶۲$

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ فرض کنیم تعداد داوطلبان n نفر باشد بنابراین:

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow n(n-۱)=۵۶=۸\times۷\Rightarrow n=۸$$

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۵}=۱۲۰+۲۱۰+۲۵۲=۵۸۲$$

۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به‌دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$۴+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

چون ممکن است میزان ترکیب رنگ ها یکسان نباشد به طور مثل یکبار ۵۰٪ از یک رنگ و ۵۰٪ از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰٪ از یکی و ۴۰٪ از دیگری استفاده شود و در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

۶ هفت نقطهٔ A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{۷}{۳}=۳۵$$

۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟ $\binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

اگر این دو ادویه استفاده شوند ، ادویه سوم از ۸ ادویه باقیمانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه :

$\binom{۸}{۱} =$ تعداد حالات وجود دو ادویه با هم

تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده نشوند = تعداد کل حالات - تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده می شوند = $\binom{۱۰}{۳} - \binom{۸}{۱} = ۱۲۰ - ۸ = ۱۱۲$

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

تعداد حالاتی که هر سه نباید استفاده شوند = تعداد کل حالات - تعداد حالاتی که هر سه استفاده شده = $\binom{۱۰}{۳} - \binom{۳}{۳} = ۱۲۰ - ۱ = ۱۱۹$

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

هر سه ادویه باید از دسته ی اول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته ی دوم انتخاب شوند . بنابراین : $\binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۱۰ + ۱۰ = ۲۰$

۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

الف) $\binom{۶}{۲} \times \binom{۵}{۳}$

مسئله : به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۶ زن ، ۵ نفر انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب ۳ زن و ۲ مرد وجود داشته باشد ؟

ب) $\binom{۶}{۲} + \binom{۵}{۳}$

مسئله : احسان می خواهد با پول های قلکش ۲ مداد یا ۳ پاک کن (فقط یکی از این دو نوع) را خریداری کند . اگر در مغازه ی لوازم التحریر فروشی فقط ۶ نوع مداد و ۵ نوع پاک کن موجود باشد ، احسان چند انتخاب برای خرید دارد ؟

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۷
آمار و احتمال

امروزه آمار و احتمال به عنوان یک علم پرکاربرد در همهٔ علوم از جمله علوم پزشکی، علوم فنی ومهندسی، هواشناسی، محیط زیست و ... استفاده می‌شود.

آمار و احتمال در کشاورزی

آمار و احتمال در پزشکی

آمار و احتمال درمحیط زیست

آمار و احتمال در مهندسی کامپیوتر

درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

مقدمه

پیشامدهایی وجود دارند که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند و ما ازچگونگی رخ دادن آنها اطلاع نداریم. به‌عنوان مثال تا زمانی که سکه را پرتاب نکرده‌ایم، نتیجهٔ پرتاب سکه (پشت یا رو آمدن آن)، مشخص نیست. چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجهٔ آن به‌طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد؛ اما از همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم، پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم. به‌عنوان مثال نتیجهٔ یک بازی فوتبال از قبل، قابل پیش‌بینی نیست؛ اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم‌ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد.

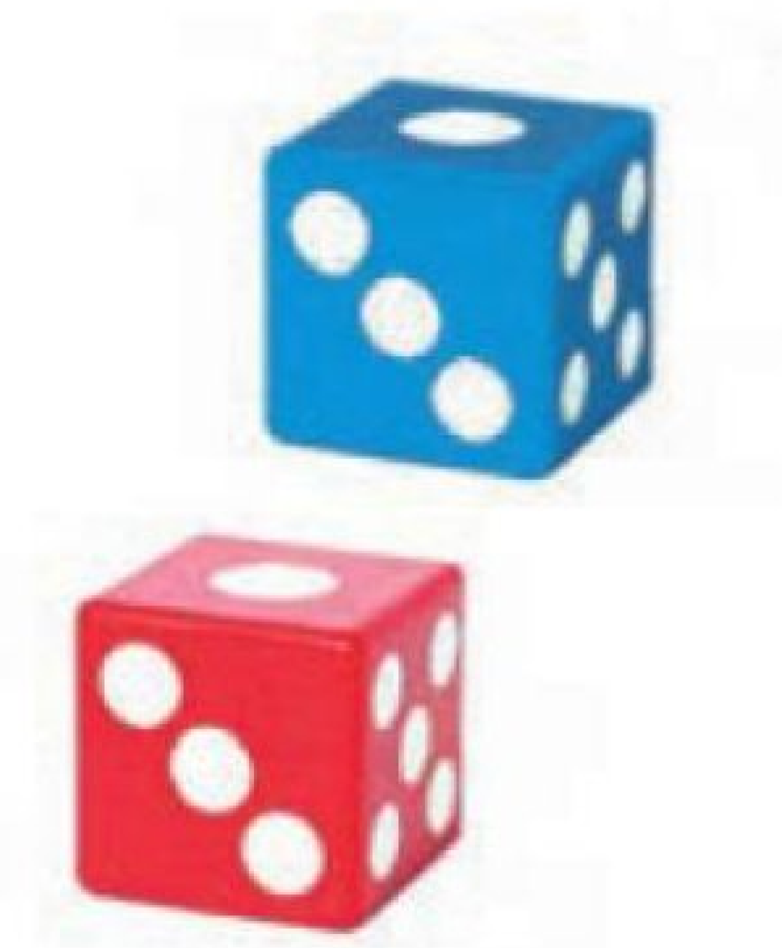
همان‌طور که در سال قبل خواندید، مجموعهٔ شامل همهٔ این حالت‌های ممکن، فضای نمونه‌ای نامیده می‌شود. اگر این مجموعه را S بنامیم، هر زیر مجموعهٔ S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

پیشامدهای تصادفی

فعالیت

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید :

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱و۳)	(۱و۴)	(۱,۵)	(۱و۶)
۲	(۲,۱)	(۲و۲)	(۲,۳)	(۲و۴)	(۲و۵)	(۲,۶)
۳	(۳و۱)	(۳و۲)	(۳,۳)	(۳و۴)	(۳,۵)	(۳و۶)
۴	(۴و۱)	(۴,۲)	(۴و۳)	(۴و۴)	(۴و۵)	(۴و۶)
۵	(۵و۱)	(۵و۲)	(۵و۳)	(۵و۴)	(۵و۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶و۲)	(۶و۳)	(۶و۴)	(۶و۵)	(۶,۶)



تعداد کُل حالات $= ۶ \times ۶ = ۳۶$

۲ قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟ پیشامدهایی که در آن مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد.

۳ خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند هاشور بزنید؛ چه الگویی به‌دست می‌آید؟ هر دو حالت ۱۸ مورد می‌باشند، ۹ مورد هر دو عدد رو شده زوج و ۹ مورد هر دو عدد رو شده فرد می‌باشند.

۴ با توجّه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.
مسئله: تعداد حالت‌هایی را بنویسید که در آن اعداد رو شده برابر باشند. جواب: ۶ حالت وجود دارد.

۵ با توجّه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به‌عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است) مجموع دو عدد رو شده = x_i و تعداد = n

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$n(x_i)=\begin{cases} x_i-1 & x_i=۲,۳,۴,۵,۶,۷ \\ ۱۳-x_i & x_i=۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲ \end{cases}$$

کار در کلاس

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

۱ آیا می‌توانید نتیجهٔ حاصل را به‌صورت قطعی بیان کنید؟ خیر

۲ آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟ بله، تصادفی است زیرا نتیجه آن قبل از وقوع قابل پیش‌بینی نیست.

۳ همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

{۱پ و ۲پ و ۳پ و ۴پ و ۵پ و ۶پ و ۱ر و ۲ر و ۳ر و ۴ر و ۵ر و ۶ر}

۴ تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به‌دست آورید. $۲\times۶=۱۲$

۵ جدول ۶×۲ یا ۲×۶ مربوط به این آزمایش را رسم کنید.

سکه \ تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
پ	۱پ	۲پ	۳پ	۴پ	۵پ	۶پ
ر	۱ر	۲ر	۳ر	۴ر	۵ر	۶ر

مثال ۱

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ امّا از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به‌دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجّه به اصل ضرب تعداد همهٔ حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از: $۲^۴=۲\times۲\times۲\times۲$. حالت (پ، پ، د، پ) به معنای این است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید.

پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» = A

A = {(د، پ، پ، پ) و (پ،د،پ،پ) و (پ،پ،د،پ) و (پ، پ، پ، د)}

ب پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» = B

B = {(پ، پ، پ، پ) و (د،پ،پ،پ) و (پ،د،پ،پ) و (پ،پ،د،پ) و (پ، پ، پ، د)}

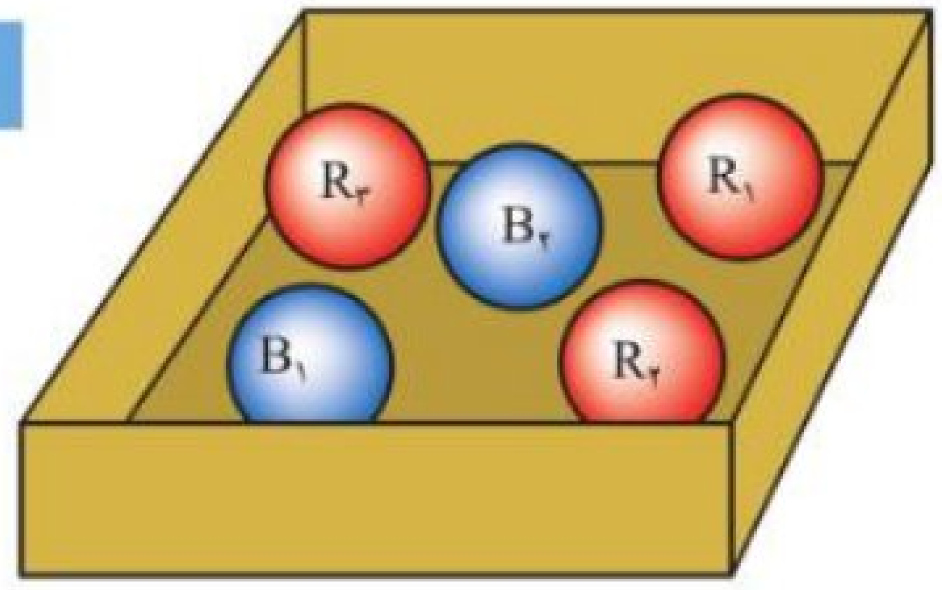
پ پیشامد اینکه « تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند» = C

C ={(پ، پ، د، د) و (پ،د،د،پ) و (د،پ،پ،د) و (پ،د،پ،د) و (د،پ،د،پ) و (د، د، پ، پ)}

ت پیشامد اینکه « تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد » = D

D ={(پ، پ، پ، پ) و (پ،پ،پ،د) و(پ،پ،د،پ) و (پ،د،پ،پ) و (د، پ، پ، پ)}

مثال ۲



در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهرهٔ آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از $\binom{5}{3}=\cdots$ زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه ای به صورت زیر نوشته می شود :

$$S=\{R_1R_2R_3 \text{ و } R_1R_2B_1 \text{ و } R_2R_3B_2 \text{ و } R_1R_3B_1 \text{ و } R_1R_3B_2 \text{ و } R_1R_2B_2 \text{ و } R_2R_3B_1 \text{ و } B_1B_2R_1 \text{ و } B_1B_2R_2 \text{ و } B_1B_2R_3\}$$

اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب A و B و C بنامیم؛ خواهیم داشت :

$$A=\{B_1R_1R_2 \text{ و } B_1R_1R_3 \text{ و } R_2R_3B_2 \text{ و } R_1R_3B_2 \text{ و } R_1R_2B_2 \text{ و } R_2R_3B_1 \text{ و } B_1B_2R_1 \text{ و } B_1B_2R_2 \text{ و } B_1B_2R_3\}$$
$$B=\{B_1R_1R_2 \text{ و } R_2R_3B_2 \text{ و } R_1R_3B_1 \text{ و } R_1R_2B_2 \text{ و } R_1R_2B_2 \text{ و } R_2R_3B_1 \text{ و } R_1R_2R_3\}$$
$$C=\{R_1R_2R_3\}$$

اگر S را مجموعهٔ مرجع فرض کنیم، متمم A یعنی A' با کدام‌یک از مجموعه های B یا C برابر است؟ متمم A یعنی A' برابر C است. $A'=C$

پیشامدها و برخی اعمال روی آنها

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این‌صورت هر یک از پیشامدهای $(A\cup B)$، $(A\cap B)$ و $(A-B)$ در فضای نمونه‌ای S به‌صورت‌های زیر توصیف می‌شوند :

الف) اجتماع دو پیشامد :

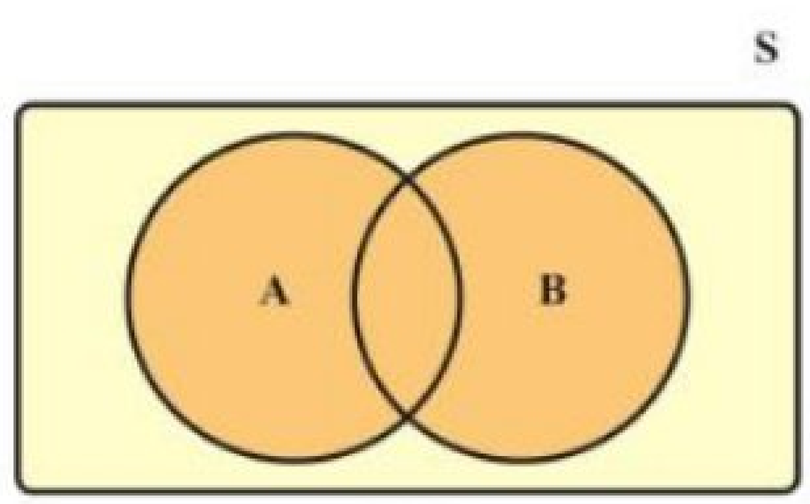
پیشامد $(A\cup B)$ وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد. (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند.)

ب) اشتراک دو پیشامد :

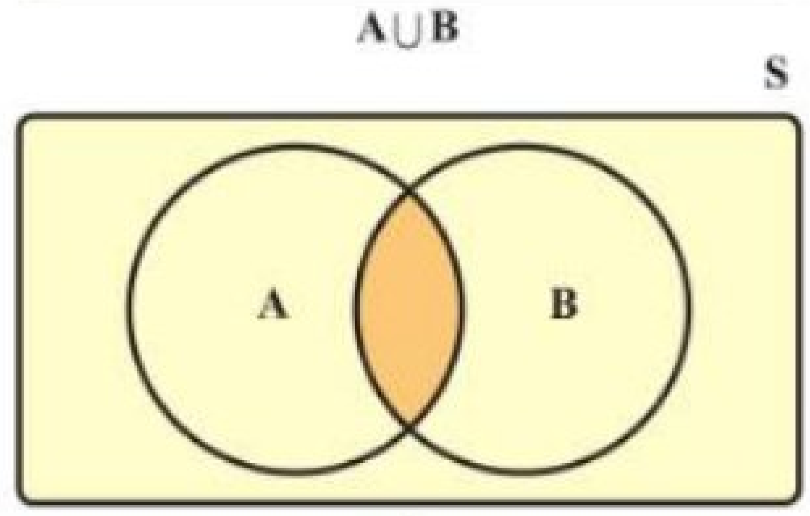
پیشامد $(A\cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد با هم رخ بدهند (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد).

پ) تفاضل دو پیشامد :

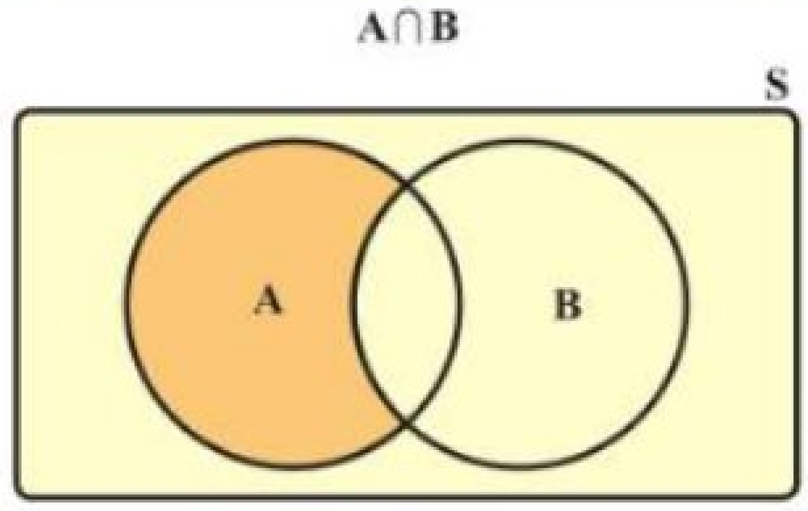
پیشامد $(A-B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.



(الف)
$A\cup B$

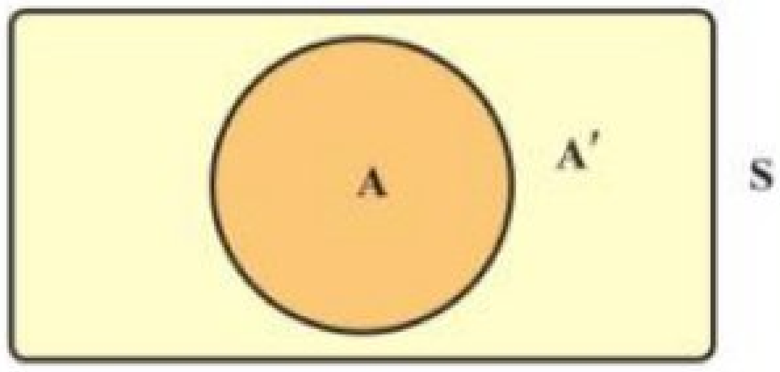


(ب)
$A\cap B$

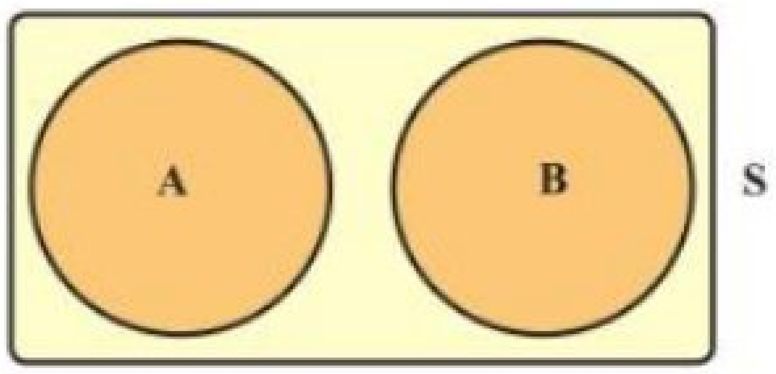


(پ)
$A-B$

ت) متمم یک پیشامد :



اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیشامد A که با ′A (یا A^C) نمایش داده می‌شود، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد؛ بنابراین با توجّه به نمودار واضح است که $A \cup A' = S$ و $A \cap A' = \varnothing$



تعریف : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \varnothing$، در این‌صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی دهند.

تذکر : با توجّه به تعریف متمم یک پیشامد، همواره هر پیشامد تصادفی مانند A ومتمم آن یعنی ′A، دو پیشامد ناسازگارند.

اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه $A \cap B = \varnothing$ و $A \cap C = \varnothing$ و $B \cap C = \varnothing$ باشد.

مثال ۳

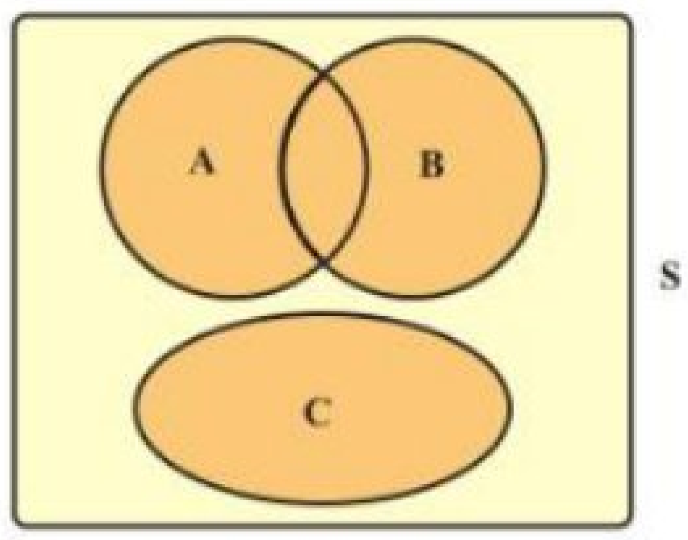
اگر یک تاس را بیندازیم و پیشامدهای «روشدن عدد بزرگ‌تر از ۴»، «رو شدن عدد کوچک‌تر از ۳» و «رو شدن عدد ۳ یا ۴» را به‌ترتیب A، B و C تعریف کنیم، در این‌صورت همواره، پیشامدهای A، B و C دو به دو ناسازگارند و داریم :

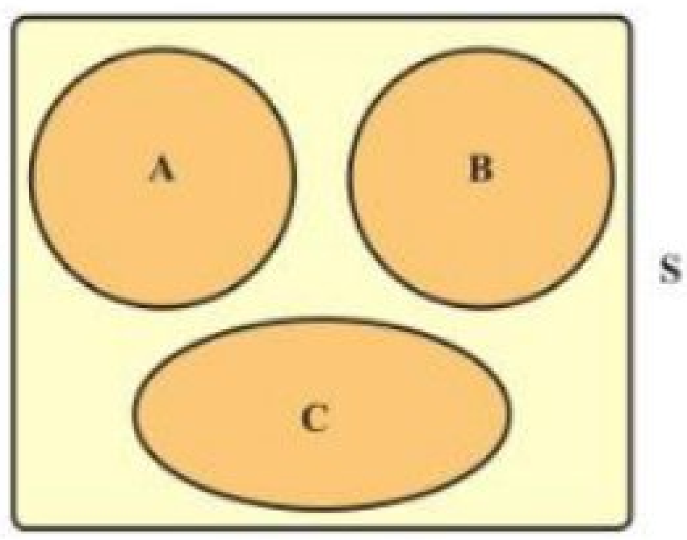
الف) $A=\{۵,۶\}$, $B=\{۱,۲\}$, $C=\{۳,۴\}$

ب) $A'=\{۱,۲,۳,۴\}$, $B'=\{۳,۴,۵,۶\}$, $C'=\{۱,۲,۵,۶\}$

مثال ۴

کدام‌یک از شکل های زیر سه پیشامد دو به دو ناسازگار را نشان می دهد؟





جواب ⇐

کار در کلاس

۱ با توجّه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پرکنید.

A = پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند = {(۱,۱) , (۱,۳), (۱,۵), (۳,۱), (۳,۳), (۳,۵), (۵,۱), (۵,۳), (۵,۵)}

B = پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد = {(۱,۵) , (۵,۱) , (۲,۴), (۴,۲), (۳,۳)}

C = پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید = {(۳,۱) , (۳,۲), (۳,۳), (۳,۴), (۳,۵), (۳,۶), (۶,۱), (۶,۲), (۶,۳), (۶,۴), (۶,۵), (۶,۶)}

الف پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آنها ۶ باشد»

$(A \cap B) = \{(۱,۵) , (۵,۱), (۳,۳)\} \rightarrow n(A \cap B) = ۳$

ب پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد»

$A \cup B = \{(۱,۱) , (۱,۳) , (۳,۱) , (۱,۵) , (۵,۱) , (۲,۴) , (۴,۲) , (۳,۳) , (۳,۵) , (۵,۳) , (۵,۵)\}$

پ پیشامد آنکه (A−C) رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.» پس داریم :

A−C = {(۱,۱) , (۱,۳) , (۱,۵) , (۵و۱) , (۵و۳) , (۵,۵)}

ت پیشامد (C−B) را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید. تاس آبی مضرب ۳ باشد ولی مجموع دو تاس ۶ نباشد.

C − B = {(۳,۱),(۳,۲),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)}

ث اگر پیشامد D را « مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم ، آیا D و E ناسازگارند؟ چرا؟ بله ناسازگارند زیرا :

D = {(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)}

E = {(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)}

$D \cap E = \varnothing$

۲ تاسی را می اندازیم ، روی فضای نمونه ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعریف کنید که :

الف A و B ناسازگار باشند. A = {۱,۲,۳} , B = {۴,۵}

ب A و B و C دو به دو ناسازگار باشند. A = {۱} , B = {۲,۴} , C = {۵,۶}

پ (A ∩ B) و C ناسازگار باشند . A = {۱,۲,۳} , B = {۳,۴} , C = {۵,۶}

مثال ۵

یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم :

الف فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

n(S) = ۲×۲× ...۶... = ...۲۴...

ب پیشامد آنکه «هردو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید.

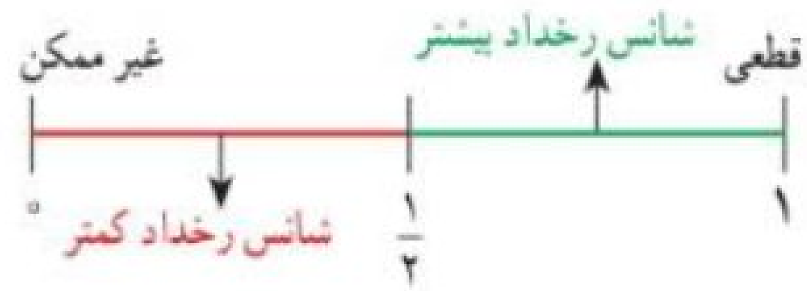
A = {(ر , ر ,۲) , (۴ و ر و ر) , (۶ و ر و ر)}

پ پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید.

B = {(ر , ر ,۵) , (ر , پ ,۵) , (پ , ر ,۵) , (پ , پ ,۵) , (پ , پ ,۱) , (پ و پ و ۲) , (پ و پ و ۳) , (پ و پ و ۴) , (پ , پ ,۶)}

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

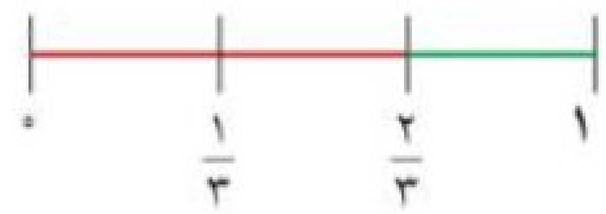
می‌دانیم اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و A ⊆ S یک پیشامد در فضای S باشد، احتمالِ رخداد پیشامد A یعنی P(A) که به‌صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود، عددی است حقیقی که ۰ ≤ P(A) ≤ ۱ . همچنین می‌دانیم P(A) هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A بیشتر و هر چقدر به‌صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبهٔ P(A) شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کنیم.



مثال ۱

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم :

اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟



$S = \{۴۳,۳۴,۲۴,۴۲,۲۳,۳۲\}$

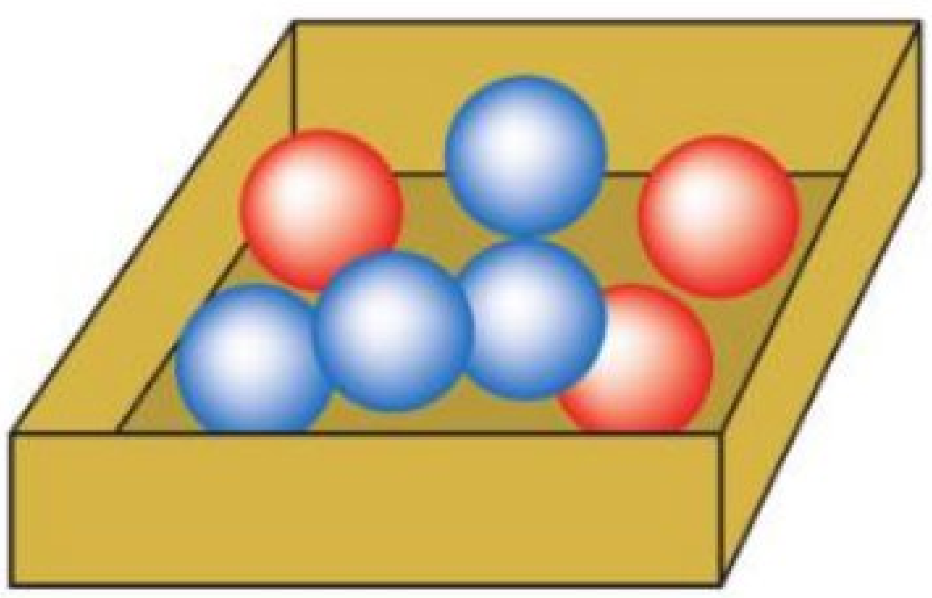
$A = \{۳۴, ..۲۴.., ..۴۲.., ۳۲\}$, $B = \{..۴۳.., ..۲۳..\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \ , \ P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

واضح است که $P(A) > P(B)$ ، پس شانس رخداد پیشامد A از شانس رخداد پیشامد B بیشتر است. (در این مثال تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد ، بیشتر است)

مثال ۲

در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :



الف) هر سه مهره آبی باشند.

ب) هر سه مهره همرنگ باشند.

پ) دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند.

الف) $n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!۴!} = ۳۵$

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۳}}{۳۵} = \frac{۴}{۳۵}$$

ب) $P(B) = \frac{\binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳}}{۳۵} = \frac{۱}{۷}$

یا هرسه مهره آبی ، یا هر سه قرمز

پ) $P(C) = \frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱} + \binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}}{۳۵} = \frac{۱۸+۱۲}{۳۵} = \frac{۶}{۷}$

دو مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ آبی یا دو آبی و یک قرمز

فعالیت

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این‌صورت :

I) $۰ \leq P(A) \leq ۱$

زیرا : $A \subseteq S \Rightarrow ۰ \leq n(A) \leq n(S) \Rightarrow \frac{۰}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow ۰ \leq P(A) \leq ۱$

II) $P(\varnothing) = ۰ \ , \ P(S) = ۱$

زیرا : $P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{۰}{n(S)} = ۰ \;,\; P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = ۱$

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

زیرا : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } n(S)}$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

آندری نیکولاویچ کولموگوروف ریاضی‌دان اهل روسیه بود که دستاوردهای برجسته‌ای در زمینه های احتمال دارد. او برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ میلادی اصولی تحت عنوان اصول احتمال را معرفی کرد.

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S، همواره تساویِ زیر برقرار است :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

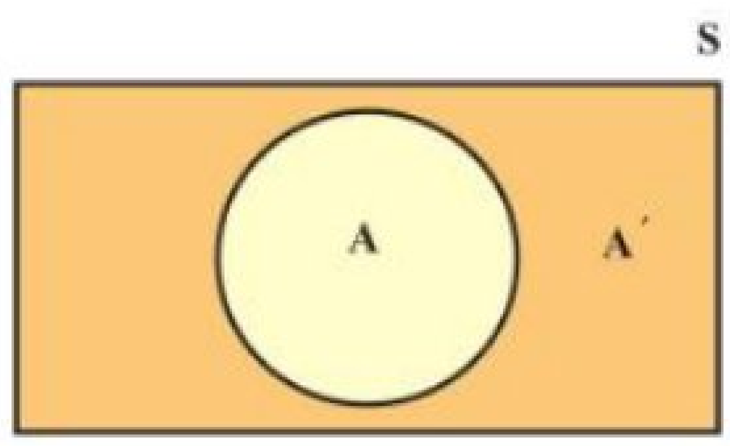
اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به‌صورت زیر نوشته می شود :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

کار در کلاس

اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ایِ S باشد، (A و A' ناسازگارند) نشان دهید.

$P(A) = ۱ - P(A')$



می‌دانیم $P(A \cup A') = P(S) = ۱$

از طرفی $P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) + P(A') = ۱ \Rightarrow \begin{cases} P(A) = ۱ - P(A') \\ P(A') = ۱ - P(A) \end{cases}$

مثال ۱

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف هر دو تاس زوج باشند؟ (می‌دانیم در انداختن دو تاس $n(S)=۶^۲=۳۶$)

پیشامد هر دو زوج $A = \{(۲,۲) , (۲,۴) , (۴,۲) , (۲و۶),(۶و۲),(۴و۶),(۶و۴),(۴و۴), (۶,۶)\}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

ب مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند

مجموع دو تاس ۸ = B → $B = \{(۳,۵) , (۵,۳) , (۲,۶) , (۶,۲), (۴,۴)\}$

هر دو تاس فرد = C → $A = \{(۱و۱),(۱و۳),(۱و۵),(۳و۱),(۳و۳),(۳و۵),(۵و۱) , (۵و۳) , (۵و۵)\}$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۲}{۳۶}=$$

$$\left((B\cap C)=\{(۳,۵),(۵,۳)\}\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{۲}{۳۶}\right)$$

پ مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

$D=$ مجموع دو تاس ۷ $\rightarrow D=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

$A=$ هر دو تاس زوج $\rightarrow n(A)=۹\ ,\ (A\cap B)=\varnothing$

$$\Rightarrow P(D\cup A)=P(D)+P(A)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}$$

ت مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند تغییر کند و چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ است، زیاد و محاسبهٔ آن طولانی است، از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

$A=$ پیشامد مجموع کمتر از ۱۱

$A'=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$ (پیشامد مجموع، بزرگ‌تر یا مساوی ۱۱)

$$\Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۳۶}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳۳}{۳۶}$$

ث حاصل‌ضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشد؟

$A=\{(۲,۶)$, (۶و۲) , (۳و۴) , (۴و۳)$\}$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}$$

مثال ۲

اگر حروف کلمهٔ جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد:

الف حرف «ی» آخر باشد؟

ب دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

پ با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

حل:

طبق مثال حل شده در فصل ۶ داریم:

الف) $P(A)=\frac{۷!}{۸!}=\frac{۱}{۸}$

ب) $P(B)=\frac{۲!\times ۷!}{۸!}=\frac{۲}{۸}$

پ) ج ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ی

$n(C)=۱\times ۲\times .....\times ۶$

$P(C)=\frac{۶!}{۸!}=\frac{۱}{۵۶}$

تو کز سرای طبیعت نمیروی بیرون
کجا به کوی طریقت گذر توانی کرد

فرض کنیم تعداد دکمه‌های یک رایانه ۵۰ عدد باشد و کودکی که خواندن و نوشتن نمی‌داند، به صورت تصادفی شروع به تایپ کردن کند. چقدر احتمال دارد که یک کلمه مانند «طبیعت» را تایپ کند؟

از آنجایی که رایانه ۵۰ دکمه دارد احتمال انتخاب هر حرف مانند «ط» برابر است با $\frac{۱}{۵۰}$ چون این کلمه ۵ حرف دارد احتمال تایپ آن برابر است با

$$\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}\times\frac{۱}{۵۰}=\frac{۱}{۵۰^۵}$$

اگر همین کودک بخواهد بیت بالا را به طور تصادفی تایپ کند احتمال آن چقدر است؟ این عدد چقدر کوچک است؟

حال اگر شعری که این بیت در آن قرار دارد بخواهیم تصادفی تایپ کنیم احتمال آن چقدر می‌شود؟

اگر کسی به شما بگوید به طور تصادفی کودکی کتاب حافظ را تایپ کرد شما باور می‌کنید؟

طبیعتی که در اطراف ما است بسیار پیچیده‌تر از شعر حافظ است، آیا می‌توان پذیرفت که به طور تصادفی به‌وجود آمده است؟

تمرین

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوجِ کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به‌تصادف برمی‌داریم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید. $S=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ $۳۲=۲^{۵}$

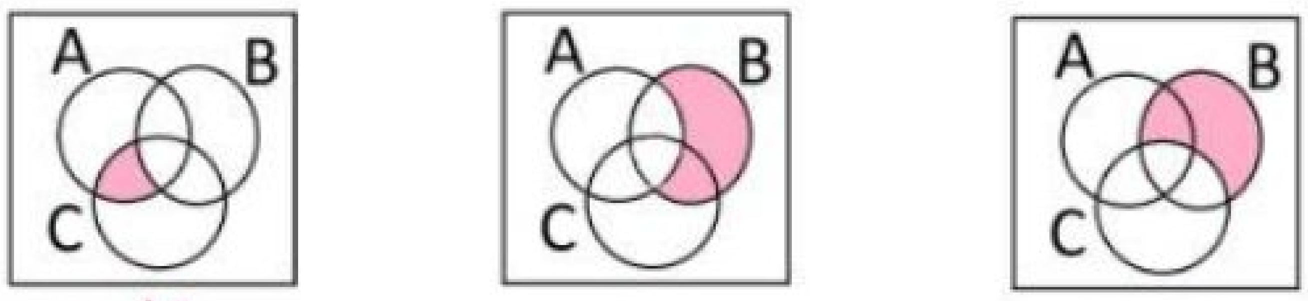
پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد»، مشخص کنید. $A=\{۴,۸\}$

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.



الف ب پ

۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید :

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد». $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد». $B=\{۲,۳,۵,۷\}$

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد». $C=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

پیشامد $E=\{ppd,pdp,dpp,pdd,dpd,ddp,ddd\}$

فضای نمونه‌ای $S=\{ppp,ppd,pdp,dpp,pdd,dpd,ddp,ddd\}$

۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکهٔ دیگر را می‌اندازیم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

$\{(p,۱),(p,۲),(p,۳),(p,۴),(p,۵),(p,۶),(r,r,r),(r,p,r),(r,r,p),(r,p,p)\}$

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

$\{(p,۲)(p,۴)(p,۶)\}$

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

$\{(r,r,r),(r,p,r),(r,r,p)\}$

۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشتهٔ ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی یک تیم دو نفرهٔ تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۰}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳\times ۱}{۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟

$$P(B)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۰}+\binom{۳}{۰}\times\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳+۱}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

پ) ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی و ۱ نفر از رشتهٔ تجربی باشد؟

$$P(C)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۳\times ۲}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A ($P(A)=\frac{۳۴}{۱۰۰}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳۴}{۱۰۰}+\frac{۶۲}{۱۰۰}-\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۸۱}{۱۰۰}$$

۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند ، چقدر احتمال دارد :

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

برادرها

تعداد حالت های دو برادر

$$P(A)=\frac{۶!\times ۲!}{۷!}=\frac{۲}{۷} \Rightarrow P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

۲ حالت جابجایی برادرها

۵!

$$P(B)=\frac{۵!\times ۲}{۷!}=\frac{۱}{۲۱}$$

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A)\le P(B)$.

$$A\subseteq B \Rightarrow n(A)\le n(B)\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(B)}{n(S)}\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

ما در عصر احتمال به سر می بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
اما من
بی نام تو
حتی
یک لحظه احتمال ندارم

چشمان تو
عین الیقین من
قطعیت نگاه تو
دین من است
من از تو ناگزیرم
من
بی نام ناگزیر تو می میرم

قیصر امین پور

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

آیا تاکنون به نقش اعداد و ارقام در زندگی روزمرهٔ یک خانواده فکر کرده‌اید؟

خانواده‌ای را که شامل پدر، مادر و فرزندان است، در نظر بگیرید.

اعضای این خانواده در فصل بهار، می‌خواهند به یک مسافرت تفریحی به یکی از شهرهای کشور بروند.

برای این منظور پدر و مادر خانواده با پیگیری اخبار هواشناسی، به دنبال تعیین مناسب ترین زمان برای مسافرت خود هستند. در این اخبار، کارشناس هواشناسی می گوید :

«براساس اعداد و ارقام جمع آوری شده، دربارهٔ میزان دمای هوا، رطوبت جوی و بارش باران طی ده روز گذشته و با استفاده از روش‌های مدل‌بندی هواشناسی، پیش‌بینی می‌شود، دمای هوا طی سه روز آینده ۵ درجه گرم‌تر شود و بدون تغییر در میزان رطوبت جوی، هوا صاف آفتابی باشد.»

آنها پس از شنیدن این گزارش، تصمیم می‌گیرند سه روز آینده را برای مسافرت انتخاب کنند.

بنابراین هرچه اطلاعات دقیق‌تر و کامل‌تر باشد و از روش‌های مناسب‌تری برای پیش‌بینی استفاده شود، تصمیم‌گیری‌های بهتری در خانواده گرفته می‌شود.

تعریف آمار و علم آمار :

آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

کار در کلاس

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید.

تصمیم گیری برای کشت انواع نخل با توجه به میزان محصول آنها / تصمیم گیری برای انتخاب دانشجوی نمونه

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

نتیجه گیری و قضاوت ؟	تحلیل و تفسیر داده	سازماندهی و نمایش اعداد ؟	جمع آوری اعداد و ارقام

۳ با درنظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

پیش‌بینی و تصمیم گیری در مورد وضعیت هوا در روزهای آینده ؟	تحلیل و تفسیر آمار هواشناسی	سازمان دهی و نمایش آمار مربوط به دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی	جمع آوری اطلاعات ؟

۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟ آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار، مجموعه‌ای از روش‌ها است، این روش‌ها عبارتند از جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع آوری کرده است.

کارخانه لامپ‌سازی

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهندهٔ چه چیزی است؟ افزایش تعداد لامپ‌های معیوب

ب) در این تمرین چه چیزی به‌عنوان آمار محسوب می‌شود؟ داده‌ها (۱۸۰و۱۲۰و۹۰و۷۰و۵۰)

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ☑ ادامهٔ خط تولید لامپ‌ها ☐

۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع آوری داده‌هاست   درست

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجهٔ استفاده از «علم آمار» است   درست

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است   نادرست

۷ به شکل روبه‌رو توجه کنید : آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد و ارقام آن چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید.   بله ، کیفیت تصویر به کمک پیکسل های آن

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر

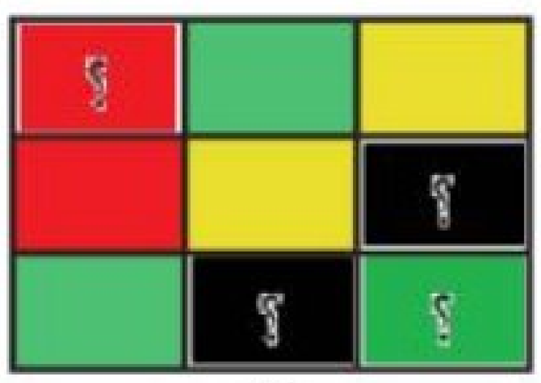
هر تصویر از تعداد زیادی مربع‌های کوچک تشکیل شده است. هر یک از این مربع‌های کوچک «پیکسل» نام دارند و به هر پیکسل می‌توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن است.

در واقع هر تصویر از یک جدول عددی تشکیل می‌شود که هر یک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می‌دهند. جدول مربوط به هر تصویر را به راحتی می‌توان به دست آورد. در اینجا نکتهٔ حایز اهمیت، کاربرد «پردازش تصویر» است.

«پردازش تصویر» یکی از موضوعات بسیار مهم در مهندسی کامپیوتر محسوب می‌شود. رشد استفاده از پردازش تصویر در سیستم‌های «کنترل هوشمند سرعت»، «خواندن اتوماتیک پلاک خودرو در طرح های زوج و فرد»، «طرح ترافیک» و «ثبت تخلفات خودرو» در سال‌های اخیر مشهود بوده است.

با استفاده از معیارهایی که در علم آمار وجود دارد، می‌توان به بررسی کیفیت تصاویر پرداخت و تصاویر مخدوش و نامناسب را با تصاویر حقیقی‌شان مقایسه کرد.

۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.



شکل

؟ ۲	؟ ۳	۱
؟ ۱	؟ ۲	۰
؟ ۳	۰	۳

جدول عددی

جامعه و نمونه

فعالیت

الف) چاقی امروزه، به عنوان یکی از مسائل مهم و اساسی در زمینهٔ سلامت افراد محسوب می‌شود. برای اطلاع بیشتر، کاربرد علم آمار در علوم پزشکی را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در پزشکی (چاقی)

یکی از کاربردهای علم آمار در علوم پزشکی، بررسی موضوع چاقی است. برای اینکه میزان چاقی یک فرد را بسنجیم، از معیاری تحت عنوان، معیار «شاخص تودهٔ بدن» استفاده می کنیم. این معیار از تقسیم وزن افراد (W) برحسب کیلوگرم بر توان دوم قد افراد (H) برحسب متر یا به عبارت دیگر $\frac{W_{kg}}{(H_m)^۲}$ محاسبه می‌شود و براساس آن نتایج زیر به دست می‌آید :

شاخص تودهٔ بدن	طبقه‌بندی
کمتر از ۱۸/۵	کم وزن
۱۸/۵ تا ۲۴/۹	وزن طبیعی
۲۵ تا ۲۹/۹	اضافه وزن
۳۰ تا ۳۴/۹	چاقی درجه یک
۳۵تا۳۹/۹	چاقی درجه دو
بیشتر از ۴۰	چاقی درجه سه

کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی

براساس علم آمار با استفاده از مدل‌های آماری مناسب، عوامل مؤثر بر شاخص تودهٔ بدن شناسایی می‌شود.
به عنوان مثال، عواملی همچون «رژیم غذایی ناسالم» و«کم تحرکی» می‌توانند در بالا رفتن این معیار و ایجاد بیماری چاقی مؤثر باشند. بنابراین، امروزه با توجه به تغییر شیوه‌های زندگی، از جمله ماشینی شدن و استفاده از خوراکی‌های آماده، نیاز به استفاده از رژیم غذایی سالم، عدم مصرف خوراکی‌های مضر و همچنین ورزش و فعالیت بدنی، بسیار ضروری است. به‌همین منظور، ورزش صبحگاهی و ایجاد بوفهٔ سالم در مدارس، گامی کوچک؛ اما مؤثر در جهت سلامت افراد است.

همکار محترم ، این عدد به ۷۴ تصحیح شود.

مثال ۱

فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۴۷ سانتی‌متر باشد. شاخص تودهٔ بدن شخص به‌صورت زیر است :

$$\text{شاخص تودهٔ بدن} = \frac{۱۰۰}{(۱/۷۴)^{۲}} = ۳۳/۰۲$$

۱ با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی، دربارهٔ چاق بودن این شخص به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ چاق (چاقی درجه ۱)

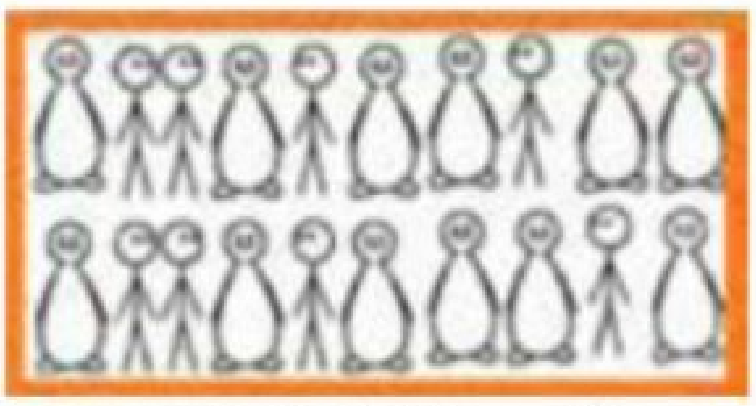
۲ دربارهٔ چاق بودن خودتان و اعضای خانوادهٔ خود اظهار نظر کنید.

ب شکل «الف»، افراد یک شهر را نشان می دهد که شامل افراد عادی و افراد چاق می‌باشند.

شکل الف ــ افراد یک شهر

با هدف به دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می‌کنند، بشماریم یا به عبارت دیگر سرشماری کنیم.

به نظر شما، این کار به سادگی انجام می‌شود؟



شکل ب ــ افراد انتخابی از شهر

همان گونه که احتمالاً حدس زده‌اید، جمع آوری آمار تمام شهر، کار آسانی نیست. همان‌گونه که در شکل «ب» دیده می‌شود، به جای شمارش کل افراد این شهر، می‌توان تعدادی از افراد شهر را انتخاب کرد و براساس آن، پیش‌بینی کرد که چند درصد از افراد این شهر چاق‌اند.

به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش‌بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق‌اند.

همان‌طور که می‌بینید این بار پاسخ به سؤالات، با دقت بیشتر و آسان‌تر داده می‌شود و به‌راحتی درصد افراد چاق در زیر مجموعهٔ انتخابی قابل محاسبه است.

تعریف جامعه یا جمعیت

مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، **جامعه** یا **جمعیت** نامیده می‌شود و هریک از این افراد یا اشیا را **عضو جامعه** می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه

تعداد اعضای جامعه را **اندازهٔ جامعه** یا **حجم جامعه** گویند.

به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

تعریف نمونه

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، **نمونه** گویند و هریک از افراد یا اشیای انتخاب شده را **عضو نمونه** گویند.

تعریف اندازه یا حجم نمونه

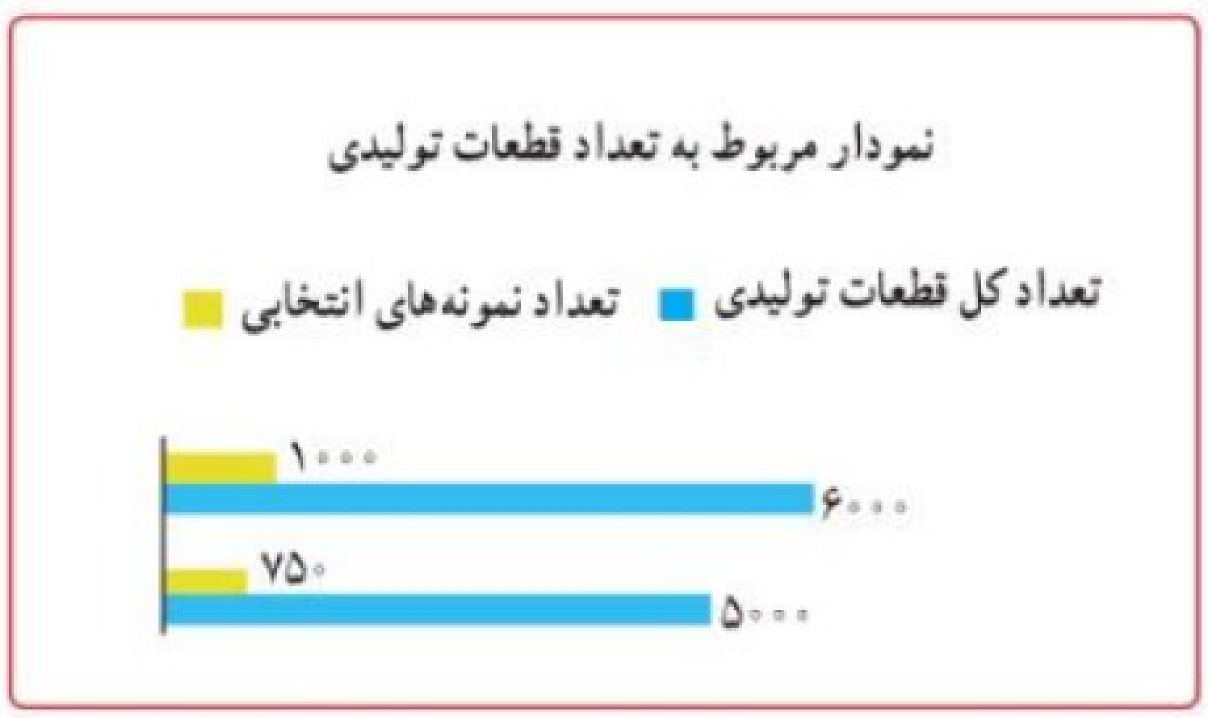
تعداد اعضای نمونه را **اندازهٔ نمونه** یا **حجم نمونه** گویند.

به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هریک از دانش آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

کار در کلاس

در نمودار روبه‌رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانهٔ «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه‌هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار روبه‌رو ارائه شده است.

با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید.



اندازهٔ نمونه	نمونه	اندازهٔ جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۶۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه الف
۷۵۰	قطعات تولیدی انتخابی	۵۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه ب

تمرین

۱ می‌خواهیم دربارهٔ کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید :

ویژگی مورد بررسی	اندازهٔ نمونه	اندازهٔ جامعه	جامعه
کیفیت محصولات تولیدی	۱۰۰	۱۰۰۰۰	کل قطعات تولید شده

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است نادرست

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند نادرست

پ) نمونهٔ زیر مجموعه‌ای از جامعه است درست

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.
هر صف افقی نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

جامعه : کل دانش آموزان مدرسه

اعضای جامعه : هر یک از دانش آموزان مدرسه

نمونه :

الف) دانش آموزانی که یکان کد ملی آنها مضرب ۳ باشد.

ب) دانش آموزانی که ماه تولد آنها زوج باشد.

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: متغیر و انواع آن

فعالیت

شکل روبه‌رو محصولات هلوی یک مزرعهٔ کشاورزی را نشان می‌دهد. میوه‌های هلوی این مزرعه را به عنوان اعضای جامعه در نظر بگیرید. یکی از میوه‌ها را انتخاب کنید. برای بررسی مرغوبیت این میوه، می‌توان به چند ویژگی از آن مانند وزن و کیفیت توجه کرد.
به کمک یک ترازوی دیجیتالی، وزن آن به راحتی قابل اندازه‌گیری است.

مزرعه هلو

الف) برای اندازه‌گیری کیفیت میوهٔ هلو چه باید کرد؟ آیا به کمک ابزار اندازه‌گیری می‌توان به این سؤال پاسخ داد؟ درجه بندی میوه ها

ب) آیا ترازو، پاسخ این سؤال را هم می‌دهد؟ خیر

پ) کشاورز چگونه می‌تواند کیفیت میوهٔ هلوی تولیدی خود را بالا ببرد؟ درجه بندی میوه ها

برای پاسخ به سؤالات «الف» و «ب» باید گفت که هیچ ترازو و یا وسیله‌ای که بتواند میزان کیفیت میوهٔ هلو را اندازه‌گیری کند، وجود ندارد. با این حال کشاورزان با توجه به کیفیت آن، این میوه را به صورت «درجهٔ یک»، «درجهٔ دو» و «درجهٔ سه» به بازار عرضه می‌کنند. به عبارت بهتر، عدد یک را به میوه‌های هلوی بسیار مرغوب و درشت، عدد دو را به میوه‌های هلوی متوسط و عدد سه را به میوه‌های هلوی ریز نسبت می‌دهند.
برای پاسخ به سؤال «پ»، کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی را مطالعه کنید.

کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی (طراحی و نحوه تولید محصولات)

علم آمار در مهندسی کشاورزی کاربرد بسیار زیادی دارد. یک مهندس کشاورزی همواره علاقه‌مند است تا کمیت و کیفیت تولید محصولاتش به بیشترین حد ممکن برسد.
برای این منظور، مهندس کشاورزی از انواع کودها مانند نیترات آمونیوم، فسفر و ... استفاده می‌کند. اما سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود، آن است که چه میزان کود باید استفاده شود تا کمیت و کیفیت تولید محصولات آن به بیشترین مقدار برسد؟
اینجاست که علم آمار با طراحی آزمایش‌هایی، به این سؤال پاسخ می‌دهد.
بدین‌منظور، قطعات مختلفی از زمین به طوری که از نظر رطوبت، حاصلخیزی خاک، نور و ... کاملاً یکسان باشند، در نظر گرفته می‌شود. سپس به مطالعهٔ درصدهای مختلف کودهای مورد نظر در این قطعات زمین پرداخته می‌شود.
به عبارت دیگر علم آمار در تعیین عوامل مؤثر مانند کودهای مورد استفاده در زمین کشاورزی و سطوحی از عوامل مانند درصدهایی از میزان استفادهٔ کودها برای رسیدن به تولیدات بیشتر کشاورزی به مهندسان کشاورزی کمک می‌کند.

تعریف متغیر و مقدار متغیر

شکل الف

متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.
به عنوان مثال در شکل «الف» وزن و کیفیت میوهٔ هلو به عنوان دو متغیر مربوط به میوهٔ هلوست و مقادیر آن در جدول زیر آمده است :

متغیر مربوط به میوهٔ هلو	مقدار متغیر
وزن هلو	۲۰۰ گرم
کیفیت هلو	درجه یک (۱)، درجه دو (۲) ، درجه سه (۳)

کار در کلاس

شکل ب

۱ شکل «ب» یک خودرو را نشان می‌دهد، برخی از ویژگی‌های این خودرو مانند سرعت، میزان بنزین مصرفی و رنگ خودرو در شکل مشخص شده است.
«سرعت خودرو» و «میزان بنزین مصرفی»، قابل اندازه‌گیری است. به عنوان مثال حداکثر سرعت این خودرو در جاده‌ها ۱۲۰ کیلومتر برساعت است. به عبارت دیگر مقدار متغیر «سرعت خودرو» برابر با ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.
همچنین اگر خودرویی به عنوان مثال برای هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف کند؛ بنابراین مقدار متغیر «میزان مصرف خودرو» برابر با ۸ لیتر برای هر ۱۰۰ کیلومتر است.
ولی در این مثال رنگ خودرو قابل اندازه‌گیری نیست. می‌توان انواع رنگ‌های مشکی، سفید و ... را به عنوان مقادیر متغیر «رنگ خودرو» در نظر گرفت و آنها را با اعداد دلخواهی مانند عدد یک برای رنگ مشکی و عدد دو برای رنگ سفید نشان داد.
به نظر شما چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟
در سطرهای خالی مقدار هریک از متغیرهای معرفی شدهٔ جدید را بیان کنید.

متغیرهای یک خودرو	مقدار متغیر
حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده	۱۲۰
میزان بنزین مصرفی برای هر ۱۰۰ کیلومتر	۸
رنگ خودرو	سفید
تاریخ تولید خودرو	
سوخت مصرفی خودرو (بنزینی، دوگانه)	

۲ جدول زیر متغیرهایی را که دربارهٔ یک دانش‌آموز مطالعه شده است، نشان می‌دهد. مقدار این متغیرها را دربارهٔ خودتان در جدول زیر بنویسید.

متغیرهای یک دانش آموز	مقدار متغیر
سن دانش آموز	۱۵
نمره ریاضی نهم دانش آموز	۱۸
گروه خونی (A ، B ، O، AB)	B
قد دانش آموز	۱۴۰
وزن دانش آموز	۷۵

۳ با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست ، متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول روبه‌رو بنویسید.

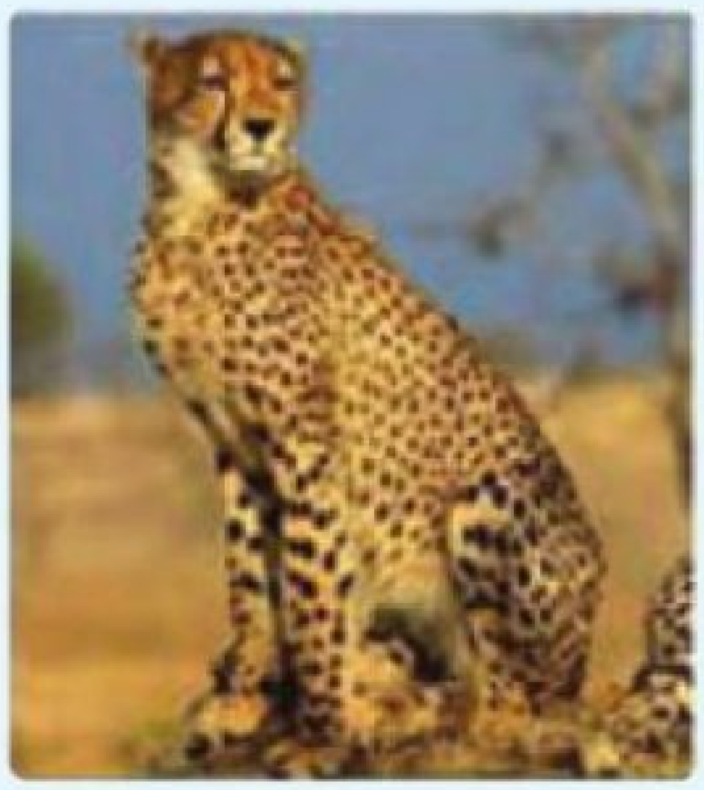
متغیر	مقدار متغیر
طول بدن	۱/۲ متر
ارتفاع شانه‌ها	
وزن	
طول دُم	

۴ در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را بر اساس مهارت به صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط و ضعیف درجه بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید. متغیر: مهارت

بسیار ماهر، ماهر، متوسط، ضعیف

۳ ۲ ۱ ۰

کاربرد علم آمار و احتمال در محیط زیست



کاربرد علم آمار و احتمال درمحیط زیست

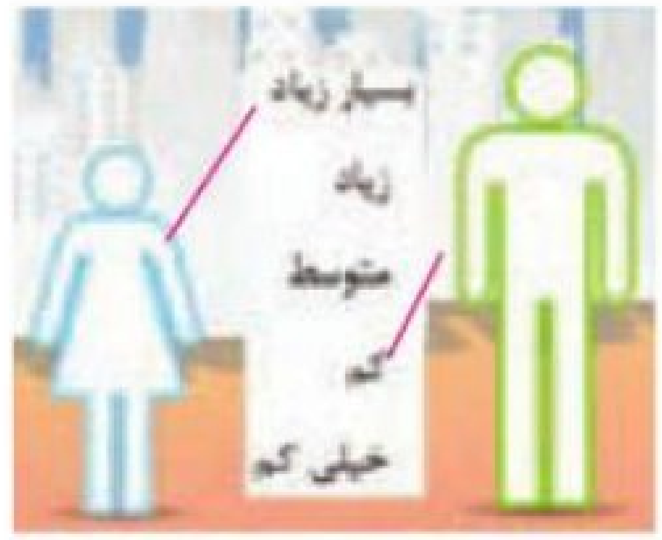
علم آمار و احتمال در محیط زیست کاربرد دارد. به عنوان مثال با استفاده از این علم می‌توان به شناسایی و شناخت عوامل مؤثر بر زیستگاه‌های مطلوب حیوانات در حال انقراض اشاره کرد. این موضوع مدیران محیط زیست را در مدیریت و حفاظت از این زیستگاه‌ها یاری می‌کند. یکی از این حیوانات در حال انقراض «یوزپلنگ ایرانی» است. یوزپلنگ ایرانی یک زیرگونهٔ به شدّت در معرض خطر انقراض از یوزپلنگ است که اکنون تنها چند ده قلاده از آن در ایران یافت می‌شود. این جانور در مناطق بیابانی در سطح منطقه زندگی می‌کرد و سال‌هاست که نسل آن در معرض نابودی کلی قرار دارد. یوزپلنگ از خانوادهٔ گربه سانان به شمار می‌آید؛ اما به دلیل داشتن دست و پایی بلند، بدنی کشیده و باریک، و سینه‌های فراخ تا حدود زیادی به سگ‌های تازی شبیه است. در میان گربه‌سانان، یوز با داشتن ارتفاع شانه‌ای برابر با ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر و وزنی بین ۲۷ تا ۴۰ کیلوگرم از جمله گربه سانان کوچک جثه به شمار می‌رود. اندازهٔ طول بدن آن به ۱/۲ متر می‌رسد و طول دم آن نیز میان ۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر است. همچنین سر این جانوران به نسبت کوچک است.

متغیرهای کمّی و کیفی

فعالیت

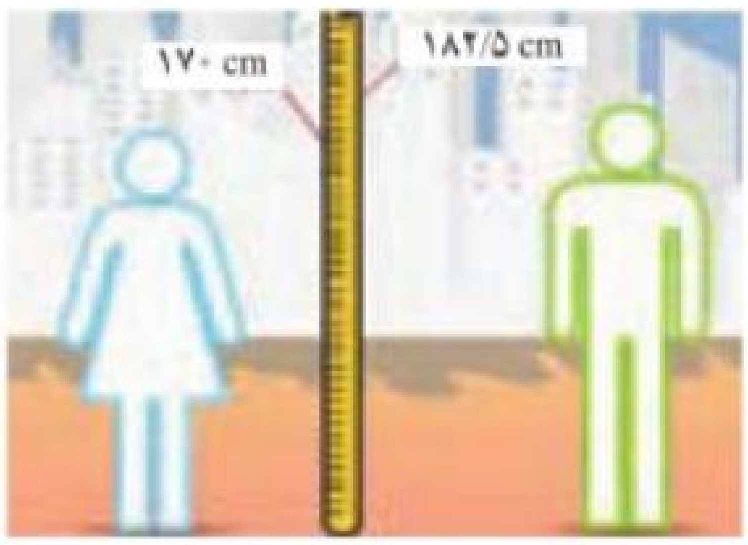
در یک شهر، با افراد مختلفی رو به رو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال :

از یک آقا و خانم می‌پرسیم :
«چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»

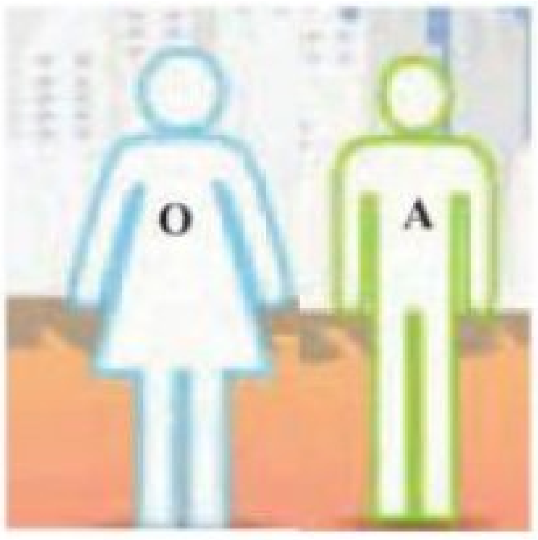


از مادر یک خانواده می‌پرسیم :
«چند فرزند دارید؟»

از همان خانم و آقا می‌پرسیم :
«قد شما چند سانتی متر است؟»

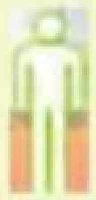


و سؤال آخر :
«گروه خونی خود را بگویید؟»



حال به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیر		
تعداد فرزندان	–	۲
قد افراد	۱۴۵	۱۳۰
گروه خونی	B	A
میزان لذت بردن از آشپزی	کم	زیاد

ب) با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به‌جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.

متغیر

- متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند
  - ؟ گروه خونی
  - ؟ میزان لذت بردن از آشپزی
- متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند
  - ؟ تعداد فرزندان
  - ؟ قد افراد

تعریف متغیرهای کمی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیرهای کمی» گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی‌اند.

تعریف متغیرهای کیفی

متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، «متغیرهای کیفی» گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سؤال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهای کیفی‌اند.

کار در کلاس

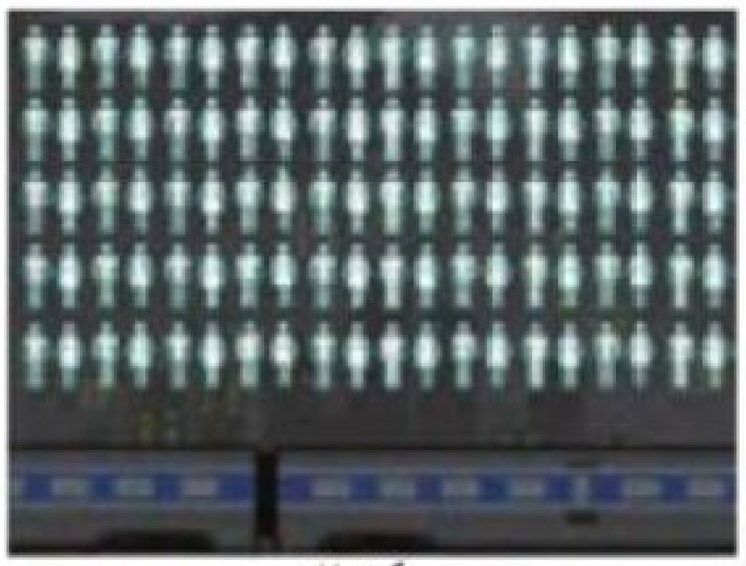
۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید:

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر کمی است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر کیفی است.

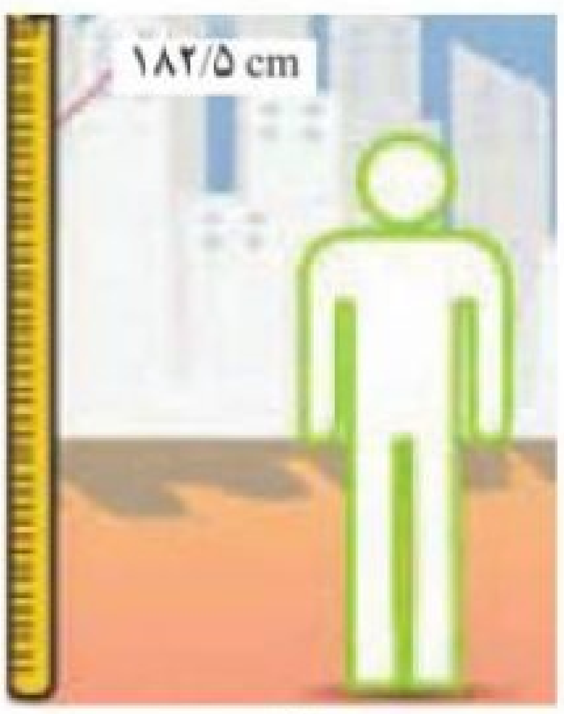
در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر کمی است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر کیفی است.

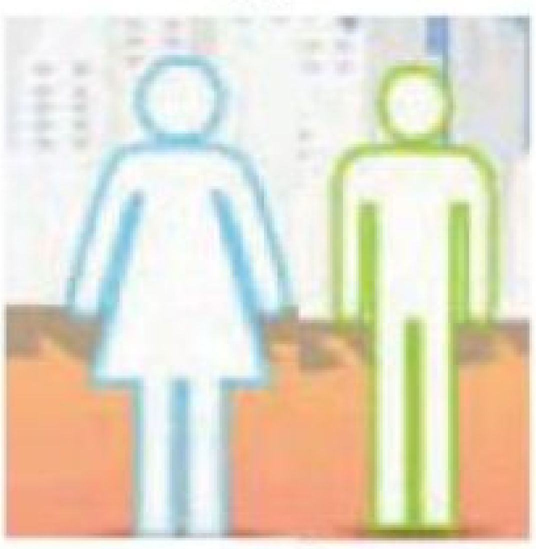


شکل الف

شکل ب



شکل پ



شکل ت

۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده) — کمّی ☐ کیفی ☑

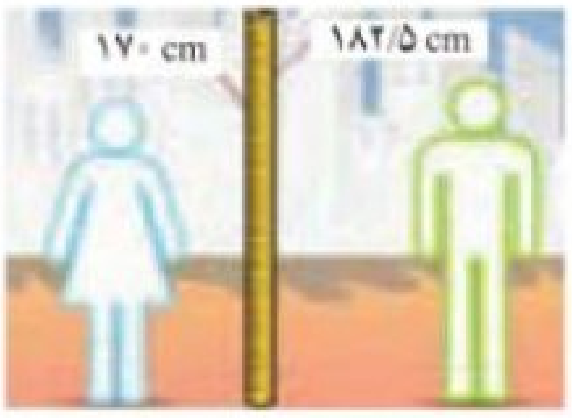
ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. — کمّی ☑ کیفی ☐

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای) — کمّی ☐ کیفی ☑

۳ جدول زیر را کامل کنید.

سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
موی شما چه رنگی است؟	مشکی، قهوه‌ای، طلایی، سفید، قرمز	کیفی
وزن شما چه عددی است؟	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	کمی
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم، لذت نمی‌برم	کیفی

انواع متغیرهای کمّی



فعالیت

همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمی‌اند.

۱ از مادر یک خانواده می‌پرسیم : چند فرزند دارید؟

برخی از جواب‌های ممکن : ۰، ۱، ۲، ۳و . . . .

۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟

برخی از جواب‌های ممکن : ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و . . .

۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دهم کشور به‌ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازهٔ [۷۵ , ۴۶] قرار می‌گیرد.

آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟ بله

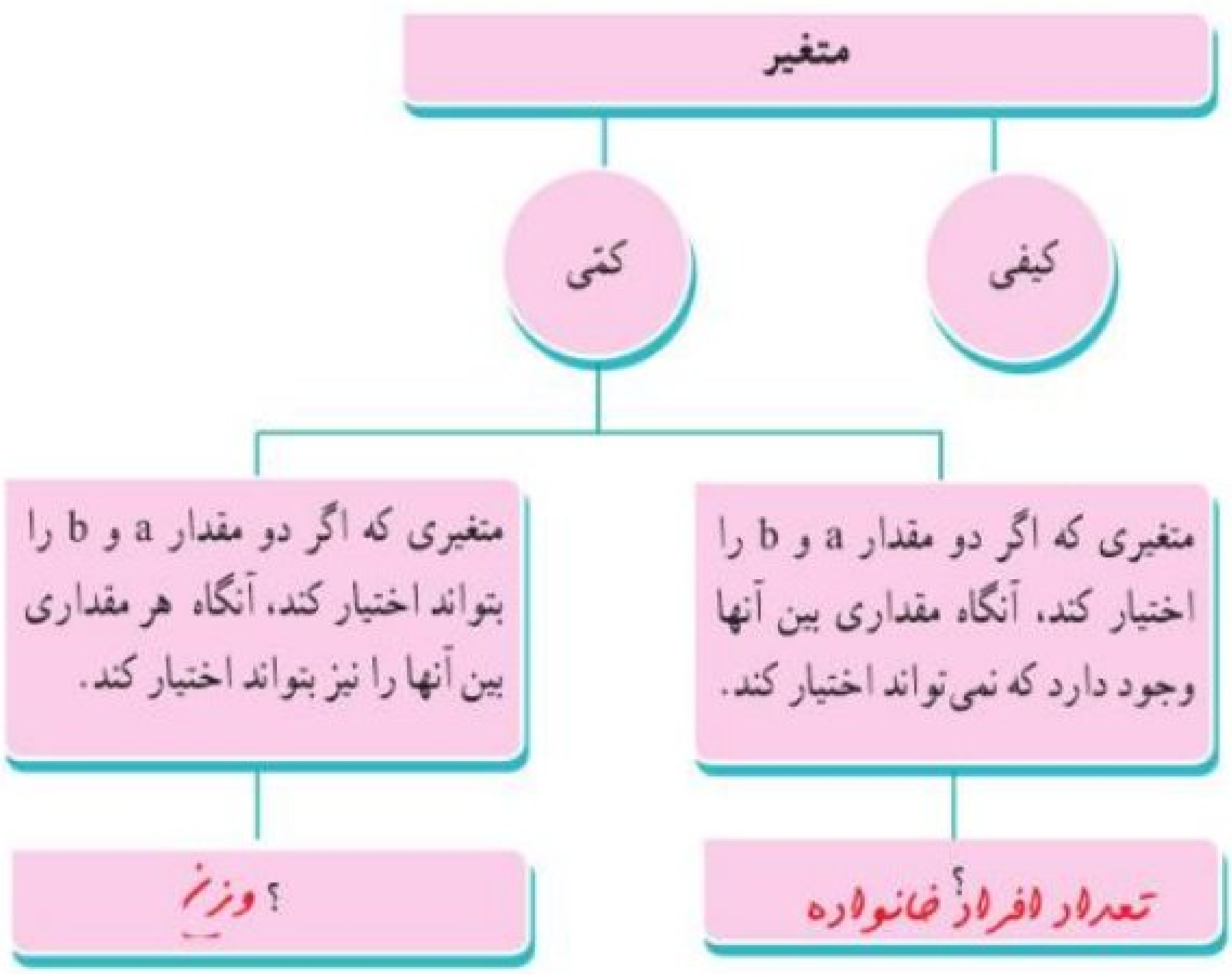
۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به‌ترتیب ۰و ۲۰ باشد. در این صورت تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازهٔ [۰,۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهندهٔ تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟ خیر

۵ متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳و ۴ کمی‌اند و یا کیفی؟ کمی

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟

وزن متغیر کمی و اعشار پذیر است ولی تعداد افراد خانواده متغیر کمی و اعشار ناپذیر می باشد .

۷ با توجه به قسمت‌های ۳و ۴ در شکل زیر به‌جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.



انواع متغیر کمّی :

۱) متغیر پیوسته ۲) متغیر گسسته

تعریف متغیر پیوسته

متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند. به عنوان مثال وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعریف متغیر گسسته

متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. به‌عنوان مثال تعداد فرزندان یک خانواده متغیر گسسته است.

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمّی زیر را مشخص کنید.

همکاران محترم، این کلمه از قلم افتاده، لطفا اصلاح شود.

الف) سرعت خودرو یک متغیر کمّی پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو ، یک متغیر کمی پیوسته و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر کمی گسسته است و این تعداد برابر با ۴ است.

۲ انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید :

الف) تعداد ماهی‌های یک دریا	گسسته ☑	پیوسته ☐
ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.	گسسته ☐	پیوسته ☑
پ) وزن افراد	گسسته ☐	پیوسته ☑
ت) تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه	گسسته ☑	پیوسته ☐

۵ در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیری (گسسته یا پیوسته) است؟

سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی‌متر	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	۸۰/۵ کیلوگرم	پیوسته
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	۰، ۱، ۲، ۳،.........	گسسته
وزن دوستتان چه عددی است؟	۷۰، ۷۱، ۷۲ و ..... کیلوگرم	پیوسته
شاخص تودهٔ بدن خانوادهٔ شما چه عددی است؟	۲۲، ۳۲/۵، ۳۰ و	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	عددی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر	پیوسته

انواع متغیرهای کیفی

فعالیت

به سؤال‌های زیر توجه کنید :

سؤال : از یک آقا و خانم می‌پرسیم : چقدر از آشپزی کردن لذت می‌بری؟

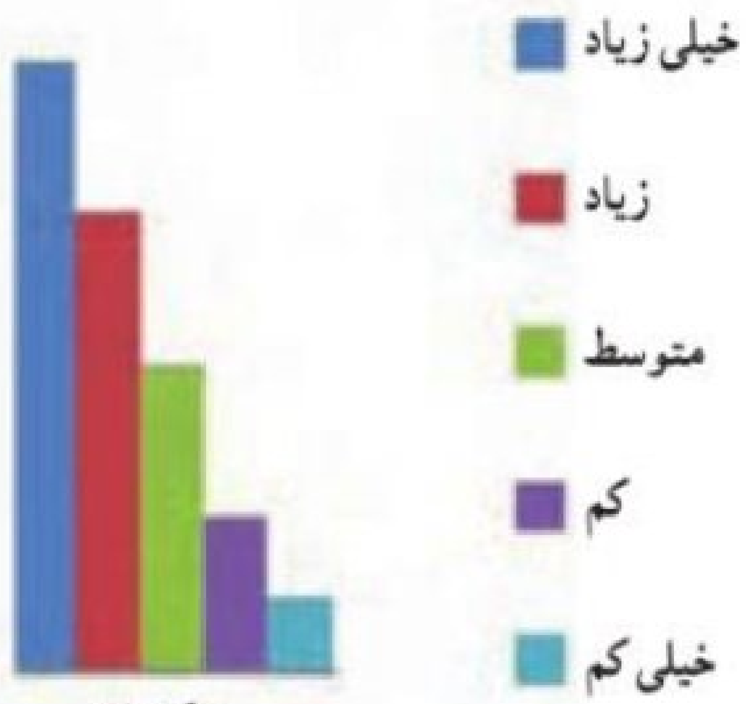
برخی از جواب‌های ممکن : خیلی زیاد، زیاد ، متوسط، کم، خیلی کم

سؤال : گروه خونی خود را بگویید.

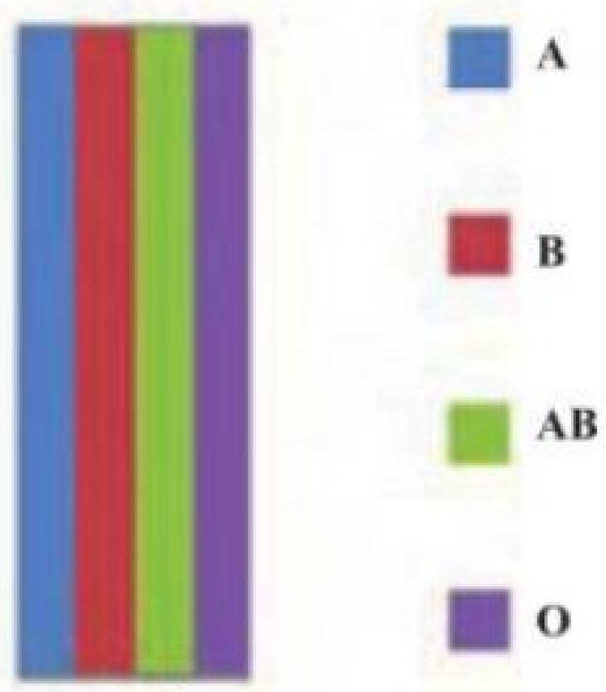
برخی از جواب‌های ممکن : گروه خونی A ، B، AB، O

در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد؛ همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ به سؤال دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.

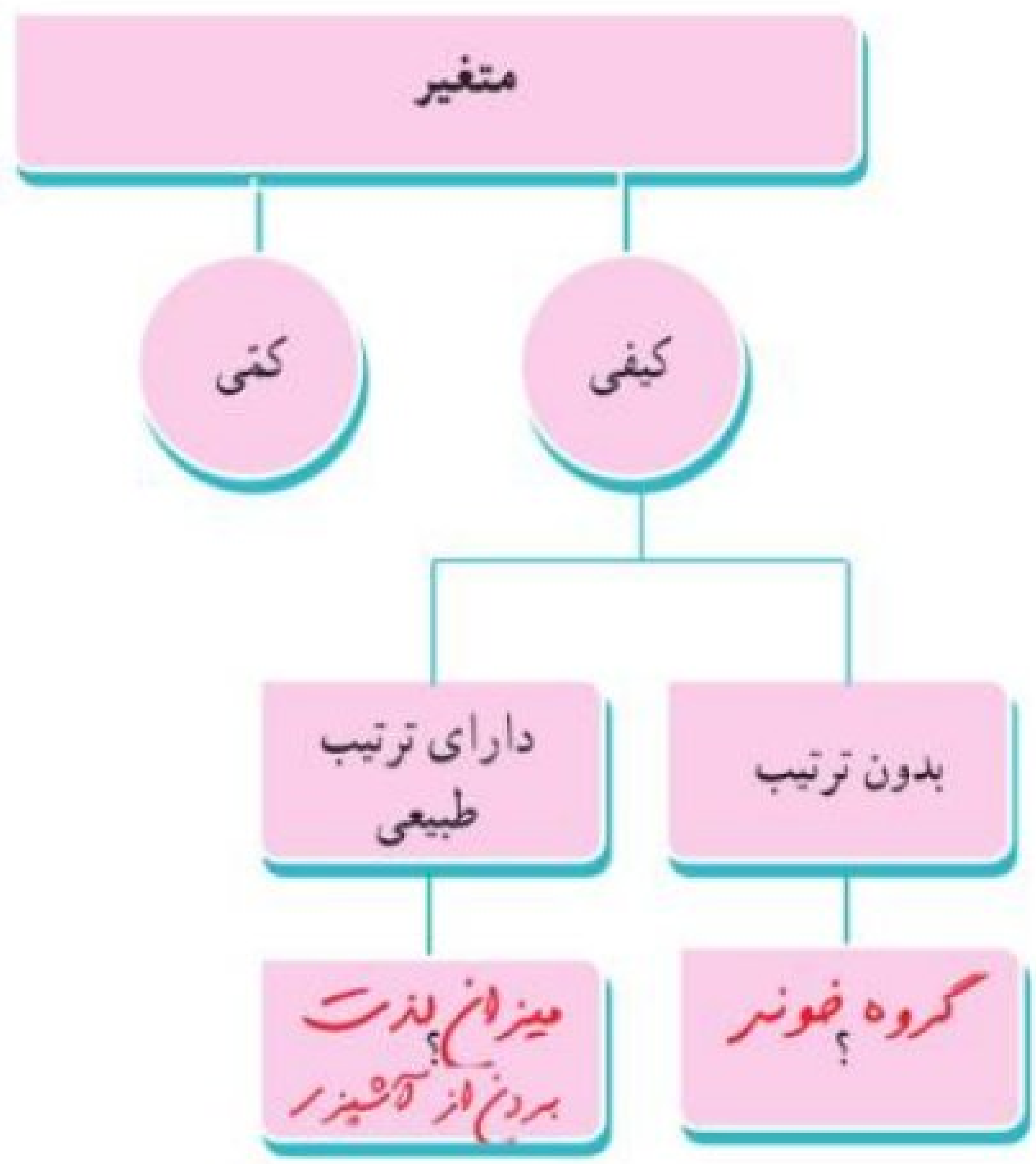
در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



شکل الف



شکل ب



متغیرهای ترتیبی و اسمی

انواع متغیر کیفی :

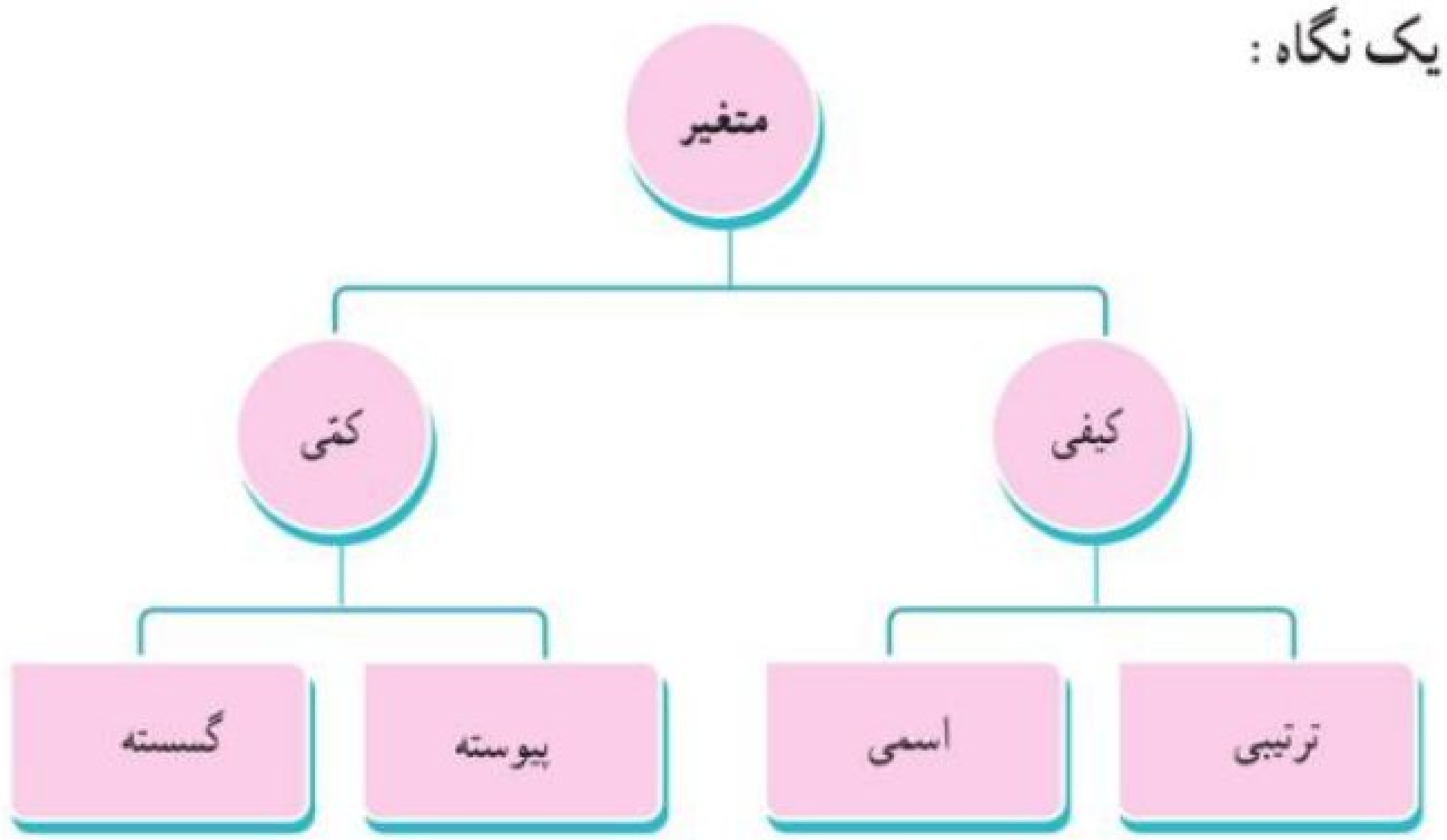
متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند. این متغیرها به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شود :

۱) متغیر ترتیبی ۲) متغیر اسمی (غیر ترتیبی)

متغیر ترتیبی : متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

متغیر اسمی (غیر ترتیبی) : متغیری کیفی است که ترتیبی نیست؛ مانند جنسیت (زن و مرد)

انواع متغیرها در یک نگاه :



کار در کلاس

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید :

در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر اسمی است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به‌دست می‌آورد، یک متغیر ترتیبی است و مقادیر آن مقام اول ، مقام دوم و مقام سوم است.

در شکل «پ»، میزان علاقهٔ شما دربارهٔ خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر ترتیبی است و مقادیر آن بسیار زیاد ، زیاد ، متوسط ، کم ، بسیار کم است.

شکل الف

مقام اول

مقام سوم مقام دوم

شکل ب

بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم

شکل پ

تمرین

۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن‌سال) اسمی ☐ ترتیبی ☑

ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست) اسمی ☑ ترتیبی ☐

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی) اسمی ☑ ترتیبی ☐

ت) کیفیت میوهٔ هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳) اسمی ☐ ترتیبی ☑

۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.

متغیر	نوع متغیر
۱ــ میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر	کمّی پیوسته
۲ــ نوع بارندگی (باران، برف)	کیفی اسمی
۳ــ تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	کمّی گسسته
۴ــ میزان دمای هوا	کمّی پیوسته
۵ــ شدت آلودگی هوا(زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی
۶ــ انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	کیفی اسمی
۷ــ شدت بارندگی (زیاد،متوسط، کم)	کیفی ترتیبی

متغیر

- کیفی
  - ترتیبی: ۵، ۷
  - اسمی: ۲، ۶
- کمّی
  - پیوسته: ۱، ۴
  - گسسته: ۳

۳ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمّی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمّی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم	×		×			
جنسیت (دختر و پسر)		×				×
قد	×			×		
وزن	×			×		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		×			×	
شاخص تودهٔ بدن	×			×		
تعداد مسافران قطار	×		×			

اصلاح شود ۱۶۰

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱/۶۰ سانتی‌متر باشد.

الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید. شاخص توده بدن $= \frac{95}{(1/6)^2} = 37/10$

ب) شاخص تودهٔ بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمّی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟ کمّی، پیوسته
(تکراری است که در جدول فوق پرسیده شده است.)

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

۳	۳	؟ ۴
۲	؟ ۲	۲
۱	۱	؟ ۱

جدول عددی

؟	؟	؟
؟		؟
؟	؟	

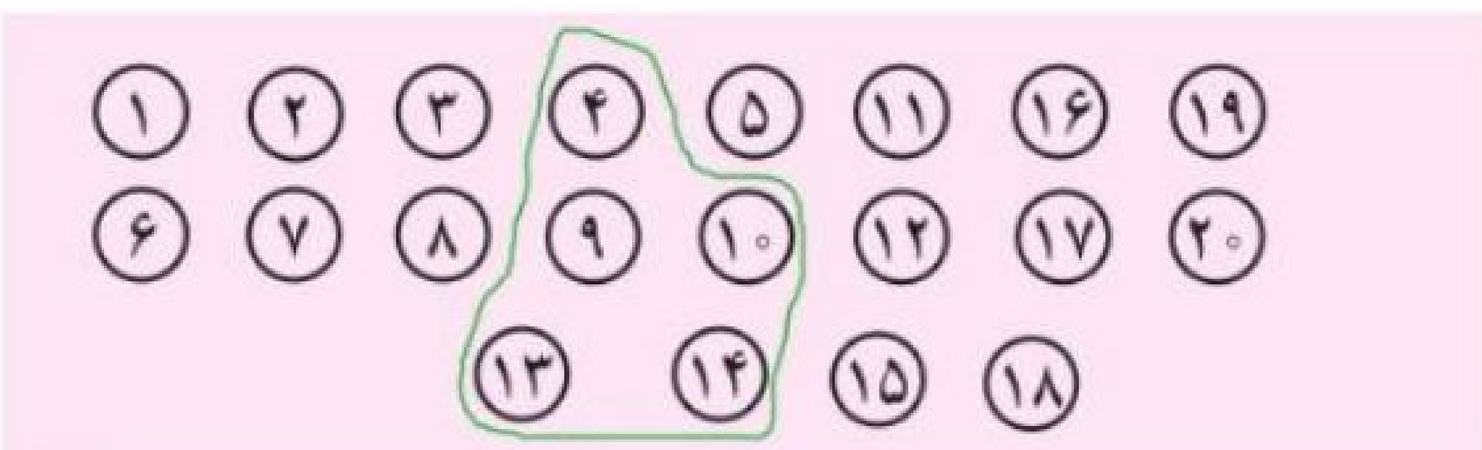
شکل

۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

جامعه: مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیایی که در باره‌ی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد. مانند دانش‌آموزان یک

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود. مانند دانش‌آموزان یک کلاس که به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند.

۷ شکل زیر یک جامعهٔ فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازهٔ جامعه چه عددی است؟ ۲۰ نفر

ب) اندازهٔ نمونهٔ انتخابی چه عددی است؟ ۵ نفر

پ) اعضای نمونهٔ انتخابی را بنویسید.

{۱۴ و ۱۳ و ۱۰ و ۹ و ۴}

۸ جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمّی پیوسته
کیفیت یک هلو	کیفی ترتیبی
اندازهٔ طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمّی پیوسته
اقوام ایرانی	کیفی اسمی
وضعیت آب و هوا	کیفی اسمی
دمای هوا در قله	کمّی پیوسته
فشار هوا در قله کوه	کمّی پیوسته


کوه نمیراز، شهرستان سامان ـ استان چهارمحال و بختیاری